弧度法の受け入れ促進のための弧度法と三角関数の導関数の導入法の提案

山田 猛矢 [1]，福永 知哉 [2]，松田 翔太 [1]，野田 幸平 [3]

[1] 第一工科大学　工学部　情報電子システム工学科（〒 899-4395 鹿児島県霧島市国分中央 1-10-2）
[2] 第一工科大学　共通教育センター（〒 899-4395 鹿児島県霧島市国分中央 1-10-2）
[3] 鹿児島第一中学校（〒 899-4345 鹿児島県霧島市国分府中 214 番地）

Proposal for the Introduction Method of Radian Measure and Derivatives of Trigonometric Functions to Foster Acceptance of Radian Measure

Takeshi YAMADA[1]，Tomoya FUKUNAGA[2]，Syota MATSUDA[1]，Kohei NODA[3]

[1]Department of Information and Electronic Systems Engineering, Daiichi Institute of Technology
[2]Common Education Center, Daiichi Institute of Technology
[3]Kagoshima Daiichi Junior High School

Abstract : In high school mathematics, the concept of radians is introduced, but only a few students understand and accept its significance. This paper proposes methods for introducing radians and the derivatives of trigonometric functions to help students accept them. When expressing the magnitude of an angle in degrees, it complicates the calculations for arc lengths, areas of circles, and the derivatives of trigonometric functions, where a coefficient $\frac{\pi}{180}$ appears. This not only makes the calculations cumbersome but also detracts from the mathematical beauty that the sine and cosine functions do not return to their original values even after being differentiated four times. By explaining this to students, we aim to help them understand the significance of radians.

Keywords *: derivative, trigonometric functions, radian method*

1. はじめに

角の大きさを孤の長さと半径の比で定義する弧度法は，円運動を記述するのに適しているだけでなく，数学的に捉えてもそのメリットは非常に大きい．しかしながら，学生たちに弧度法，ラジアンについて聞いてみると「なぜ弧度法を使うのかわからない」「度数法で何の問題もないのではないか」との答えが返ってくる．これは弧度法のメリットについて議論する以前の問題で，弧度法の存在意義すら理解していないことから発せられる回答である．確かに，美しさ，便利さ等，考慮しなければ，弧度法を導入せずとも度数法で事足りる．しかしながら，1 度その美しさ，便利さを知ってしまったら，度数法に後戻りすることはできない．それにも関わらず，なぜ弧度法はこんなに存在感が薄いのか．その原因の 1 つに，教育の中での弧度法の導入，その後の弧度法の扱いが挙げられる．弧度法は，数学 II [1] の三角関数の最初に導入されるが，ほぼ定義のみ紹介され，その直後にはもう度を弧度に，弧度を度に

変換する例が紹介され，変換の練習問題を行う．そして多くの教科書では，突然「これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。」と，理由を説明することなく記述されている．その後，扇形の弧の長さと面積が弧度を用いてどのように表されるかが，度数法との比較もなく淡々と記述されている．この弧度法の導入から扇形の弧の長さ，面積までが，わずか 2 ページほどで記述され，それ以降は，数学 Ⅲ [2] に入っても弧度法には一切触れられない．これでは，弧度法の存在感が薄くなってしまっても仕方がない．

本論文は，数学 Ⅱ の三角関数で導入される弧度法の導入法，角の大きさの記述法が度数法なのか弧度法なのかで明らかな違いが現れる三角関数の導関数において，弧度法の美しさ，便利さを伝えるための導入法について提案する．

2. これまでの弧度法，三角関数の導関数の導入とその問題点

(a) これまでの弧度法の導入とその問題点

弧度法を最初に学ぶのは，高校数学の数学 Ⅱ の三角関数の最初である.「半径 1 の円において，長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを 1 ラジアンまたは 1 弧度とする。」という形で導入される．そこから，半径 1 の円の周の長さが 2π ということから，$360^\circ = 2\pi$ ラジアン，$180^\circ = \pi$ ラジアン，$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ラジアン，1 ラジアン $= \frac{180^\circ}{\pi}$ との説明があり，その後は度を弧度に，弧度を度に変換するための例，練習問題へと続く．そして「これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。」との記述がある．その後，扇形の弧の長さ l, 面積 S が中心角に比例するということから，円の半径を r として，$l = r\theta$, $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$ の説明がなされる．これが，どの教科書も通常 2 ページ程度で記述されており，これ以降，数学 Ⅲ に入っても弧度法には一切触れられない．

ここで問題となるのは，角の大きさに弧度法を用いる理由が一切記述されておらず，また，教科書の記述を読む限り，扇形の弧の長さと面積についても，導入した弧度法を用いるとどのように記述されるかの紹介に留まり，弧度法で簡潔に記述できること（導入法での記述との比較）の記載もないことである．

(b) これまでの三角関数の導関数の導入とその問題点

数学 Ⅱ で弧度法が導入された後は，三角関数の性質やグラフ，加法定理，三角関数の合成を学ぶ．その後，数学 Ⅲ に入り，まず角度が用いられる分野として，複素数平面を学ぶ．ここまでは，角の大きさとして度数法と弧度法のいずれを用いようが違いはないので，特に問題ない．度数法と弧度法で明らかな違いが出てくるのは，数学 Ⅲ で扱う三角関数の導関数のところである．三角関数の正弦の導関数は

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{1}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \tag{2}$$

を用いて次のように求めている．

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \tag{3}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \tag{4}$$

ここで，$\frac{h}{2} = \theta$ とおくと，$h \to 0$ のとき $\theta \to 0$ より

$$(\sin x)' = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\cos(x+\theta)\sin\theta}{2\theta} \tag{5}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \cos(x+\theta) \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \tag{6}$$

$$= \cos x \tag{7}$$

また，余弦の導関数については

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}' \tag{8}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' \tag{9}$$

$$= -\sin x \tag{10}$$

と求めている．正接の導関数については，$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 及び商の微分法により

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \tag{11}$$

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \tag{12}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \tag{14}$$

と求めている．

なお，式 (1) については，次のように計算している．図 1 のように，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし，半径 1 の円 O の周上に ∠AOB= θ となる 2 点 A，B をとる．点 A における円の接線と半直線 OB の交点を T とすると，面積について

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sin\theta \tag{15}$$

$$\triangle\mathrm{OAT} = \frac{1}{2}\tan\theta \tag{16}$$

$$扇形\ \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\theta \tag{17}$$

となり，$\triangle$OAB $<$ 扇形 OAB $< \triangle$OAT であるから

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \tag{18}$$

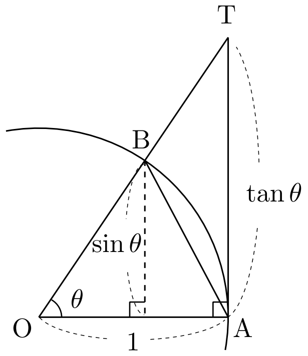

図 1: △OAB, △OAT，扇形 0AB の面積比較

各辺を $\sin\theta$ で割ると，$\sin\theta > 0$ より

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \tag{19}$$

また，各辺の逆数をとると

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta \tag{20}$$

となり，$\theta \to +0$ のとき，$\cos\theta \to 1$ であるから

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{21}$$

$\theta < 0$ の場合には，$\theta = -t$ とおくと $t > 0$ であるから，式 (21) より

$$\lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1 \tag{22}$$

となる．式 (21)，(22) を合わせて

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{23}$$

と求めている．

三角関数の導関数導入時の問題点としては，角の大きさが弧度法で記述されていることが明示されておらず，また，角の大きさが度数法で記述されている場合は，計算結果が変わることを記述していないことである．

3. 弧度法の受け入れ促進のための弧度法と三角関数の導関数の導入法の提案

本節以降，角度の大きさに度数法を用いているか，弧度法を用いているかを明示するために，度は θ° と「°」を付し，弧度は θ で記述する．

(a) 弧度法の導入法

現在の弧度法の導入において，弧度法の定義及び度と弧度の関係性を示すところまでは特に問題はない．問題となるのは，多くの教科書で理由なしに「これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。」という記述である．この記述は，弧度法の導入，度と弧度の互換の例，問いの後ではなく，扇形の弧の長さ，面積の後に，入れた方がよいと考える（どのような文を入れるかについては，以下の扇形の弧の長さ，面積の説明の仕方の後に示す）．また，扇形の弧の長さと面積については，弧度法を用いるとどのように表されるかの紹介だけではなく，度数法と比較し，弧度法の方が簡潔に記述できることを示す必要がある．

扇形の弧の長さ l，面積 S が中心角に比例するという説明から円の半径を r として

$$l = r\theta \tag{24}$$

$$S = \frac{1}{2}\,r^2\theta = \frac{1}{2}\,lr \tag{25}$$

と表されるのを紹介するのは問題ないが，それと同時に度数法の場合だとどのようになるかも示すべきである．度数法では

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360} = \frac{\pi r\theta^\circ}{180} \tag{26}$$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta^\circ}{360} = \frac{\pi r^2\theta^\circ}{360} \tag{27}$$

となる．式 (24)，(25) と式 (26)，(27) を見てもらえば，誰もが式 (24)，(25) の方が簡潔に記述できていると答えるだろう．これを理由に，今後は角度の大きさに弧度法を用いると記述するのがよいと考える．記述例としては「式 (24)，(25) のように弧度法を用いると弧の長さ，面積が簡潔に記述できるので，これからは角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。」ではどうだろうか．また，この理由だけでは不十分と考えるのであれば，数学 Ⅲ にて学ぶ三角関数の微分まで進むと弧度法での記述の美しさ，便利さがわかることを予告しておくのもよいと考える．

(b) 三角関数の導関数の導入法

三角関数の導関数の導入においても，やはり度数法と比較するべきと考える．加法定理等のように，度数法で記述しようが弧度法で記述しようが同じ結果が得られるものについては，どちらで証明，説明を行なっても問題ないが，記述の違いで明らかに違う結果が得られるものに対しては，どちらも計算し，比較すべきである．

まず，三角関数の導関数の導出に必要な式 (1) について考える．弧度法で記述された $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ の計算・説明については前節の計算・説明で問題ない．これに加えて，角度の大きさが度数法で記述された $\displaystyle\lim_{\theta^\circ\to 0}\frac{\sin\theta^\circ}{\theta^\circ}$ の計算・説明も入れるべきだと考える．基本的な計算・説明に関しては変わらないが，角の大きさが度数法で記述されることにより，式 (17) の扇形の面積が変わっ

てくる．角の大きさが度数法で記述されているとき，

$$\text{扇形 OAB} = \frac{\pi\theta^\circ}{360} \tag{28}$$

となる．これにより，それ以降の式が

$$\sin\theta^\circ < \frac{\pi\theta^\circ}{180} < \tan\theta^\circ \tag{29}$$

$$1 < \frac{\pi\theta^\circ}{180\sin\theta^\circ} < \frac{1}{\cos\theta^\circ} \tag{30}$$

$$1 > \frac{180\sin\theta^\circ}{\pi\theta^\circ} > \cos\theta^\circ \tag{31}$$

と修正が必要となり，$\theta^\circ \to 0$ の極限を前節と同様に取ると $\cos\theta^\circ \to 1$ なので，

$$\lim_{\theta^\circ\to 0}\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\sin\theta^\circ}{\theta^\circ} = 1 \tag{32}$$

$$\lim_{\theta^\circ\to 0}\frac{\sin\theta^\circ}{\theta^\circ} = \frac{\pi}{180} \tag{33}$$

となる．

次に，この結果を用いて三角関数の正弦の導関数を前節と同様に導出する．

$$(\sin x^\circ)' = \lim_{h^\circ\to 0}\frac{\sin(x^\circ + h^\circ) - \sin x^\circ}{h^\circ} \tag{34}$$

$$= \lim_{h^\circ\to 0}\frac{2\cos\left(x^\circ + \frac{h^\circ}{2}\right)\sin\frac{h^\circ}{2}}{h^\circ} \tag{35}$$

ここで，$\frac{h^\circ}{2} = \theta^\circ$ とおくと，$h^\circ \to 0$ のとき $\theta^\circ \to 0$ より

$$(\sin x^\circ)' = \lim_{\theta^\circ\to 0}\frac{2\cos(x^\circ + \theta^\circ)\sin\theta^\circ}{2\theta^\circ} \tag{36}$$

$$= \lim_{\theta^\circ\to 0}\cos(x^\circ + \theta^\circ)\cdot\lim_{\theta^\circ\to 0}\frac{\sin\theta^\circ}{\theta^\circ} \tag{37}$$

$$= \cos x^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \tag{38}$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos x^\circ \tag{39}$$

となり，度数法で記述された正弦の微分は，余弦で表すことができるが，$\frac{\pi}{180}$ という係数が現れる．また，余弦の導関数についても

$$(\cos x^\circ)' = \{\sin(x^\circ + 90^\circ)\}' \tag{40}$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos(x^\circ + 90^\circ)\cdot(x^\circ + 90^\circ)' \tag{41}$$

$$= -\frac{\pi}{180}\sin x^\circ \tag{42}$$

となり，こちらも $\frac{\pi}{180}$ という係数が現れる．正接の導関数についても，

$$(\tan x^\circ)' = \left(\frac{\sin x^\circ}{\cos x^\circ}\right)' \tag{43}$$

$$= \frac{(\sin x^\circ)'\cdot\cos x^\circ - \sin x^\circ\cdot(\cos x^\circ)'}{\cos^2 x^\circ} \tag{44}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{180}\cos^2 x^\circ + \frac{\pi}{180}\sin^2 x^\circ}{\cos^2 x^\circ} \tag{45}$$

$$= \frac{\pi}{180}\frac{1}{\cos^2 x^\circ} \tag{46}$$

と，$\frac{\pi}{180}$ という係数が現れる．

このように，角度の大きさを度数法で記述していると $\frac{\pi}{180}$ という係数が付き纏ってくる．これは単に計算が面倒になるというだけでなく，数学の美しさも損なわせる．弧度法で記述された正弦，余弦は 4 回微分することで元の関数に戻る．しかしながら，度数法で記述された正弦，余弦を 4 回微分すると，元の関数に戻りはするが $(\frac{\pi}{180})^4$ という係数がつく．実に美しくない．さらに，高校の数学の範囲を超えてしまうが，テイラー展開などのべき級数展開を考えると，この $\frac{\pi}{180}$ は邪魔者でしかない．また，最も美しいと言われるオイラーの等式 $e^{i\pi} = -1$ も弧度法あっての賜物である．度数法と弧度法で計算結果に違いが出る計算については，どちらも計算し，比較することで，誰もが弧度法の美しさ，便利さを理解してくれるのではないだろうか．そうすることで「なぜ弧度法を使うかわからない」「度数法で何の問題もないのではないか」という学生も少なくなると考える．

4. おわりに

高校数学で弧度法が導入されるが，その意義を理解し，受け入れている学生が少ないことから，本論文では，弧度法の受け入れ促進のための弧度法と三角関数の導関数の導入法についての提案を行なった．角度の大きさを度数法で記述しているのか弧度法で記述しているのかで結果が違うものについては，どちらも計算を行い，その違いを積極的に示すべきである．度数法で記述されているものにおいては，各所に $\frac{\pi}{180}$ という係数が付き纏ってくる．これは計算が面倒であることはもちろんのこと，正弦関数，余弦関数を 4 回微分しても元に戻らないことから，数学的な美しさも損なわれている．このことがわかれば，学生たちも弧度法の存在意義を理解し，受け入れてくれると考えている．

今後の課題は，本提案を実践し，弧度法を受け入れてもらえるかの確認を行うことである．

謝辞

本論文を作成するにあたり御助言いただいた鹿児島第一高等学校 山口太一先生に深く感謝する．

参考文献

[1] 俣野博・河野俊丈, ほか 27 名, “ 新編数学Ⅱ ”, 東京書籍 株式会社, 平成 28 年 2 月発行

[2] 俣野博・河野俊丈, ほか 27 名, “ 新編数学Ⅲ ”, 東京書籍 株式会社, 平成 28 年 2 月発行