

弱いマッハ反射に関する研究

灘光陽*1・本田隆志*1

A study of Weak Mach Reflections

You Nadamitsu and Takashi Honda

For the Mach reflection from a wedge of weak plane shock waves, a method to estimate the shapes and strength of Mach shocks are described in this paper. It is achieved by combining Whitham's theory and Lighthill's ones. The result obtained by present method are compared with other authors ones.

Key words; Compressible Flow, Shock Waves, Weak Mach Reflection, Ray Shock Theory

1. 緒言

静止気体中を伝ばする平面衝撃波が直線傾斜壁(以下斜壁と略す)と干渉する際の反射形態は、入射衝撃波マッハ数と斜壁の角度および気体の熱力学的物性によって、通常、正常反射とマッハ反射(単純マッハ反射、複合マッハ反射、二重マッハ反射)に分けられる。これらの反射形態のうち単純マッハ反射領域で弱いマッハ反射の場合は、マッハ衝撃波が斜壁頂点の方へ穏やかに湾曲し⁽¹⁾⁽²⁾マッハ衝撃波および三重点近傍の流れは非一様流で、衝撃波のマッハ反射に関する三衝撃波理論は実験結果を十分に説明できない。そこで前報⁽⁷⁾では、弱いマッハ反射のマッハ衝撃波形状をWhithamによるray shock理論⁽³⁾⁽⁴⁾を用いて計算する方法を提案した。

本報では前報⁽⁷⁾で仮定した θ と η の関係をLighthillによる線形理論⁽⁵⁾により算出し、計算結果をマッハ衝撃波に関するDeweyら⁽²⁾⁽⁶⁾による実験および解析結果と比較検討した。

2. 理論

2-1 Ray Shock 理論

Whithamによれば、図1(a),(b)に示すように衝撃

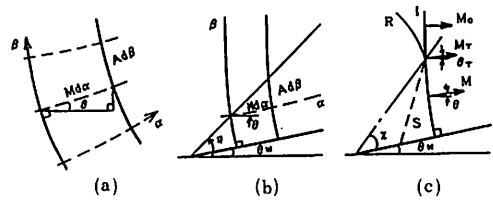


図1 $\alpha - \beta$ 座標系および流れ場

波を β 、衝撃波に直交する座標を α とする直交曲線座標に対し各座標の曲線方向の線要素として $Md\alpha$ 、 $Ad\beta$ をとると幾何学的関係により(1)式が得られ、衝撃波が斜壁頂点に衝突後の任意の時間での衝撃波の位置は(2)、(3)式で与えられる(詳細は文献(4)参照)。また β の増加する方向に動く単一波の場合rayの角度 θ と M の関係は(4)式で示される。

ここに U_0 、 M_0 、 γ はそれぞれ入射衝撃波の速度とマッハ数および気体の比熱比を示し、 $K(M)$ はchesterによる単調減少関数である。

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{d\eta} = \tan(\eta - \theta) \frac{d\theta}{d\eta} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{x}{U_{0t}} = \frac{M}{(\cos\theta + \sin\theta \tan\eta) M_0} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{y}{U_{0t}} = \frac{x}{U_{0t}} \tan\eta \dots\dots\dots (3)$$

$$M = M_0 \left[\cosh \left\{ K(M_0)/2 \right\}^{1/2} \theta + (1 - 1/M_0^2)^{1/2} \times \sinh \left\{ K(M_0)/2 \right\}^{1/2} \theta \right] \dots\dots\dots (4)$$

* 本研究の一部は日本機械学会九州支部宮崎地方講演会において講演。

*1 機械工学科

$$K(M) = 2 \left[\left\{ 1 + (1 - \mu^2) / (\gamma + 1) \mu \right\} (2\mu + 1 + M^{-2}) \right]^{-1}$$

$$\mu^2 = \left\{ (\gamma + 1) M^2 + 2 \right\} / \left\{ 2\gamma M^2 - (\gamma - 1) \right\}$$

2-2 Lighthillによる線形理論の適用

Lighthill⁽⁵⁾によれば、完全気体非定常二次元非粘性の流れを支配する基礎方程式に対し、入射衝撃波が斜壁頂点に衝突後の衝撃波背後の諸物理量の変化が微小であると仮定し、次の変換を用いると図2(a)における(x, y)座標の衝撃波の境界x=kは図2(b)の(ρ, φ)座標における半径{(1/k)²-1}^{1/2}の円2ρcosφ=k(1-ρ²)の円弧になる。

$$x = (X - U_1 t) / a_1 t, \quad y = Y / a_1 t$$

$$\kappa = \left[\left\{ (\gamma - 1) M_0^2 + 2 \right\} / \left\{ 2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1) \right\} \right]^{1/2}$$

$$k' = (1 - k^2)^{1/2}$$

$$\rho = \left[1 - (1 - r^2)^{1/2} \right] / r$$

ここにX, Yは斜壁頂点を原点とした座標で、x, yは斜壁頂点で生じた擾乱の伝播の中心を原点とした座標である。またU₁, a₁はそれぞれ入射衝撃波背後の速度と音速を示す。そして(ρ, φ)座標で円弧ABはマッハ衝撃波境界、BCは弱い反射衝撃波に対応し、A点、C点は衝撃波とx軸の交点を表わし、B点は入射衝撃波、マッハ衝撃波、反射衝撃波の交点を示す。次に(ρ, φ)座標のC点をi, A点を1, k+ik'を無限になるような一般的な次の一次変換を施せば、マッハ衝撃波境界ABは図2(c)の実軸上に写される。

$$Z = i \left\{ (k + ik') \zeta - 1 \right\} / \left\{ \zeta - (k + ik') \right\}$$

$$\zeta = \rho e^{i\phi}$$

さらにZ₁=(Z²+Z⁻²)/2を用いることにより、壁面およびρ=1の弱い反射衝撃波が実軸上に写される(詳細は文献(5)参照)。そして次の関係を用いればdθ/dηは(5)式で与えられる。

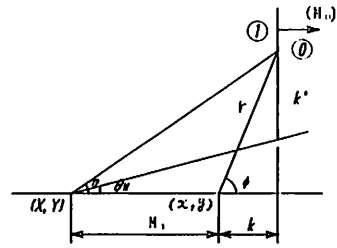
$$x_1 = (k' + y^2) / (k' - y^2)$$

$$y = k \tan \phi = (M_1 + k) \tan \eta$$

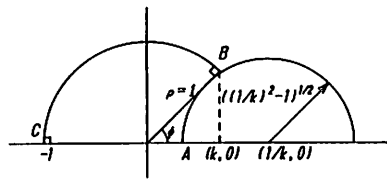
$$\frac{d\theta}{d\eta} = 2\sqrt{2} C_0 C_1 C_2 C_3 (C_4 + C_5) \theta_w (C_0^2 - \tan^2 \eta)^{1/2} /$$

$$\left[(M_1 + k) \cos^2 \eta \left\{ C_0^2 C_1^2 + (2 - C_1^2) \tan^2 \eta \right\} \times \right.$$

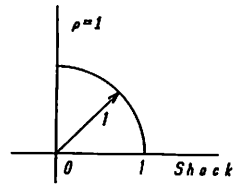
$$\left. \left\{ C_0^2 C_2^2 + (2 - C_2^2) \tan^2 \eta \right\} \right] \dots \dots \dots (5)$$



(a) (x, y座標)



(b) (ρ, φ座標)



(c) (Z平面)



(d) (Z₁平面)

図2 各平面における衝撃波

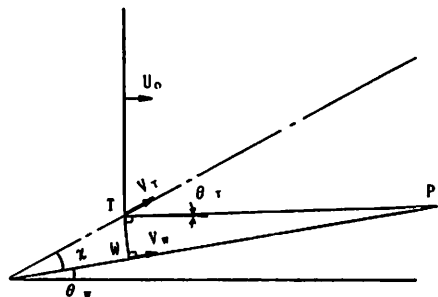


図3 マッハ衝撃波形状を円弧とした場合の流れ場

ただし

$$C_0 = \tan(\chi + \theta_w), \quad C_1 = (\gamma + 1)(M_0^2 - 1) / \{2(\gamma - 1)M_0^2 + 4\}$$

$$C_2 = \left\{ C_4 + (1 - C_0)^{1/2} \right\} \left\{ C_5 + (1 - C_0)^{1/2} \right\} |1 - C_0^2|^{1/2} M_1 / \left\{ \pi |1 - M_1^2|^{1/2} \right\}$$

$$C_4 C_5 = 2M_0^2, \quad C_4 + C_5 = 2\sqrt{2}M_0^2 k$$

$$C_6 = - \left\{ (M_1^2 - 1)(1 - k^2) + (M_1 + k)^2 \right\} / (M_1 k + 1)^2$$

$$M_1 = 2(M_0^2 - 1) / \left\{ [2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1)] \left\{ (\gamma - 1)M_0^2 + 2 \right\} \right\}^{1/2}$$

$$\chi = \tan^{-1} \left\{ (1 - k^2)^{1/2} / (M_1 + k) \right\} - \theta_w \dots \dots (6)$$

ここに C_0 から C_6 は M_0 と θ_w (斜壁の角度) によって定まる定数である。ただし C_3 は三重点および斜壁上でのマッハ衝撃波の向きと直角座標とのなす角によって定まる定数とする。また三重点の軌跡角 χ の値は(6)式から求まり、本報で議論する θ_w と M_0 の範囲での χ の値の妥当性は文献(7)で示した。

2-3 マッハ衝撃波形状を円弧とした場合

Dewey ら⁽⁶⁾によって弱いマッハ反射のマッハ衝撃波に関して、実験結果からその形状を多項関数の代りに円弧を用いて適合させる研究がなされている。そして図3に示すように斜壁面上に円の中心(図3点P)をもつ場合のマッハ衝撃波足の速度 V_w を(7)式で与えている。

$$V_w = U_0 \left\{ \sin(\chi + \theta_w - \theta_T) - \sin\chi \right\} / \left\{ \cos(\chi + \theta_w) \sin(\theta_w - \theta_T) \right\} \dots \dots (7)$$

ここに θ_T は三重点でのマッハ衝撃波の向きと直角座標とのなす角であり、図3内の一点鎖線は三重点の軌跡を示す。

3 計算結果と考察

マッハ衝撃波は斜壁面上で垂直であると仮定し、 $\theta_T = 0$ とした場合の計算結果を示す。図4は θ と η の分布を示す。図中の実線は(1), (5)式を用いた結果であり、破線は前述のマッハ衝撃波形状を円弧とし、円の中心位置を斜壁面上とした場合の結果である。また一点鎖線は(1)式に対し $d\theta/d\eta$ を一定とした場合である。(文献(7))。同図から M_0 が1に近い場合、実線と破線では $d\theta/d\eta$ の傾向が異なる。しかし破線と一点鎖線はほぼ一致していることがわかる。そして破線はいずれの

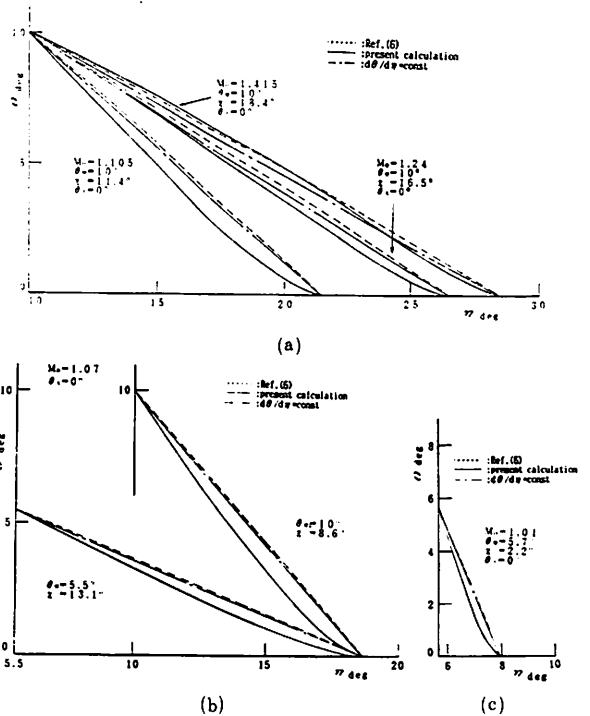


図4 $\theta-\eta$ 分布図

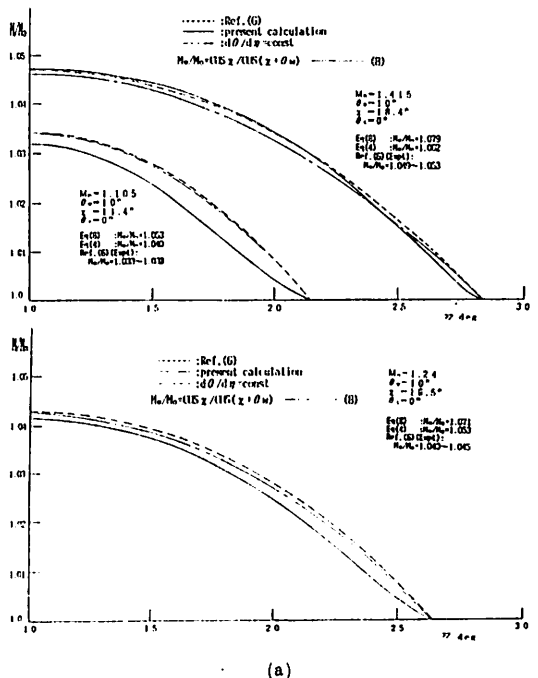


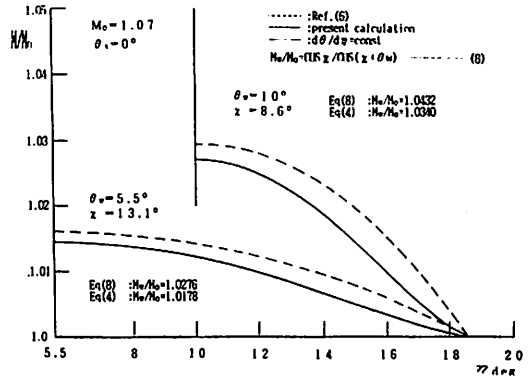
図5 マッハ衝撃波のマッハ数比

M_0 に対しても三重点で $d\theta/d\eta$ は最大で、斜壁面上で最小となっている。実線の場合、いずれの M_0 に対しても $d\theta/d\eta$ の最小は三重点であるが、 $d\theta/d\eta$ が最大となる位置は M_0 によって異なっている。そして $M_0=1.415$ では三重点近傍を除いて実線と破線の $d\theta/d\eta$ の傾向は一致する。

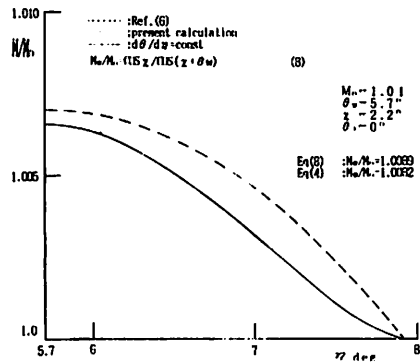
次に図5は η に対するマッハ衝撃波マッハ数 M と M_0 の比を示す。マッハ衝撃波を直線とした場合マッハ衝撃波のマッハ数は図中の(8)式で表わされる。計算結果はいずれのマッハ数に対しても(8)式よりも(4)式が低い値を示し、破線、一点鎖線、実線の斜壁での M はさらに低い値を示している。そしてマッハ衝撃波のマッハ数は、三重点から斜壁に向かって増加することがわかる。また図中の一点鎖線は低い M_0 に対し破線とほぼ一致し、 $M_0=1.24$ では破線と実線の間にあり、 $M_0=1.415$ では三重点近傍を除いて破線・実線より低い値を示している。そしてこの M_0 では実線と破線がほぼ一致していることがわかる。表1は各 M_0 に対する実線・破線・一点鎖線の斜壁面上でのマッハ衝撃波マッハ数比 M_w/M_0 を示す。文献(6)による実験結果と比較すると、 $M_0=1.105$ で破線、一点鎖線は実験結果の範囲内であるが、実線はわずかに低い。そして $M_0=1.24$ では、いずれの場合も実験結果の範囲内である。しかしながら $M_0=1.415$ では、いずれの場合も実験値よりわずかに低い値を示している。

次に図6は文献(2)による反射面からの距離に対するマッハ衝撃波の強さの変化の実験結果に計算値を加えた図である。エラーバーは文献の図から直接読み取った値の一部(三重点近傍は除いている)であり多少の誤差が含まれる。また二重の線は入射衝撃波を示している。この図から、いずれの計算結果も実験結果に対して大きな逸脱はないものと思われる。しかしながら文献(2)の実験結果によれば、表1に示すように θ_r は必ずしも0ではなく、また、斜壁面上でマッハ衝撃波は垂直でなくわずかに傾きを持っていると報告されている。これらを考慮した計算を今後検討したい。

次に図7は計算によるマッハ衝撃波の位置を示す。 $M_0=1.105, 1.24$ の一点鎖線は実線と破線の間に位置するが省略した。また $M_0=1.01$ は無次元値 X/U_{ot} , Y/U_{ot} のスケールを変えて表示している。図中の二点鎖線はマッハ衝撃波を直線と仮定した場合を示す。同図から低い M_0 で破線と一点鎖線はほぼ一致し、実線よりも前方に位置することがわかる。しかしながら $M_0=1.415$ では破線と実線がほぼ一致し、一点鎖線は



(b)



(c)

図5 マッハ衝撃波のマッハ数比

表1 斜壁面上のマッハ衝撃波マッハ数比

M_0	M_w/M_0			Ref (2)	
	—	- - -	- · -	θ_r	$z + \theta_w$
1.105	1.0318	1.0343	1.0340	$0.0 \pm 0.6^\circ$	$21.95 \pm 0.13^\circ$
1.24	1.0416	1.0435	1.0420	$1.2 \pm 0.3^\circ$	$27 \pm 0.09^\circ$
1.415	1.0472	1.0472	1.0462	$2.3 \pm 0.5^\circ$	$28.98 \pm 0.11^\circ$

$M_w/M_0 (M_0=1.07)$		$M_w/M_0 (M_0=1.01)$	
	$\theta_w=10^\circ$	$\theta_w=5.5^\circ$	$\theta_w=5.7^\circ$
—	1.0273	1.0146	1.0065
- - -	1.0294	1.0162	1.0069
- · -	1.0293	1.0160	1.0069

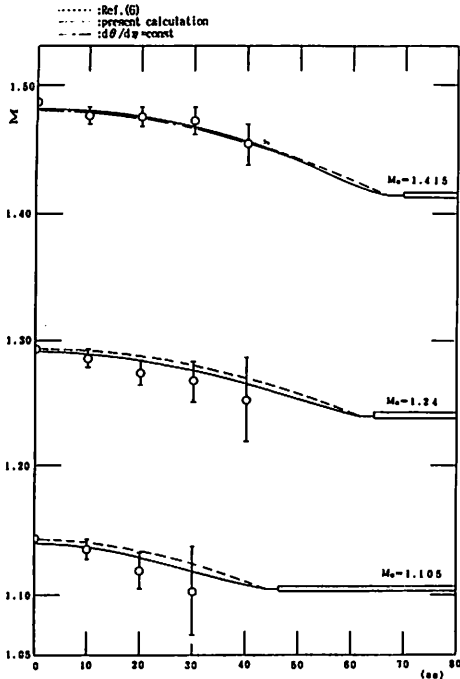


図6 反射面からの距離に対するマッハ衝撃波強さの変化 (計算値とRef.2)の比較

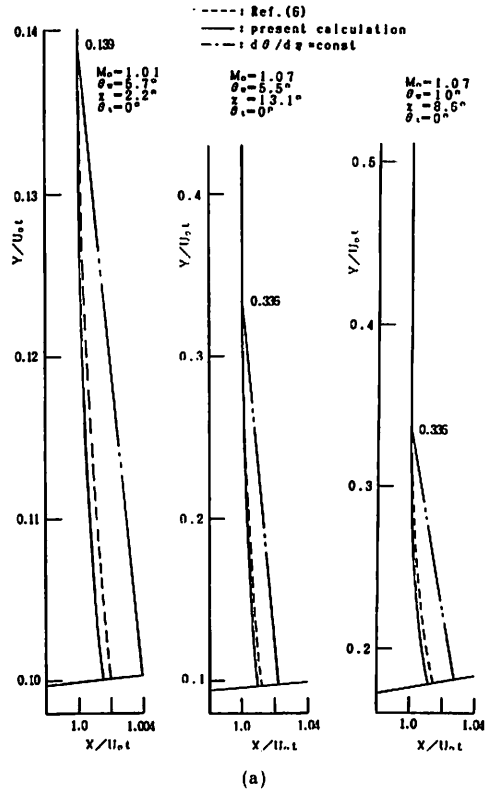


表2 斜壁面上のマッハ衝撃波の位置

$M_0=1.01 \quad \theta_w=5.7^\circ$	$M_0=1.07 \quad \theta_w=5.5^\circ$	$M_0=1.07 \quad \theta_w=10^\circ$
X_w/U_0t	X_w/U_0t	X_w/U_0t
----- : 1.0020	----- : 1.0115	----- : 1.0138
----- : 1.0016	----- : 1.0098	----- : 1.0116
----- : 1.0020	----- : 1.0113	----- : 1.0137
----- : 1.0039	----- : 1.0229	----- : 1.0274

$M_0=1.105 \quad \theta_w=10^\circ$	$M_0=1.24 \quad \theta_w=10^\circ$	$M_0=1.415 \quad \theta_w=10^\circ$
X_w/U_0t	X_w/U_0t	X_w/U_0t
----- : 1.0186	----- : 1.0277	----- : 1.0313
----- : 1.0161	----- : 1.0258	----- : 1.0313
----- : 1.0183	----- : 1.0269	----- : 1.0303
----- : 1.0369	----- : 1.0549	----- : 1.0622
Ref. (6) (Expt) : 1.0196	Ref. (6) (Expt) : 1.0269	Ref. (6) (Expt) : 1.0349

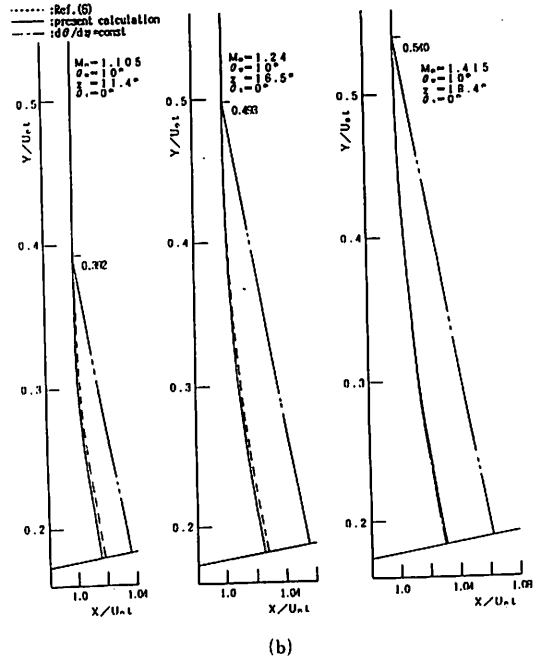


図7 マッハ衝撃波の位置

わずかに後方に位置する。次に表2は斜壁面上のマッハ衝撃波の位置を示す。表中の $M_0 = 1.105, 1.24, 1.415$ のRef.(6)(EXPT)に対する位置の値はRef.(6)に示されている M_0 の値から算出した。同表から二点鎖線と実験結果による値(Ref.(6)(EXPT))の差は大きい、実線・破線・一点鎖線と実験結果による値の差は小さいことがわかる。したがって弱いマッハ反射の場合、マッハ衝撃波を直線と仮定すると、斜壁に近づく程実験結果からの逸脱は大きくなると言える。

次に図8は文献(2)によるマッハ衝撃波形状と本報(1), (5)式を用いた計算値の比較を示している。なお実線は文献から直接トレースしている。そして図中の白い記号が計算値で X_0 は斜壁頂点から入射衝撃波までの距離を示し、 X_w は表2から得られる値である。同図から計算値は実験結果よりわずかに後方に位置するが、その形状に大きな差はないと思われる。

4. 結言

Whitham による ray shock 理論と Lighthill による線形理論を用いた弱いマッハ反射のマッハ衝撃波に関する計算によって次の結果が得られた。

- (1) 本論文の計算内において、マッハ衝撃波強さの計算値は Dewey らによる実験結果と比較的良く一致する。
- (2) 実験結果(Ref.(2))によるマッハ衝撃波形状と計算値の比較に対して大きな差は見られない。
- (3) 3つの計算方法(①本報で提案② $d\theta/d\eta = \text{const}$ と仮定した前報③Dewey らによるマッハ衝撃波を円弧とした場合)の比較において、低い M_0 では②と③がほぼ一致し、高い M_0 では①と③が比較的一致することが分かった。

参考文献

- 1) 平原・他2名, 弱いマッハ反射に対する三衝撃波理論の検討, 機論, 54, (1988), P3325~3330
- 2) Dewey, J. M. and Mcmillin, D. J., Observation and analysis of the Mach reflection of weak uniform plane shock waves. Part 1. Observation, Journal of Fluid Mechanics., 152, (1985), P49~66
- 3) Whitham, G. B., A new approach to problems of shock dynamics Part 1 Two-dimensional problems., Journal of Fluid Mechanics., 2, (1957), P145~171

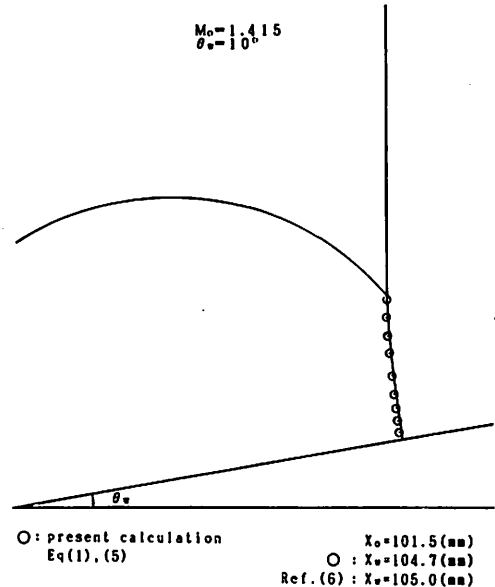


図8 実験結果(Ref.(2))によるマッハ衝撃波形状と計算値の比較

- 4) Whitham, G. B., A new approach to problems of shock dynamics Part 2 Three-dimensional problems., Journal of Fluid Mechanics., 5, (1959), P369~386
- 5) Lighthill, M. J., The diffraction of blast. I., Proceeding of the Royal Society of London Sec.A., 198, (1949), P454~470
- 6) Dewey, J. M. and Mcmillin, D.J., Observation and analysis of the Mach reflection of weak uniform plane shock waves. Part 2. Analysis, Journal of Fluid Mechanics., 152, (1985) P67~81
- 7) 灘光・本田., 衝撃波のマッハ反射について., 日本機械学会講演概要集, NO898-2, (1989), P61