第一工業大学研究報告
第32号 (2020) pp.17-24

Society 5.0の実現に向けた積分指導法の提案
– 情報科教育法の観点から –

山田 猛矢 [1]，福永 知哉 [2]，中茂 睦裕 [1]，野田 幸平 [3]

[1] 第一工業大学　工学部　情報電子システム工学科（〒 899-4395 鹿児島県霧島市国分中央 1-10-2）
[2] 第一工業大学　共通教育センター（〒 899-4395 鹿児島県霧島市国分中央 1-10-2）
[3] 鹿児島第一中学校（〒 899-4345 鹿児島県霧島市国分府中 214 番地）

Proposal of an Integral Instructional Method for the Realizing Society 5.0
– From the Perspective of the Informatization Education Act –

Takeshi YAMADA[1], Tomoya FUKUNAGA[2], Mutsuhiro NAKASHIGE[1], Kohei NODA[3]

[1]Department of Informatics and Electronics, Daiichi Institute of Technology
[2]Common Education Center, Daiichi Institute of Technology
[3]Kagoshima Daiichi Junior High School

Abstract : This paper proposes an integral teaching method for the realization of Society 5.0. The concept of "Integral = Inverse of Differential", which is constructed by conventional teaching methods, is a disadvantage in learning the knowledge and skills needed to realize Society 5.0. The introduction of "integration" by the compartmentalized quadrature by parts proposed in this paper builds the concept of "integration = calculation to find the area" and helps students in their subsequent studies. This paper proposes an instructional method for introducing "integration" using the categorical quadrature by parts. I will also explain how to teach the relationship between integration and differentiation.

***Keywords** : programming, society 5.0, integral calculus, educational teaching method*

1. はじめに

現在の高等学校の数学の教科書を見ると,「データの分析」,「統計処理」,「p 進法」などプログラミングに必要となる内容が盛り込まれ，AI やロボットを活用して実現しようとしている Society 5.0（サイバー空間（仮想空間）とフィジカル空間（現実空間）を高度に融合させたシステムにより，経済発展と社会的課題の解決を両立する，人間中心の社会（Society））を見据えた教育内容であることを感じる．その一方で，数学 II で学習する「積分」に目を向けると，旧態依然の「積分 = 微分の逆」という理解を促す指導法が続いている．解析的に解ける方程式のみを扱うのであれば，それでよいかもしれないが，自然現象を記述する方程式は解析的に解けることがほとんどなく，コンピュータを用いて数値的に解くのが一般的である．方程式を数値的に解くためには，数値積分のアルゴリズムを利用するが,「積分 = 微分の逆」という理解しか持たない学生は，アルゴリズムの内容を理解できず，理解するためには積分概念の再構築が必要となる．また，ロボット制御等

で利用されるPID制御においても，センサーから得られる値と本来目標としている値の偏差の時間積分を利用するが「積分＝微分の逆」という理解しか持たない学生は理解できない．他にも，センサーから得られる値に含まれるノイズの除去等に積分回路が利用されているが，これも理解できない．このように,「積分＝微分の逆」という理解を促す指導法は，Society 5.0を実現する知識・技術習得の弊害となっている．この問題をどう解決するか．答えは簡単である．現在，数学Ⅲの最後に学習する区分求積法を「積分」の定義として学習することである．区分求積法を「積分」の定義として学習することで，従来の「積分＝微分の逆」という理解ではなく,「積分＝面積を求める計算」という理解が強くなる（もちろん,「積分＝微分の逆」についても学習する）．この理解が，数値積分のアルゴリズム，PID制御，積分回路等の理解を容易にし，Society 5.0の実現，その社会を支えていく人材育成の促進へとつながる．

本論文は，Society 5.0の実現に向けた積分指導法について提案する．区分求積法を「積分」の定義として出発し,「積分＝面積を求める計算」という理解を持ってもらうための指導法について記述する．また，そのように定義した場合に必要となる「積分＝微分の逆」についての指導法も記述する．

2．これまでの「積分」の指導法

積分は，数学II，数学Ⅲで学習する.「積分」の学習に入る前に，微分を学ぶ．まず微分係数を学び，導関数，その応用として，関数の増減について学んだあと,「積分」を学ぶ．その導入は以下の通りである．

これまで関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めてきたが，導関数 $f'(x)$ から関数 $f(x)$ を求めることを考えてみる．微分すると $f(x)$ になる関数を $F(x)$ とし，この $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数と呼ぶ．また，$F(x)$ に任意の定数 C を足しても微分すると

$$\{F(x)+C\}' = F'(x) = f(x) \tag{1}$$

となり，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である．逆に，関数 $f(x)$ の任意の原始関数を $G(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に対して

$$\{G(x)-F(x)\}' \tag{2}$$

$$=f(x)-f(x) \tag{3}$$

$$=0 \tag{4}$$

が成り立つ．導関数が0となる関数は定数 C に等しいから

$$G(x)-F(x)=C \tag{5}$$

となる．つまり，

$$G(x)=F(x)+C \tag{6}$$

となり，$f(x)$ の任意の原始関数は $F(x)+C$ で表すことができる．

$f(x)$ を積分することを記号で

$$\int f(x)dx \tag{7}$$

で表し，これを $f(x)$ の不定積分という．$F'(x)=f(x)$ のとき，不定積分は

$$\int f(x)dx = F(x)+C \tag{8}$$

ただし, C は積分定数

となる．以上より，

$$F(x)+C \quad \underset{\text{積分する}}{\overset{\text{微分する}}{\rightleftarrows}} \quad f(x) \tag{9}$$

という関係がある．

初めて「積分」を学ぶ生徒に対して，このような流れで「積分」を導入すると，生徒たちは最終的な結論である「積分＝微分の逆」というイメージを持つだろう．このように導入された不定積分の後に，今度は定積分を学ぶ．その指導法は定積分の計算方法を機械的に教え，あとはひたすら積分の計算を行うというものである．その後，定積分の図形的な意味を1ページ程度で説明する．説明方法は以下の通りである．

図1のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および2直線 $x=a, x=b$ で囲まれた図形の面積 S を求める．曲線 $y=f(x)$ と x 軸の間にある図形の，x 座標が a から x までの部分の面積を $S(x)$ で表すと，$S(a)=0$ より，$S=S(b)-S(a)$ となる．

また，図2の $S(x+h)-S(x)$ の面積は，図3のように x と $x+h$ の間に適当な値 t を選べば，図4のように

$$S(x+h)-S(x)=f(t)h \tag{10}$$

と近似でき，h を左辺にもっていき，

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(t) \tag{11}$$

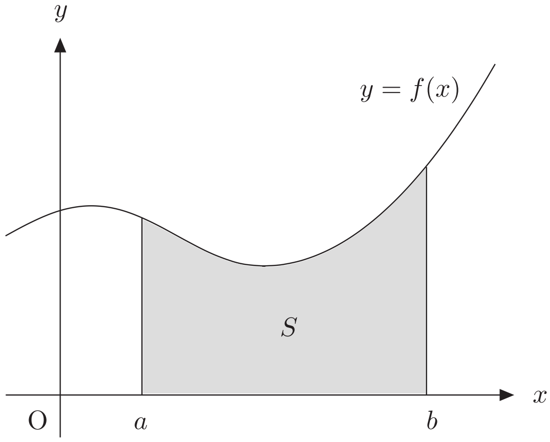

図 1: 面積 S

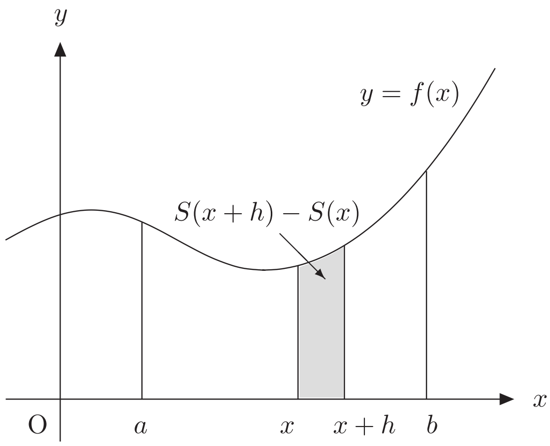

図 2: $S(x+h) - S(x)$ の面積

とした後，$h \to 0$ の極限を取ると

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(t) \tag{12}$$

$$S'(x) = f(x) \tag{13}$$

となる．式 (13) は，$S(x)$ が $f(x)$ の原始関数であることを示しており，これにより次の関係が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx \tag{14}$$

$$=\left[\ S(x)\ \right]_a^b \tag{15}$$

$$=S(b) - S(a) \tag{16}$$

$$=S \tag{17}$$

つまり，$\int_a^b f(x)dx$ は，区間 $a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積 S を表す．

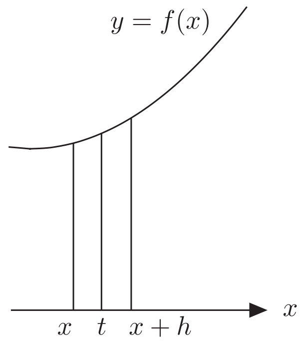

図 3: x と $x+h$ の間に t をとる

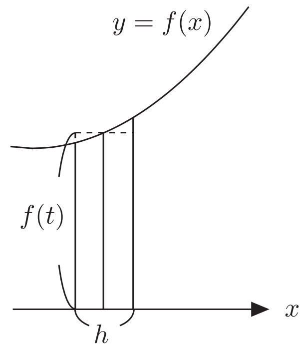

図 4: $S(x+h) - S(x)$ を $f(t)h$ で近似

以上の流れで,「定積分は面積を計算している」という説明が行われる．この説明で，定積分が面積を計算していると真に理解できる生徒はどれほどいるだろうか．数式を追っていくのが得意で，最終的な結論が

$$\int_a^b f(x)dx = S \tag{18}$$

という結果が得られたから定積分は面積を計算しているのだと納得する生徒もいるかもしれない．しかしながら，様々な図形の面積を小学校から計算してきた生徒にとって，この説明と生徒自身の持っている面積の概念は大きくかけ離れており，一致するものではない．それでも，そんなことはお構いなしと言わんばかりに，この説明の後，面積を求める演習問題をひたすら解かされる．しかも，定積分が面積を計算しているということが演習問題を解くにつれてわかっていくようなものではなく，最後の文言が「面積を求めてみよう。」と変わっただけで，実質，積分の計算をひたすら行わせているだけである．そのような演習問題をやらされ続けることで，納得・理解できなくても定積分は面積を計算しているのだと信じ込み，その本質を理解しないまま，積分の計算能力を磨きつつ，面積を求めなさいと言われれば，本能的に定積分の計算を行っていく．結局，積分と面積の概念は一致せず，それどころか「積分 = 微分の逆」という考えが益々強まっていく.「積分 = 微分の逆」という概念さえ持っていれば，積分の計算もできるし，面積も計算できるからである．

唯一の救いは，数学 Ⅲ で再び積分を学び，最後に区分求積法を学習することである．数学 Ⅲ では，まず指数関数の積分，三角関数の積分を学び，置換積分法，部分積分法を学び，その後，区分求積法を学ぶ．しかしながら，この頃には「積分 = 微分の逆」という概念が生徒自身の中で完成してしまい，そこから抜け出すことが困難な状態となっている．せっかく区分求積法を学び「積分 = 面積を求める計算」という，あらゆる応用が可能となる積分概念を構築できる機会がやってきたのに，積分概念の再構築を行う生徒はほとんどいない．なぜならば,「積分 = 微分の逆」という概念で，少

なくとも高校数学の範囲においては何も困らないからである．すべての問題がこの概念で問題なく解けてしまうのである．

3. 「積分 = 微分の逆」がもたらす理解困難な例

ここでは,「積分 = 微分の逆」という理解しか持たない学生にとって理解が困難な例として，数値積分，PID 制御，積分回路について簡単に紹介する．

3.1 数値積分

数値積分は数値解析の一分野であり，定積分の値を数値的に求めることはもちろんのこと，微分方程式を数値的に解く方法としても知られている．定積分の数値積分としてはニュートン・コーツの公式があり，次の式で与えられる．

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{19}$$

ここで，$x_i = a + i\frac{b-a}{n}\,(i = 0, 1, \cdots, n)$ であり，w_i は重みである．重み w_i はラグランジュ補間等で決定されるが，ここでの詳細な説明については割愛する．

式 (19) を見たとき,「積分 = 微分の逆」という理解しか持たない学生が，この式を理解できるだろうか．区分求積法を理解している学生にとっては，重み w_i についてはわからないかもしれないが，積分がもともと和の極限であることを知っているため，式 (19) のように表されることも納得できるだろう．

3.2 PID 制御

次に，ロボット制御等で利用される PID 制御について見てみる．PID 制御は，Proportional-Integral-Differential Controller であり，比例，積分，微分を利用した制御方法である．ここでは，積分に関係のある PI 制御について見ていく．まず，制御について簡単に説明する．制御とは，センサー等から得られる値（センサー値）$y(t)$ に対して，本来目標とする値（目標値）$r(t)$ との偏差を 0 に近づけるように制御対象物を操作することである．制御方法としてまず思いつくのは，操作対象物に与える操作量 $u(t)$ を，センサー値 $y(t)$ と目標値 $r(t)$ の差に比例するような量として与えることである．具体的には，K_p を比例定数として操作量

$$u(t) = K_p\bigl(r(t) - y(t)\bigr) \tag{20}$$

とすることである．比例定数 K_p は比例ゲインと呼ばれる．比例ゲインを適切に調整することにより，目標値に短い時間で収束することができそうだが，現実的には難しく，目標値の近くで偏差が残ったり（残留偏差），目標値の周りで振動したりする．残留偏差をなくすために式 (20) に I 制御を追加する．

$$u(t) = K_p\bigl(r(t) - y(t)\bigr) + K_i \int_0^t \bigl(r(\tau) - y(\tau)\bigr)d\tau \tag{21}$$

K_i は比例定数であり，積分ゲインと呼ばれる．

式 (21) の右辺第 2 項の意味が「積分 = 微分の逆」という理解しか持たない学生に，この式の意味が理解できるだろうか．区分求積法を理解している学生にとっては，式 (21) を見たときに，センサー値と目標値との偏差の累積を操作量の決定に利用していることがすぐに理解できるだろう．

3.3 積分回路

最後に積分回路について見ていく．積分回路は，センサーから得られる値のノイズ除去等に利用される．図 5 のように，R〔Ω〕の抵抗，電気容量 C〔F〕のコンデンサーをつなぎ，V_{in} に交流を印加する．このときの V_C について考える．V_C は，コンデンサーに蓄えられている電荷 Q〔C〕に比例し，

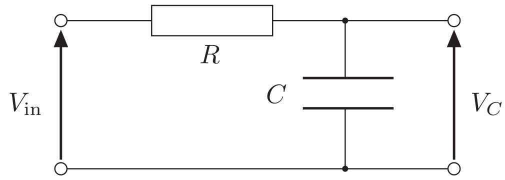

図 5: 積分回路

$$V_C = \frac{1}{C}Q \tag{22}$$

となる．また，コンデンサーに蓄えられている電荷は，コンデンサーに流れ込む電流 I を用いて

$$Q = \int_0^t I(\tau)d\tau \tag{23}$$

と表せる．式 (22)，(23) から

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau \tag{24}$$

となる．印加する交流の周波数が十分大きいとき，コンデンサーは抵抗 0 の導線とみなせるので

$$I \simeq \frac{V_{\mathrm{in}}}{R} \tag{25}$$

と近似できる．これを式 (24) に代入すると

$$V_C = \frac{1}{RC}\int_0^t V_{\mathrm{in}}d\tau \tag{26}$$

となる．

式 (26) の意味が「積分 = 微分の逆」という理解しか持たない学生に理解できるだろうか．区分求積法を

理解している学生にとっては，印加交流電圧の累積を RC で割ったものが V_C となっていることがすぐに理解できるだろう．

4. 区分求積法を積分の定義としたときの指導法

ここでは，初めて「積分」を学ぶ人に対する「積分」の導入法について提案する．まず，区分求積法により「積分」を定義し，次に微分と積分の関係について記述する．

4.1 積分の定義

現在の数学 II での「積分」の導入は，関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ となる原始関数 $F(x)$ の存在を仮定し，

$$F'(x) = f(x) \tag{27}$$

から，

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad C：積分定数 \tag{28}$$

という形で不定積分を定義し,「積分」の導入をしている．しかしながら，この導入法だと，これまで記述してきたように「積分 = 微分の逆」というイメージを植えつけてしまう．我々が提案する「積分」の導入は区分求積法から入る．

まず，図 6 のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積 S を求めるためにはどうしたらよいかの問いかけから始める．生徒をうまく誘導しながら，次のように説明し，積分は面積を求めるための計算であることを理解させる．

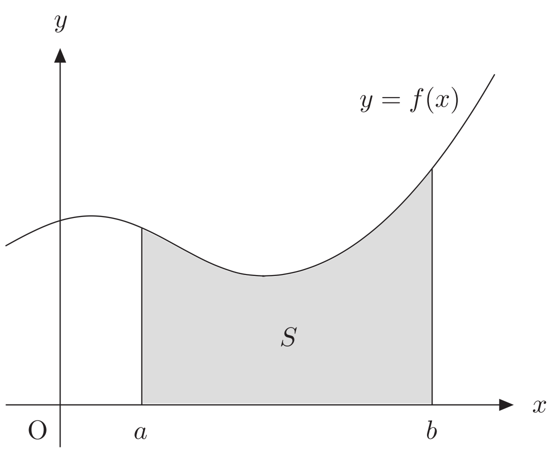

図 6: 面積 S の計算方法は？

区間 $[a, b]$ を n 等分し，図 7 のように長方形の右側 $x = x_i$ の高さが $f(x_i)$ となるように n 個の長方形を準備し，この長方形 n 個の面積をすべて足し合わせることで面積 S を近似する．このとき，長方形の幅

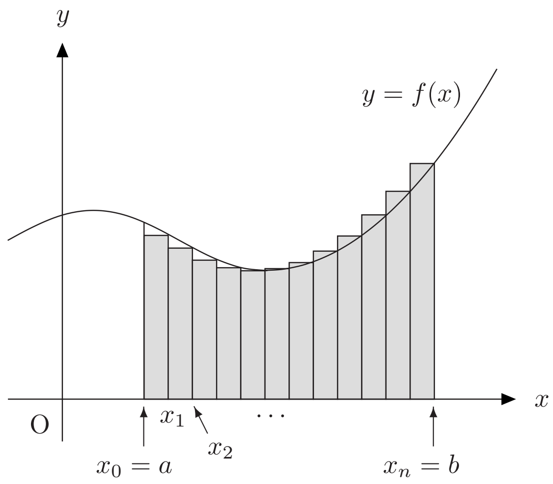

図 7: 面積 S を長方形の面積の足し合わせで近似

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{29}$$

とし，

$$x_i = a + i\Delta x \qquad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{30}$$

とする．そうすると，面積 S は次のように近似できる．

$$S \fallingdotseq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \tag{31}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{32}$$

ここで，$\Delta x \to 0$ ($n \to \infty$) を取ると，長方形の面積の足し合わせは限りなく面積 S に近づき

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = S \tag{33}$$

となる．なお，長方形の左辺を高さとして面積を計算しても，極限を取ると同じになる．

このような流れで面積を求める考え方を説明し，式 (33) 左辺の簡単な記述方法としてインテグラル $\int$ を導入する．まず，微分のときに Δx を $\Delta x \to 0$ の極限を取ったときに，dx と記述したように，式 (33) の $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$ の部分は dx と書く．ギリシャ文字の $\sum$ は，ラテン文字の S なので S を縦に伸ばした $\int$ と記述することにし，また，足し合わせる範囲を $\int$ の上下に記述するようにする．つまり，式 (33) の左辺は次のように記述することを定義する．

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \equiv \int_a^b f(x)dx \tag{34}$$

このように説明することで，式 (34) の意味を次のように理解させる．図 8 のように，dx 部分は長方形の幅,

$f(x)$ 部分は長方形の高さ，$\int_a^b$ 部分は長方形を a から b まで足し合わせるという意味であること．このように理解してもらえば，式 (34) が面積を表すことに納得でき，これまで生徒が築き上げてきた面積の概念とも一致する．

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{aからbまで足し合わせる}} \underbrace{f(x)}_{\text{長方形の高さ}} \underbrace{dx}_{\text{長方形の幅}}$$

図 8: 積分の意味

さらに，ここで導入したインテグラルの意味を理解してもらうために，面積を計算する例題や演習問題を行う．ただし，この段階では，まだ積分と微分との関係を示していないため，積分の機械的な計算はできない．そのため，長方形や三角形，台形などの，積分を使わなくても面積が計算できる図形を例にとり，積分の面積の求め方のイメージを掴んでもらう．この例題と演習問題が大事であり，これを行うことで難しく見えてしまう積分記号の意味を理解してもらい「積分＝面積を求めるための計算」という理解を獲得してもらう．

ここで，具体的な例題として長方形と台形の面積を取り上げる．

・長方形の面積

図9左のように，x 軸，$x=3$，$x=11$，$y=f(x)=7$ で囲まれた部分の面積 S を考える．この面積 S を求め

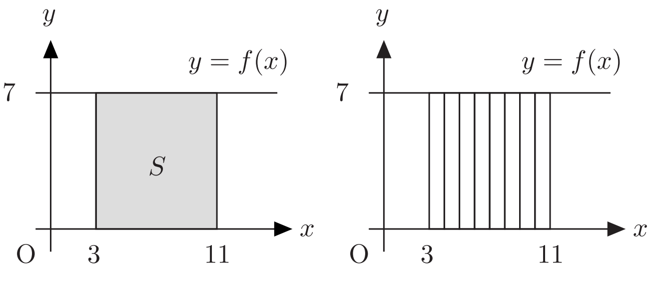

図 9: 長方形の面積を積分で考える

るのは小学生でもできるが，積分の考えを身につけてもらうために，積分の考え方で説明する．この面積 S を求める式を積分で書くと

$$S = \int_3^{11} f(x)dx \tag{35}$$

$$= \int_3^{11} 7\ dx \tag{36}$$

この積分の意味は，図9右のように，$x=3$ から $x=11$ を n 等分し，幅 $\Delta x = \frac{11-3}{n}$，高さが $f(x)=7$ の長方形の面積をすべて足し合わせて，$\Delta x \to 0$ の極限を取ることで，面積 S を求めてるという説明を行う．もちろん，極限を取らなくても面積を求められること，分割した長方形の面積を足し合わせることと「縦×横（$7 \times (11-3)$）」が同じであるということも理解してもらう．

・台形の面積

台形の面積についても，同様に考えてもらう．長方形の面積を足し合わせて極限を取ることで台形の面積が計算できることを理解してもらう．図10左のように，x 軸，$x=2$，$x=10$，$y=f(x)=x$ で囲まれた台形の面積 S を積分の考え方で理解してもらう．これを積

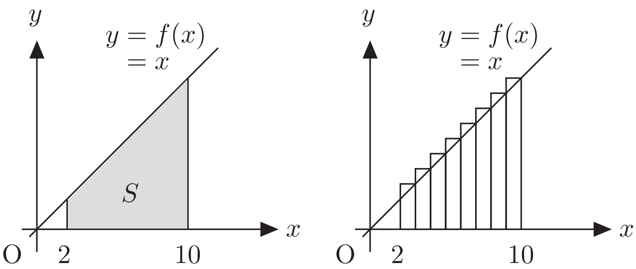

図 10: 台形の面積を積分で考える

分の式で書くと

$$S = \int_2^{10} f(x)dx \tag{37}$$

$$= \int_2^{10} x\ dx \tag{38}$$

となることを説明する．式の意味していることは，図10右のように，$x=2$ から $x=10$ までを n 等分し，幅 $\Delta x = \frac{10-2}{n}$，高さが $f(x_i)$ の長方形の面積をすべて足し合わせて，$\Delta x \to 0$ の極限を取ることである．先ほどの長方形の面積を求める際は，極限を取る必要はなかったが，今回は極限を取らないと面積が正確に求められないことを理解してもらう．また，極限を取ることで台形の面積が求められることを理解してもらう．また，数値積分の2点ニュートン・コーツ公式が台形公式と呼ばれ，台形の面積を足し合わせていくことを紹介してもいいかもしれない．

このように，関数 $f(x)$ がわかっていれば，$f(x)$ が曲線であっても，細かく分割して微小長方形の面積を足し合わせて極限を取ることで面積が求められることを理解してもらう．この説明を生徒が納得・理解してもらうまで十分時間をかけて説明することで「積分＝面積を求める計算」という概念が構築される．

しかしながら，区分求積法による積分の計算は，無限数列の和を計算しなければならず，計算できるとし

ても $f(x) = x$ や $f(x) = x^2$，$f(x) = x^3$ までである．そこで，次に微分と積分の関係（「積分 = 微分の逆」）について説明し，積分の計算についてもできるようになってもらう．

なお,「積分」の導入に区分求積法から入る方法は,「微分」の導入時の指導方法と同じと考えている.「微分」の導入では，まず微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{39}$$

から入り，この定義式に従って接線の傾きを求めたり，導関数を求めたりする．その後，公式として

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{40}$$

を示し，それ以降は，微分の定義で計算する生徒はいない．我々は区分求積法から「積分」の導入を行うが，あくまでも導入時において「積分 = 面積を求める計算」を植えつけたいだけであり，区分求積法で積分をすべて計算するべきという主張ではない.「積分」導入時に区分求積法から入り「積分 = 面積を求める計算」の理解が得られれば，後の具体的な計算等は,「微分の逆」を用いて計算すればよい．

4.2 微分と積分の関係について

ここでは，微分と積分の関係（「積分 = 微分の逆」）について記述する．区分求積法を定義として「積分」を導入しているため，その後，急に「積分」は「微分の逆」という説明をしても，生徒には意味がわからない．そこで,「積分」が「微分の逆」ということを生徒にどのように説明するかを記述する．

x 軸，$x = 0$，$x = \alpha$，関数 $f(x)$（$f(x) \geqq 0$）で囲まれた図形の面積を表す関数を $F(\alpha)$ とする．この関数 F を用いると，x 軸，$x = a$，$x = b$，$f(x)$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{41}$$

となる．これは，図 11 より明らかである．なお，式 (41) のように積分範囲が定数で決められている積分を「定積分」という．

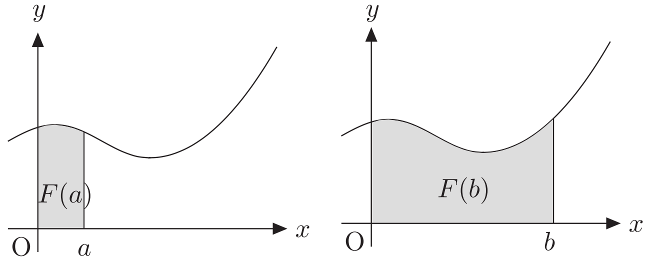

図 11: $F(x)$ の表す面積

ここで，関数 $F(x)$ を x で微分することを考える．関数 $F(x)$ は，$f(x)$ の $x = 0$ から $x = x$ までの面積を表すが，$x = x$ がわかりにくいので変数 t を用いて

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{42}$$

のように定義する．このように記述すると，関数 $F(x)$ は，関数 $f(t)$ の $t = 0$ から $t = x$ まで面積を表す関数と言うことができ，生徒たちも理解しやすい．

この関数 $F(x)$ を微分の定義に従って x で微分する．

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{43}$$

ここで，式 (43) の右辺の分子に，式 (41) を用いると

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \tag{44}$$

となる．また，式 (44) の分子の積分は Δx が十分小さいことから，幅 Δx，高さ $f(x + \Delta x)$ の長方形の面積を表すので

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x+\Delta x)\Delta x \tag{45}$$

となる．式 (45) を式 (44) に代入することで Δx が約分されるので，$\Delta x \to 0$ の極限を取ると

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{46}$$

となる．これは，面積を表す関数 $F(x)$ を x で微分すると $f(x)$ になることを表す．また，改めて式 (42) を見ると，関数 $f(x)$ を $x = 0$ から x まで積分したものが $F(x)$ となっている．つまり，関数 $f(x)$ を積分すると $F(x)$ となり，$F(x)$ を微分すると $f(x)$ となることがわかる．

式 (42) では，$x = 0$ から位置 x までの面積を表す関数を $F(x)$ としたが，より一般的に任意の位置 a から x までの面積を考える．任意の位置 a から x までの面積は，$x = 0$ から位置 x までの面積から，$x = 0$ から位置 a までの面積を引けばいいので，$x = 0$ から位置 a までの面積を C とし（C は定数となる），マイナスも C に含めるとすると，式 (42) は

$$F(x) + C = \int_a^x f(t)dt \tag{47}$$

と書き換えられ，定数 C は積分定数と呼ばれる．式 (47) において $a = 0$ とおくと，定数 C は $x = 0$ から $x = 0$ までの面積となるため $C = 0$ となり，式 (42) と一致する．なお，式 (47) のように，基点 a から x までの積分を「a を基点とする不定積分」という．不定積分には，基点を定めていないものもあり，

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{48}$$

のように記述される．一般に「不定積分」というと，この式 (48) を指す．式 (48) の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}\{F(x)+C\} \tag{49}$$

$$= \frac{d}{dx}F(x) \tag{50}$$

となり，式 (46) を用いると

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x) \tag{51}$$

となる．式 (47) についても同様で，a を基点とした不定積分を x で微分することで，$f(x)$ が得られる．つまり，ある関数 $f(x)$ を x で積分し，さらに x で微分すると元の関数 $f(x)$ に戻る．これは,

$$F(x)+C \quad \underset{\text{積分する}}{\overset{\text{微分する}}{\rightleftarrows}} \quad f(x) \tag{52}$$

という関係があることを表す.

このような流れで積分と微分の関係を説明し，その後は現在の教科書に沿った形で積分の機械的な計算方法を教え，積分の計算練習を行えばよい.

5. おわりに

本論文は,「積分」導入時の指導法についての提案を行った．これまで行われてきた指導法により構築される「積分＝微分の逆」という概念ではなく,「積分＝面積を求める計算」という概念を構築してもらうために,区分求積法による「積分」の導入,「積分」の意味を理解してもらうための例題,「積分と微分の関係」の指導法について記述した.「積分」導入時に「積分＝面積を求める計算」という概念を構築することで，数値積分や PID 制御，積分回路など，Society 5.0 の実現に向けた知識・技術の習得が容易となる．目の前の大学受験に向けた指導も大切かもしれないが，将来を見据えた指導も大切である．今回提案する指導法のように，導入時のみの修正で，その後の生徒の知識習得，技術習得に大きな影響を与える可能性がある指導法は，実践する価値があると考える.

今後の課題は,「積分」導入時に区分求積法から入る本提案を実践し，生徒のつまずくところ，生徒が理解しにくい個所を洗い出し改善することである.

謝辞

本論文を作成するにあたり御助言いただいた鹿児島第一中学校 山口太一先生に深く感謝する.

参考文献

[1] 長谷川考志, ほか 20 名, “高等学校　数学 II”, 第一学習社, 2014

[2] 長谷川考志, ほか 20 名, “高等学校　数学 III”, 第一学習社, 2014