

# 弱いマッハ反射に関する研究

灘光 陽\*・本田 隆志\*

## Investigations of Weak Mach Reflections

You NADAMITSU and Takashi HONDA

In this paper, the ray shock theory for weak Mach reflections at a wedge is examined to estimate the shape of a Mach shock. The result by the present analysis lead to good agreement with a experimental result of other authors.

In addition, the shape of the curved Mach shock could be observed by numerical experiments using a finite-difference approach. The Numerical results show that the shape of a Mach shock change with the Mach number of the incident shock wave and the corner wedge angle.

Key Words ; Compressible Flow, Unsteady Flow, Shock Wave, Mach Reflection, Ray Shock Theory, Numerical Analysis, Finite-Difference Method.

### 1. ま え が き

静止気体中を伝ばする平面衝撃波が直線傾斜壁（以下斜壁と略す）と干渉する際の反射形態は、入射衝撃波マッハ数、斜壁の角度および気体の熱力学的物性によって、通常、正常反射とマッハ反射（単純マッハ反射、複合マッハ反射、二重マッハ反射）に分けられ、従来から多くの理論的、実験的研究がなされている<sup>1)・2)・3)・4)</sup>。特に斜壁に入射する衝撃波が弱い場合のマッハ反射は斜め衝撃波の反射に関する理論と実験結果が合わず Von Neumann のパラドックスと呼ばれている。この場合、マッハ衝撃波が斜壁頂点の方へ緩やかに湾曲<sup>5)・6)</sup>し、マッハ衝撃波および三重点近傍の流れは非一様流である。したがって、マッハ衝撃波の曲がりを無視してはマッハ衝撃波の強さやマッハ衝撃波背後の諸物理量の正しい見積りはできない。特に入射衝撃波マッハ数および斜壁の角度が非常に小さい場合には反射衝撃波が非常に弱く、実験結果の写真から三重点の位置を特定することもむつかしいとされている。またこの場合の理論的取り扱い、従来の三衝撃波理

論<sup>7)・8)</sup>が三重点を一点に集中させ、マッハ衝撃波を直線と仮定して解析するために実験結果と合わず、最近の研究として、三衝撃波理論に対する仮定の再検討<sup>9)</sup>も行なわれている。しかしながら、実験結果を十分に説明できる理論は未だ見当らない。そこで本報では、弱いマッハ反射のマッハ衝撃波の形状を Whitham<sup>10)・11)</sup>による Ray Shock 理論を用いて計算し、結果の検討を行なった。また差分法を用いて、弱いマッハ反射の数値実験を行ない、入射衝撃波マッハ数および斜壁の角度の変化に対するマッハ衝撃波形状の変化について検討を加えた。

### 記号

A	: Ray の面積	下添字
a	: 音速	0 : 入射衝撃波あるいは静止気体に関する値
E	: 全エネルギー	1 : 入射衝撃波背後の値
e	: 比内部エネルギー	b : 後退
L	: 代表長さ	f : 前進
M	: マッハ数	i : ξ方向の格子番号
P	: 静圧	j : η方向の格子番号
t	: 時間	s : 入射衝撃波に関する値
U	: 衝撃波の速度	
u,v	: 直角座標速度成分	

\*機械工学科

- x, y : 直角座標
- ρ : 密度
- γ : 比熱比
- χ : 三重点軌跡と斜壁のなす角
- α, β : 衝撃波と Ray のつくる座標
- θ : Ray と直角座標とのなす角
- w : 斜壁面に関する値
- n : 時間増分の数
- : 平均値
- \* : 無次元化

$$\frac{dA}{A} = \frac{-2MdM}{(M^2 - 1)K(M)} \quad \text{---(3)}$$

ここで K(M) は単調減少関数で次式によって与えられる。

$$K(M) = 2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right) (2\mu + 1 + M^{-2}) \right]^{-1}$$

$$\mu^2 = \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)} \quad \text{---(4)}$$

また(3)式の積分形は Chisnell<sup>13)</sup> によってなされ次式で与えられる。

$$A \cdot f(Z) = \text{const} \quad Z = \frac{P_1}{P_0}$$

$$f(z) = z^{\frac{1}{\gamma}} (z-1) \left( z + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\left\{ \frac{1 + \left| 1 + \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)Z} \right|^{\frac{1}{2}}}{1 - \left| 1 + \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)Z} \right|^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

$$\left\{ \frac{\left| 1 + \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)Z} \right|^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left| 1 + \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)Z} \right|^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \times$$

$$\exp \left( \left( \frac{2}{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{2}} \tan^{-1} \left| \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\gamma Z}{Z + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \right) \quad \text{---(5)}$$

なおその他の記号は本文中で説明する。

## 2. 理 論

### 2.1 三重点軌跡角

衝撃波の反射形態が時間に対し相似形を保って変化する準定常流れでは、三重点の軌跡は直線となる。入射衝撃波の一般の強さに対する三重点軌跡角は、前述の三衝撃波理論および Ray Shock 理論によって求められる。三衝撃波理論は文献(8)に詳細に記述されているので、ここでは Ray Shock 理論および Acoustic 理論について述べる。

(Ray Shock 理論)

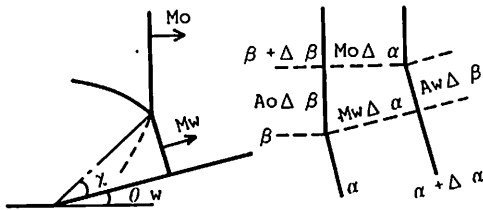


図1 斜壁のモデル

Ray Shock 理論による三重点軌跡角は、マッハ衝撃波が斜壁面に垂直で直線であると仮定すると、図1の幾何学的関係により次式で与えられる。

$$\tan \chi = \frac{Aw}{Ao} \left\{ \frac{1 - (Mo/Mw)^2}{1 - (Aw/Ao)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{---(1)}$$

さらに斜壁の角度とマッハ数の関係は次式で与えられる。

$$\cot \theta_w = \frac{Mo}{Mw} \frac{1 + AwMw/AoMo}{\{(1 - Mo^2/Mw^2)(1 - Aw^2/Ao^2)\}^{\frac{1}{2}}} \quad \text{---(2)}$$

(1)式内の A と M の関係 A(M) は Chester<sup>12)</sup> によって最初見い出され、Ray の面積の微小変化 dA と M の変化の関係として次式で与えられる。

また、強い衝撃波に対し、Milton<sup>14)</sup> は Whitham<sup>15)</sup> による特性形の運動方程式に修正項を加え、A(M)関係の修正を行なった次式を与えている。

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{2M}{(M^2 - 1)K(M)} + \frac{\eta}{M} \right\} dM \quad \text{---(6)}$$

ここで

$$\eta = \frac{1}{2\gamma} \left\{ \left| \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \right|^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} \left\{ 1 - \frac{Mo^2}{M^2} \right\} + \frac{1}{2} \ln \frac{Ao}{A}$$

(1)~(4)式から、与えられた Mo, θ<sub>w</sub> に対する χ の値が求められる。しかしながら、これらの式および三衝撃波理論からの三重点軌跡角は、マッハ衝撃波を直線と仮定しているために弱いマッハ反射に対して、後述のように実験値と大きく異なる。そこで θ<sub>w</sub> および Mo が小さい場合には次の理論を用いる。

(Acoustic 理論)

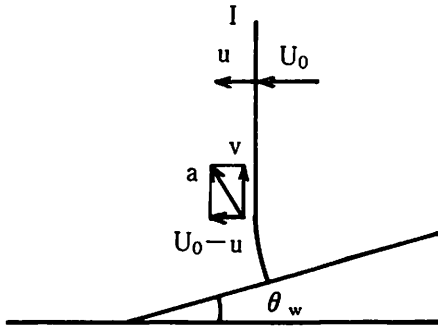


図2 Acoustic モデル

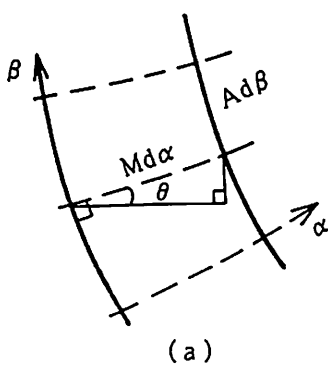
入射衝撃波マッハ数および斜壁の角度が非常に小さい場合の三重点軌跡角は、図2に示すように衝撃波静止座標系で斜壁の頂点で生じた擾乱が、入射衝撃波上を伝ばする速度で求まるとすると次式から得られる<sup>10)</sup>。

$$\tan(\chi + \theta_w) = \frac{\left\{ \frac{|\gamma - 1| Mo^2 + 2}{|\gamma + 1| Mo^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}{Mo} \quad (7)$$

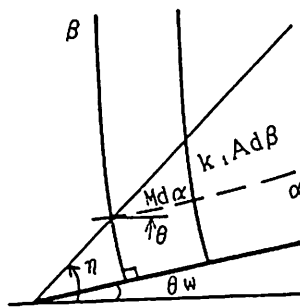
2.2 マッハ衝撃波の形状

Whitham<sup>11)</sup>による円錐の場合と同じ解析方法で図3(a)に示すように衝撃波を $\beta$ 、衝撃波に直交する座標を $\alpha$ とする直交曲線座標系に対し、各座標の曲線方向に線要素として、 $Md\alpha$ 、 $Ad\beta$ をとると(8)式が成り立ち(9)式の関係が得られる。

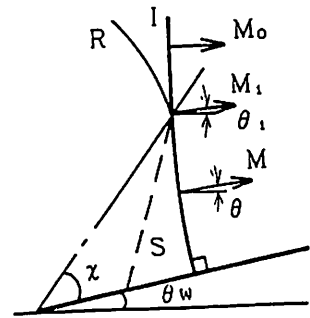
$$|\nabla\alpha| = 1/M, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{M}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\sin\theta}{M} \quad (8)$$



(a)



(b)



(c)

図3  $\alpha - \beta$ 座標系及び流れ場

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sin\theta}{M} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\cos\theta}{M} \right) = 0 \quad (9)$$

(9)式に対し、次の $\eta$ の関係を導入するとマッハ衝撃波のマッハ数の関係(10)式が得られる。

$$\eta = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{d\eta} = \tan(\eta - \theta) \frac{d\theta}{d\eta} \quad (10)$$

また図3(b)の任意の $\eta$ に対し、線要素として $Md\alpha$ 、 $k_1 Ad\beta$ をとると幾何学的関係により次式が得られる。

$$\tan\eta = \frac{k_1 Ad\beta/d\alpha + M \tan\theta}{M - k_1 Ad\beta/d\alpha \tan\theta}$$

$$k_1 A \frac{d\beta}{d\alpha} = M \tan(\eta - \theta) \quad (11)$$

ここで

$$A \frac{d\beta}{d\alpha} = \{ \mu(M^2 - 1)/2 \}^{\frac{1}{2}}$$

図3(c)に示すように、三重点でのRayと直角座標とのなす角を $\theta_1$ とすると(11)式は $\theta = \theta_1$ で $\eta = (\chi + \theta_w)$ 、 $\theta = \theta_w$ で $\eta = \theta_w$ であり、 $k_1$ はこの条件を満足するように与える。本報では次の3種類の $k_1$ に対する計算を行なった。

①  $k_1 = \tan[11 + (\theta_w - \theta_1)/\chi] \{ \eta - \theta_w \} \cdot (\mu/2)^{\frac{1}{2}} M / (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

②  $k_1 = a\eta + b$

③  $k_1 = a\eta^2 + b\eta + C$

①~③と(11)式による $d\theta/d\eta$ は次式となる。

①'  $\frac{d\theta}{d\eta} = \text{const}$

$$\textcircled{2}' \quad \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1+Z^2 - (\mu/2)^{1/2} \cdot (1-1/M^2)^{1/2} \cdot a}{1+Z^2 + (\mu/2) \cdot (k_1/M)^2}$$

$$\textcircled{3}' \quad \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1+Z^2 - (\mu/2)^{1/2} \cdot (1-1/M^2)^{1/2} \cdot (2a\eta + b)}{1+Z^2 + (\mu/2) \cdot (k_1/M)^2}$$

ここで

$$Z = k_1 (\mu/2)^{1/2} \cdot (1-1/M^2)^{1/2}$$

②', ③'内の係数a,b,cは次の条件から求まる。

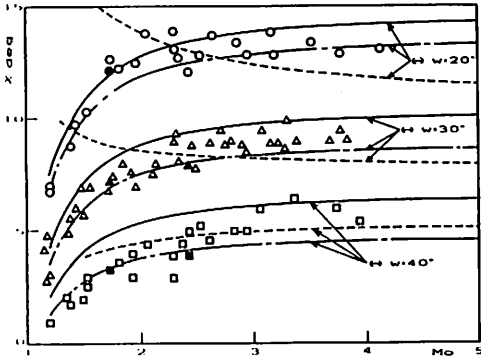
- $\eta = \chi + \theta_w : M = M_1, k_1 = (2/\mu)^{1/2} \tan(\chi + \theta_w - \theta_1) / (1-1/M_1^2)^{1/2}$

$M_1$  は  $\theta = \theta_1$  でのマッハ衝撃波のマッハ数

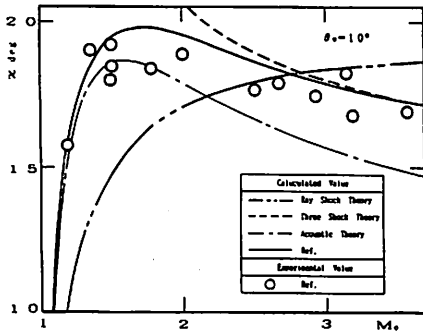
- $\eta = \theta_w : k_1 = 0$
- $\eta = \theta_w : \frac{d\theta}{d\eta} = 0$  ( $k_1 = a\eta^2 + b\eta + c$ の場合)

次に衝撃波が斜壁頂点に衝突した後の任意の時間での衝撃波の位置は文献(1)と同様に次式で与えられる。

$$\alpha = \alpha_{ot} = \frac{\chi(\eta)}{M_0}$$



(a)



(b)

図4 三重点軌跡角

$$f(\eta) = \frac{\cos \theta + \sin \theta \tan \eta}{M/M_0}$$

$$\frac{x}{U_{ot}} = \frac{M/M_0}{\cos \theta + \sin \theta \tan \eta} \quad \text{---(12)}$$

$$\frac{y}{U_{ot}} = \frac{M/M_0 \tan \eta}{\cos \theta + \sin \theta \tan \eta} \quad \text{---(13)}$$

### 3. 計算結果 (理論値)

図4は試料気体空気における三重点軌跡角の理論値と実験値の比較を示す。(a)は $\theta_w = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$  (実験値文献(1), 黒印はSmithの実験点)の場合である。三衝撃波理論は $M_0 = 2 \sim 3$ を除き実験値と異なる。特に低い $M_0$ ではその傾向が実験値と大きく異なる。一方, Ray Shock理論は $\theta_w = 20^\circ \sim 40^\circ$ において実験値の傾向とよく一致し, 反射衝撃波を考慮したMiltonの方法は $\theta_w$ および $M_0$ が大きな領域では実験との不一致が見られる。しかしながら, 実験値はRay Shock理論とMiltonの方法による計算値の間に多く分布する。一方(b)は $\theta_w = 10^\circ$ の場合で, 実験値は文献(9)による値である。この角度で $M_0$ が低い領域ではマッハ衝撃波の曲がりのために, 三衝撃波理論および

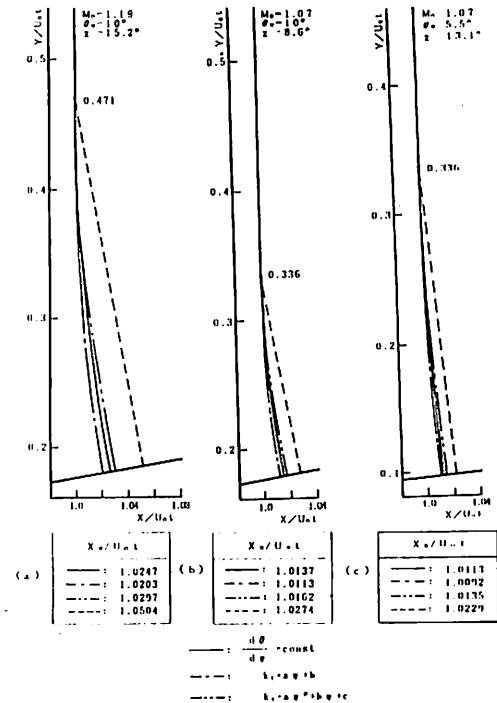


図5 マッハ衝撃波形状

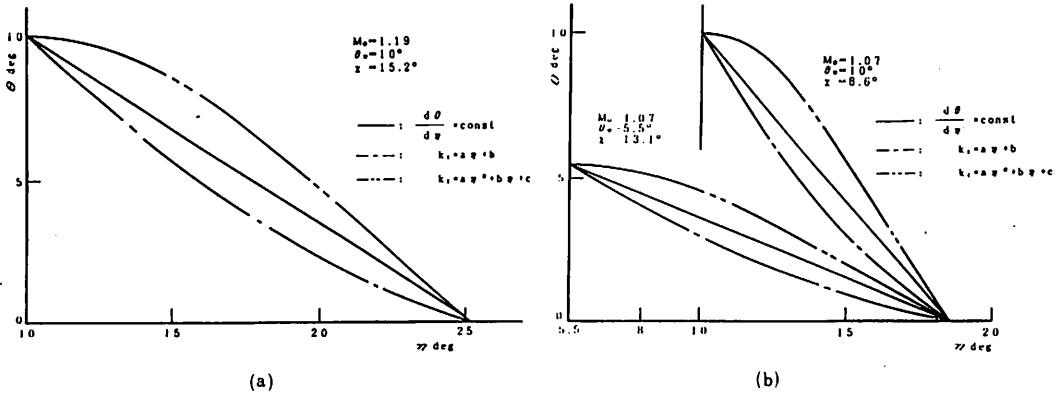


図6  $\theta - \gamma$  分布図

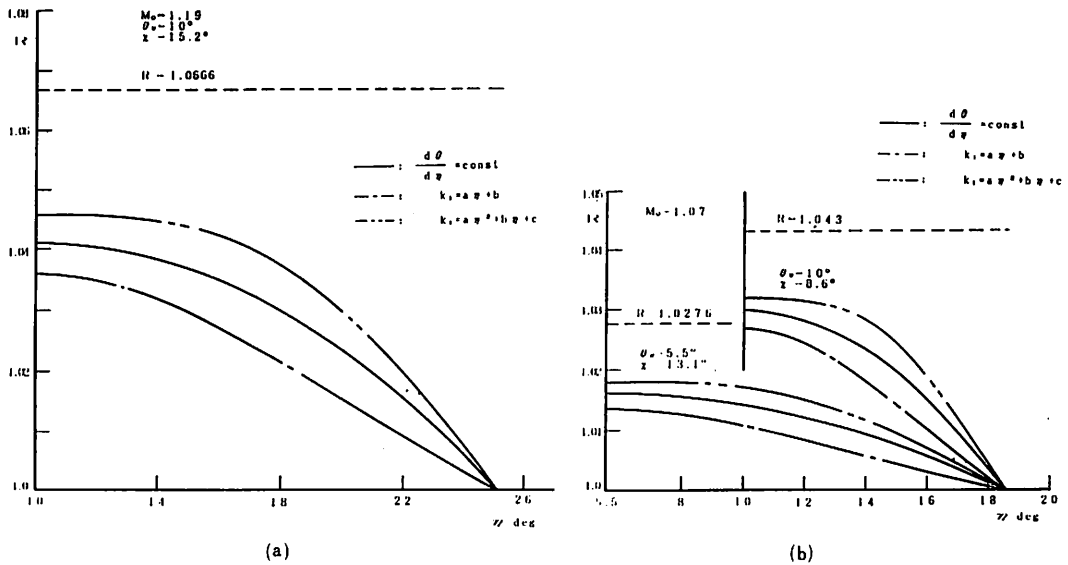


図7 マッハ衝撃波のマッハ数比

Ray Shock 理論は実験値と合わず, Acoustic 理論および平原ら<sup>9)</sup>によって最近提案された方法(図中の実線)が実験値とよく一致する。次に図5はマッハ衝撃波形状の計算値を示す。図中の実線は  $d\theta/d\gamma$  を一定とした場合, 一点鎖線は  $k_1$  を一次式とした場合, 二点鎖線は  $k_1$  を二次式とした場合で, 破線はマッハ衝撃波が直線とした場合である。また図中の  $X_w$  は斜壁頂点からマッハ衝撃波と斜壁の交点までの距離である。(a)は  $Mo = 1.19$ ,  $\theta_w = 10^\circ$ , (b), (c)は  $Mo = 1.07$  で  $\theta_w$  がそれぞれ  $10^\circ$  と  $5.5^\circ$  の場合である。なお本報では  $\theta_1 = 0$  とし,  $\chi$  は(7)式から求めた。同図より本計算によるマッハ衝撃波の形状は緩やかに湾曲し, 本計算

とマッハ衝撃波が直線とした場合の位置の差は斜壁面に近いほど大きい。またいずれの  $\theta_w, Mo$  に対しても, マッハ衝撃波の伝達距離は  $k_1$  一次式,  $d\theta/d\gamma = \text{const}$ ,  $k_1$  二次式の順で大きくなる。また文献(9)によるシャドウグラフ写真からの  $Mo = 1.19$ ,  $\theta_w = 10^\circ$  に対する  $X_w/U_{ot}$  は約1.0288であり,  $k_1$  を二次式とした場合が最も近い値である。しかしながら, マッハ衝撃波の曲率の変化の定量的な検討は今後の課題である。次に図6は  $Mo = 1.19$ ,  $\theta_w = 10^\circ$  に対する  $\theta$  と  $\gamma$  の関係を示す。同図から  $k_1$  が二次式の場合, 三重重点近傍で  $\gamma$  に対する  $\theta$  の変化は大きく, 壁面に近づくにつれてその変化は小さくなる。 $k_1$  が一次式の場合

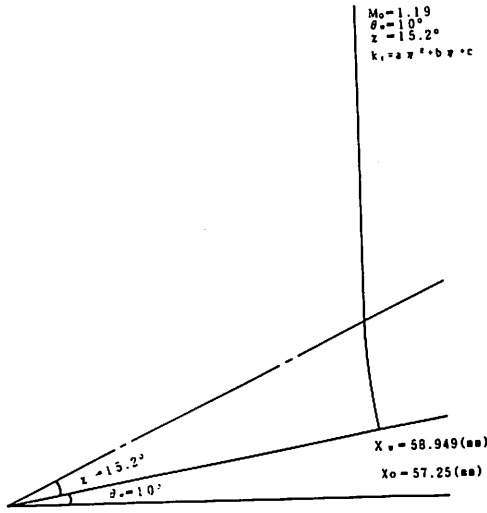


図8 マッハ衝撃波形状

はその逆の傾向を示す。図7はマッハ衝撃波マッハ数比  $R$  を縦軸に、 $\eta$  を横軸に示す。図中の破線はマッハ衝撃波を直線とした場合の値である。計算値はいずれの場合も破線より低い値を示し、本計算値は斜壁面に近づくとともにマッハ衝撃波のマッハ数は増加することがわかる。なお後述の数値実験の結果では、 $Mo = 1.19$ ,  $\theta_w = 10^\circ$  に対して  $R = 1.0417$ ,  $Mo = 1.07$ ,  $\theta_w = 5.5^\circ$  に対して  $R = 1.0155$ ,  $Mo = 1.07$ ,  $\theta_w = 10^\circ$  に対して  $R = 1.0243$  であり、特に  $Mo = 1.07$ ,  $\theta_w = 10^\circ$  において理論値よりも低い。これは後述の人工粘性係数の選択によるものと思われる。次に図8は、 $Mo = 1.19$ ,  $\theta_w = 10^\circ$ ,  $k_1$  が二次式で与えた場合の物理場でのマッハ衝撃波の形状を示す。 $X_0$  は斜壁頂点から入射衝撃波までの距離である。

#### 4. 数値実験

平面衝撃波が斜壁と干渉する問題に対し、本報では完全気体非定常二次元非粘性圧縮性流れとして取り扱う。以下に基礎式を示す。

##### 4.1 流れを支配する基礎方程式

###### ① 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

###### ② 運動量の式

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} = 0$$

###### ③ エネルギー式

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ u(E + P) \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ v(E + P) \} = 0$$

$$E = \rho \left\{ e + \frac{(u^2 + v^2)}{2} \right\}$$

①~③をまとめると次式となる。

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

ただし

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + P)u \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + P)v \end{pmatrix} \tag{15}$$

$F, G$  内の  $P$  は次の状態方程式を用いる。

$$P = (\gamma - 1) \left\{ E - \frac{(u^2 + v^2)}{2} \right\}$$

#### 4.2 格子形成法

最近では物理場  $(X, Y)$  の計算領域を  $\xi = \xi(X, Y)$ ,  $\eta = \eta(X, Y)$  によって計算場  $(\xi, \eta)$  上の長方形領域に写像する方法が一般的である<sup>16)</sup>。本報では  $\xi = X$ ,  $\eta = (Y - b(x)) / (h(x) - b(x))$  を用いて、図9(a)の物理場を(b)の計算場に変換した。変数の変換は次式となる。なお下添字は微分を意味する。

$$\left. \begin{aligned} X_\xi &= J \eta_y, & X_\eta &= -J \xi_y \\ Y_\xi &= -J \eta_x, & Y_\eta &= J \xi_x \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

$$J = X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi \tag{17}$$

その場合(14)式は

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} = 0 \tag{18}$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= JW \\ \tilde{F} &= J(\xi_x F + \xi_y G) \\ \tilde{G} &= J(\eta_x F + \eta_y G) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \xi_x u + \xi_y v \\ \tilde{V} &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned}$$

とすると

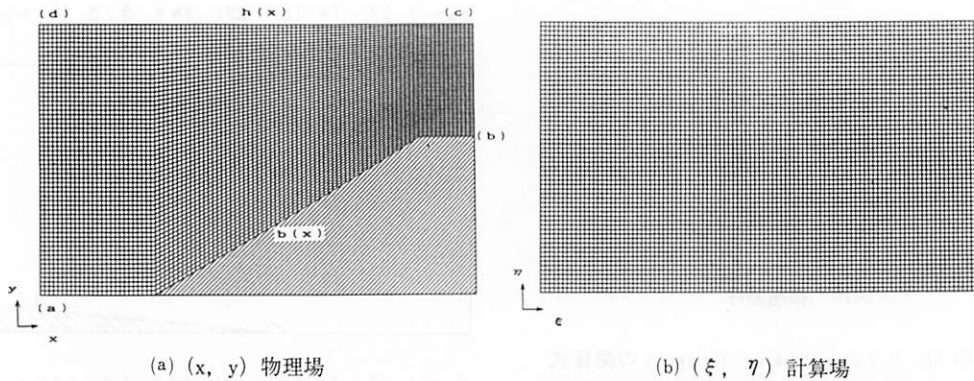


図9 格子形成法

$$\tilde{F} = J \begin{pmatrix} \rho \tilde{U} \\ \rho u \tilde{U} + \xi_x P \\ \rho v \tilde{U} + \xi_y P \\ (E+P)\tilde{U} \end{pmatrix} \quad \tilde{G} = J \begin{pmatrix} \rho \tilde{V} \\ \rho u \tilde{V} + \eta_x P \\ \rho v \tilde{V} + \eta_y P \\ (E+P)\tilde{V} \end{pmatrix} \quad (19)$$

基礎方程式(18)を時間に関してテーラー展開を導入して近似をした際のヤコビアンを  $\tilde{A} = \partial \tilde{F} / \partial W$ ,  $\tilde{B} = \partial \tilde{G} / \partial W$  とすると  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  の固有値は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} \text{の固有値} \\ \lambda = \tilde{U} \pm C \sqrt{X^2 \eta + Y^2 \eta} / J \quad \text{および} \\ \lambda = \tilde{U} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B} \text{の固有値} \\ \lambda = \tilde{V} \pm C \sqrt{X^2 \xi + Y^2 \xi} / J \quad \text{および} \\ \lambda = \tilde{V} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

### 4.3 差分法

衝撃波や滑り線といった不連続面が現われる流れに対する差分スキームは多数提案されているが、本報では二次精度のRichtmyer陽的差分スキームに、Lax-Wendroff型<sup>17)</sup>の人工粘性項を付加する方法を用いた。以下に  $\xi$  方向の差分スキームを示す。

予測子段階

$$\tilde{W}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\tilde{W}_{i+1}^n + \tilde{W}_i^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta \xi} (\tilde{F}_{i+1}^n - \tilde{F}_i^n)$$

修正子段階

$$\tilde{W}_i^{n+1} = \tilde{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n)$$

人工粘性項 $q$ は次式となる。

$$q_0 = k_0 [|\tilde{U}(\tilde{U} - \bar{C}_A)| \Delta(\tilde{U} + \bar{C}_A) - 2(\tilde{U} - \bar{C}_A) \cdot (\tilde{U} + \bar{C}_A) \Delta(\tilde{U}) + \tilde{U}(\tilde{U} + \bar{C}_A) \Delta(\tilde{U} + \bar{C}_A)]$$

$$/ 4 \bar{C}_A^2$$

$$q_1 = -k_1 [|(2\tilde{U} - \bar{C}_A) \Delta(\tilde{U} + \bar{C}_A) - 4\tilde{U} \Delta(\tilde{U}) + (2\tilde{U} + \bar{C}_A) \Delta(\tilde{U} + \bar{C}_A)|] / 4 \bar{C}_A^2$$

$$q_2 = k_2 [|\Delta(\tilde{U} + \bar{C}_A) - 2|\Delta(\tilde{U})| + |\Delta(\tilde{U} - \bar{C}_A)|] / 4 \bar{C}_A^2$$

ここで $k_0, k_1, k_2$ は $O(1)$ の定数であり、 $C_A = C(X\eta^2 + Y\eta^2)^{1/2} / J$ である。そして人工粘性項を付加した(22)式は次式となる。

予測子段階

$$\tilde{W}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\tilde{W}_{i+1}^n + \tilde{W}_i^n) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta \xi} + q_{2f} \right) (\tilde{F}_{i+1}^n - \tilde{F}_i^n) + \frac{1}{2} q_{1f} (\tilde{W}_{i+1}^n - \tilde{W}_i^n)$$

修正子段階

$$\tilde{W}_i^{n+1} = \tilde{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{2 \Delta \xi} [q_{0f} (\tilde{W}_{i+1}^n - \tilde{W}_i^n) - q_{0b} (\tilde{W}_i^n - \tilde{W}_{i-1}^n)]$$

### 4.4 境界条件および初期条件

本報の境界条件は境界上に格子点を有する first mesh 法によった。図9に示す(a)-(d)面は入射衝撃波背後の一樣流を与え、(b)-(c)面は0次外挿を行ない、(a)-(b)および(c)-(d)面は一次外挿を行なった。また、(a)-(b)上は運動量を一定のまま、流れの向きを壁の接線にそわせるすべり条件を用いた。初期条件は図10に示すように、斜壁上流に平面衝撃波を与え、静止気体領域(0)と衝撃波上流一樣気流(1)を与えた。初期値としては、あらかじめ領域(0)の物理量および入射衝撃

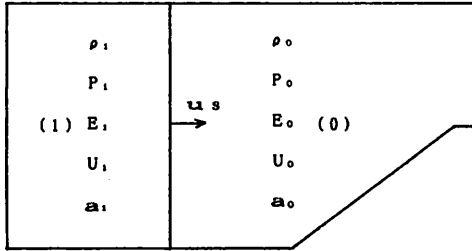


図10 初期条件

波マッハ数  $M_s$  を与え、Rankine-Hugoniot の関係式から得られる入射衝撃波背後気流の諸物理量を領域(1)の初期値と設定した。また計算を行なう場合、次に示すような無次元化を施している。

$$\begin{aligned}
 x^* &= x/L & y^* &= y/L & t^* &= t/(L/u_1) \\
 \rho^* &= \rho/\rho_1 & u^* &= u/u_1 & v^* &= v/u_1 \\
 E^* &= E/(\rho_1 u_1^2) & P^* &= P/(\rho_1 u_1^2)
 \end{aligned}$$

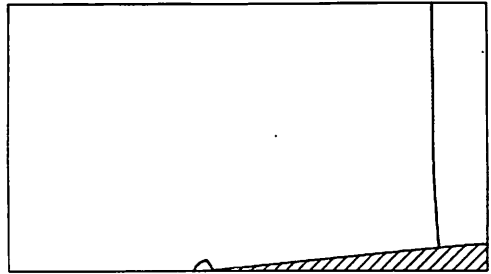
さらに、計算格子は115×65の正方格子で、計算は  $L \varepsilon (\frac{1}{2} \Delta t)$   $L \eta (\Delta t) L \varepsilon (\frac{1}{2} \Delta t)$  の形の時間分割法を用いた。

5. 計算結果 (数値実験)

前述の方法により試料気体空気に対し得られた弱いマッハ反射の数値計算結果を図形処理で示す。図中の時間は入射衝撃波が斜壁頂点に衝突してからの値である。図11は等マッハ数線で(a)は  $M_s=1.07$  で  $\theta_w$  を変化させた場合である。この場合、入射衝撃波およびマッハ衝撃波背後の流れは、絶対座標系から見て亜音速である(以下亜音速, 超音速は絶対座標系から見ている)。そしてマッハ衝撃波は緩やかにわん曲し、 $\theta_w$  が大きくなるほどマッハ衝撃波の曲率半径は小さくなることが定性的に観察される。なお  $\theta_w=33.5^\circ$  は、二衝撃波理論で正常反射を始める  $M_s=1.07$  の斜壁の角度である。入射衝撃波およびマッハ衝撃波背後のマッハ数の変化は、 $\theta_w$  が小さい場合非常に小さく、斜壁頂点の狭い領域で見られる。 $\theta_w$  が大きくなると、この領域は広がり  $\theta_w=25^\circ, 33.5^\circ$  ではマッハ衝撃波近傍でも見られる。しかしながら入射衝撃波とマッハ衝撃波はいずれの場合も滑らかに接続していて、折れ曲がりが存在せず明確な三重重点およびすべり線は見られない。次に(b)は  $\theta_w=10^\circ$  で  $M_s$  を変化させた場合の等マッハ線である。図中の数値1.0は音速線を示す。本報の結果では  $M_s=1.5$  までは、入射衝撃波およびマッハ衝撃波背後の流れは亜音速である。その場合、マッハ衝撃波は滑らかにわん曲している。一方  $M_s=2.0$

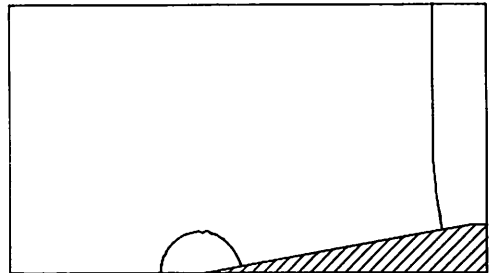
$M_s = 1.07 \quad T = 157 (\mu S) \quad \theta_w = 5.5 \text{ (deg.)}$

\*\* M-Contour Map \*\*



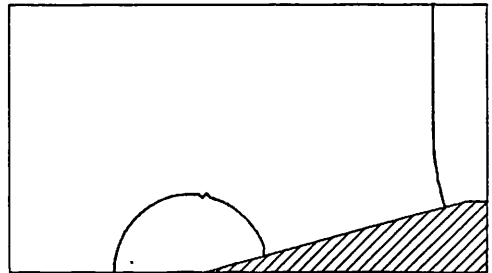
$M_s = 1.07 \quad T = 157 (\mu S) \quad \theta_w = 10 \text{ (deg.)}$

\*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 1.07 \quad T = 157 (\mu S) \quad \theta_w = 15 \text{ (deg.)}$

\*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 1.07 \quad T = 155 (\mu S) \quad \theta_w = 20 \text{ (deg.)}$

\*\* M-Contour Map \*\*

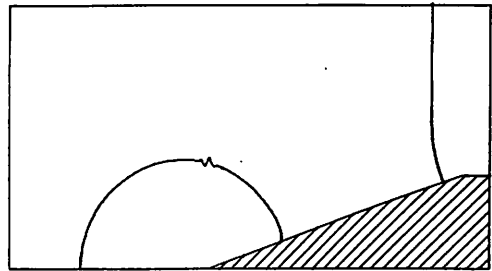
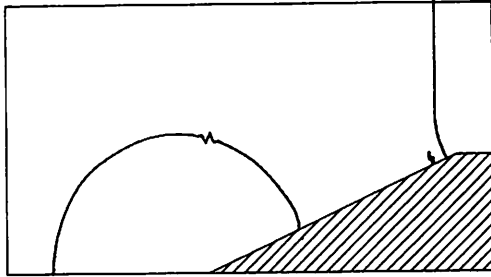


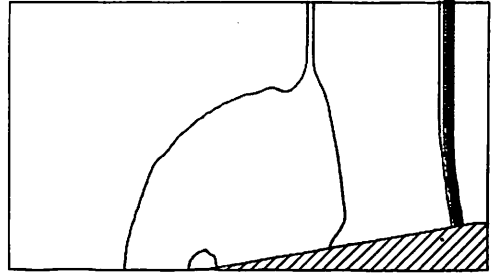
図11 (a) 等マッハ数分布図



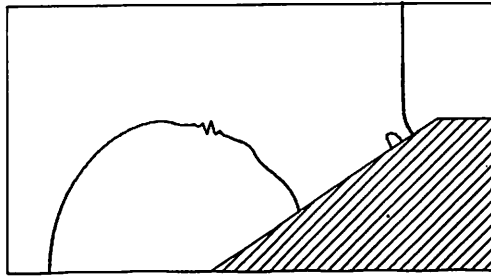
$M_s = 1.07$   $T = 155(\mu S)$   $\theta W = 25$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 1.5$   $T = 113(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 1.07$   $T = 134(\mu S)$   $\theta W = 33.5$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 2$   $T = 84(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*

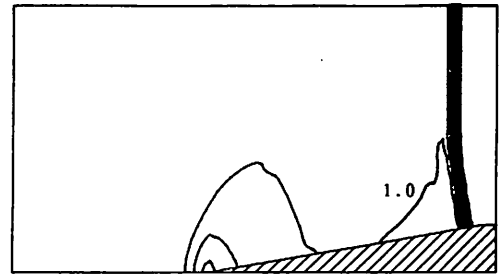
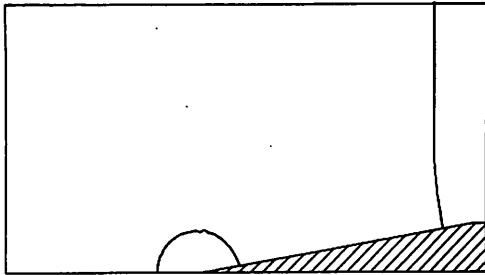
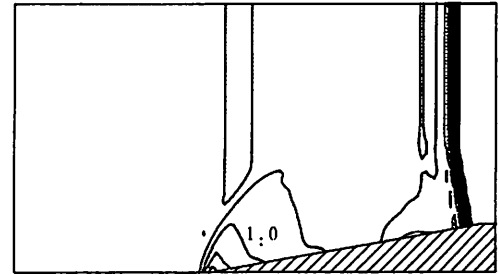


図11(a) 等マッハ数分布図

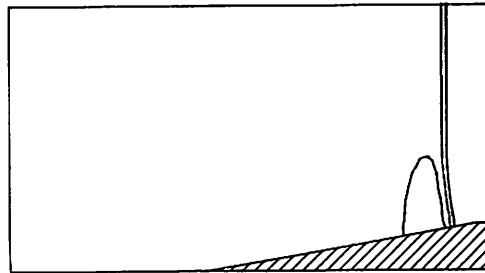
$M_s = 1.07$   $T = 157(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 2.5$   $T = 67(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 1.19$   $T = 140(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*



$M_s = 3$   $T = 56(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*

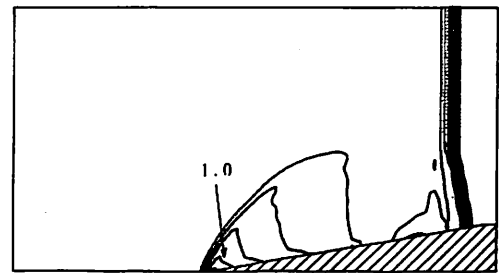
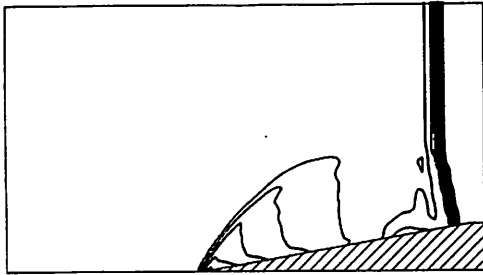


図11(b) 等マッハ数分布図

図11(b) 等マッハ数分布図

$M_2 = 3.5$   $T = 48(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*



$M_2 = 4$   $T = 42(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* M-Contour Map \*\*

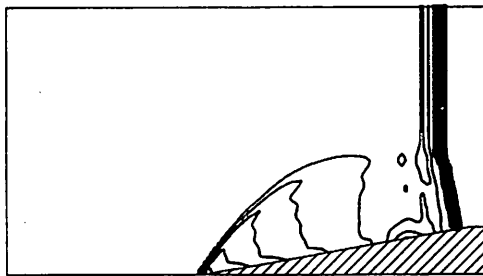
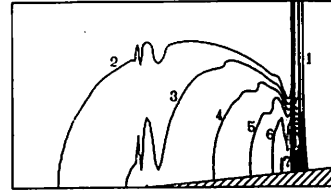


図11(b) 等マッハ数分布図

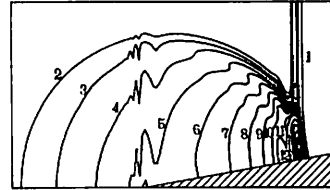
ではマッハ衝撃波近傍で部分的に超音速で、他の領域は亜音速である。さらに  $M_s$  が増加すると斜壁頂点近傍の亜音速領域は減少し、マッハ衝撃波背後のマッハ数は増加する。そして  $M_s = 3.0$  以上では入射衝撃波およびマッハ衝撃波背後の流れはすべて超音速である。このようにマッハ衝撃波背後に超音速領域が存在し、超音速領域が大きい場合入射衝撃波からマッハ衝撃波へ接続する点で明白な折り曲がりの存在が見られすべり線の存在も確認できる。なお本報ではいずれの場合も、反射衝撃波背後の領域の流れの三重点に対する相対マッハ数は1より小さい。次に図12(a), (b)は密度比による等密度線である。 $M_s = 1.07$  で  $\theta w$  を変化した場合、密度は斜壁頂点近傍よりマッハ衝撃波近傍が大きく、さらにマッハ衝撃波と斜壁の交点近傍が最も大きな値となっている。このことはマッハ衝撃波近傍が非一様流であることを示す。 $\theta w$  が増加すると反射衝撃波およびマッハ衝撃波背後の密度変化は大きく、マッハ衝撃波の曲率半径は小さくなり正常反射へ移行するものと思われる。なお本報では前述の人工粘性係数(0.1)の数値を適当に選んで計算を行なった。人

$M_2 = 1.07$   $T = 157(\mu S)$   $\theta W = 5.5$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



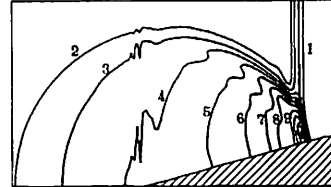
Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.100
2	1.120
3	1.122
4	1.124
5	1.126
6	1.128
7	1.130
	1.132
	1.134
	1.136
	1.138
	1.140
	1.145
	1.146

$M_2 = 1.07$   $T = 157(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



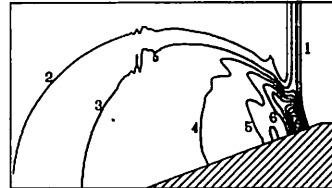
Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.100
2	1.120
3	1.122
4	1.124
5	1.126
6	1.128
7	1.130
8	1.132
9	1.134
10	1.136
11	1.138
12	1.140
	1.145
	1.150
	1.155
	1.160
	1.162

$M_2 = 1.07$   $T = 157(\mu S)$   $\theta W = 15$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.100
2	1.120
3	1.125
4	1.130
5	1.135
6	1.140
7	1.145
8	1.150
9	1.160
	1.170
	1.180
	1.185

$M_2 = 1.07$   $T = 155(\mu S)$   $\theta W = 20$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.100
2	1.120
3	1.130
4	1.140
5	1.150
6	1.160
	1.170
	1.180
	1.190
	1.200
	1.210
	1.220

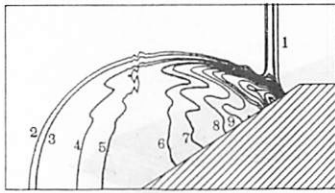
$M_2 = 1.07$   $T = 155(\mu S)$   $\theta W = 25$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.100
2	1.125
3	1.130
4	1.140
5	1.150
6	1.160
7	1.170
	1.180
	1.190
	1.200
	1.210
	1.220
	1.230
	1.240
	1.250

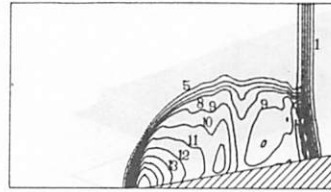
図12(a) 等密度分布図

$M_2 = 1.07$   $T = 134(\mu S)$   $\theta W = 33.5$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.100
2	1.125
3	1.130
4	1.140
5	1.145
6	1.155
7	1.160
8	1.170
9	1.180
10	1.190
11	1.200
12	1.220
13	1.240
14	1.250
15	1.270

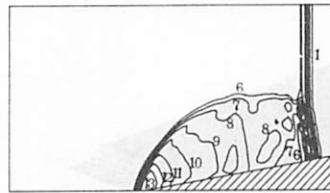
$M_2 = 2$   $T = 84(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.50
3	2.00
4	2.50
5	2.70
6	2.75
7	2.80
8	2.84
9	2.88
10	2.92
11	2.96
12	3.00
13	3.04
14	3.08
15	3.12
16	3.20

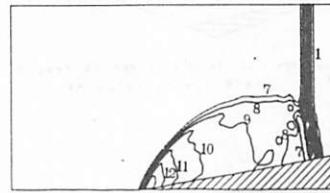
図12(a) 等密度分布図

$M_2 = 2.5$   $T = 67(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



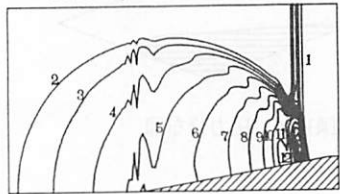
Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.50
3	2.00
4	2.50
5	3.00
6	3.50
7	3.60
8	3.70
9	3.80
10	3.90
11	4.00
12	4.10
13	4.20

$M_2 = 3$   $T = 56(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



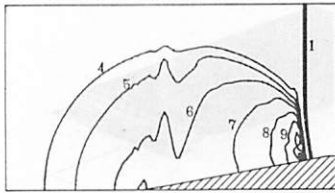
Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.50
3	2.00
4	2.50
5	3.00
6	3.50
7	4.00
8	4.20
9	4.40
10	4.60
11	4.80
12	5.00
13	5.20

$M_2 = 1.07$   $T = 157(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



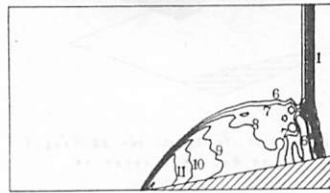
Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.100
2	1.120
3	1.122
4	1.124
5	1.126
6	1.128
7	1.130
8	1.132
9	1.134
10	1.136
11	1.138
12	1.140
13	1.145
14	1.150
15	1.155
16	1.160
17	1.162

$M_2 = 1.19$   $T = 140(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



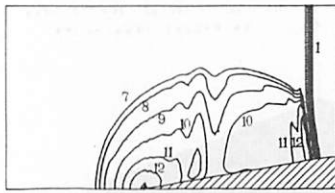
Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.15
3	1.20
4	1.33
5	1.34
6	1.35
7	1.36
8	1.37
9	1.38
10	1.39
11	1.40
12	1.41

$M_2 = 3.5$   $T = 48(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



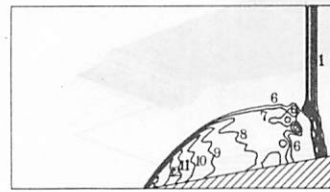
Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.50
3	2.00
4	3.00
5	4.00
6	4.50
7	4.70
8	4.90
9	5.10
10	5.30
11	5.50
12	6.00

$M_2 = 1.5$   $T = 113(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.15
3	1.20
4	1.30
5	1.50
6	1.70
7	1.90
8	1.92
9	1.94
10	1.96
11	1.98
12	2.00
13	2.05
14	2.08
15	2.09

$M_2 = 4$   $T = 42(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
 \*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels	
n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.50
3	2.00
4	3.00
5	4.00
6	5.00
7	5.20
8	5.40
9	5.60
10	5.80
11	6.00
12	6.20
13	6.40

図12(b) 等密度分布図

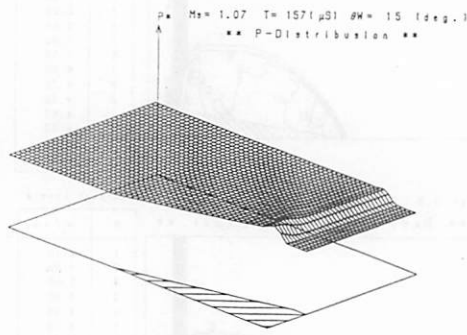
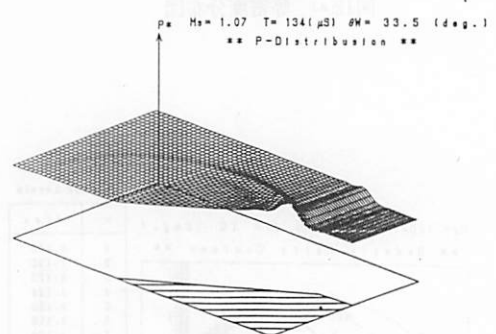
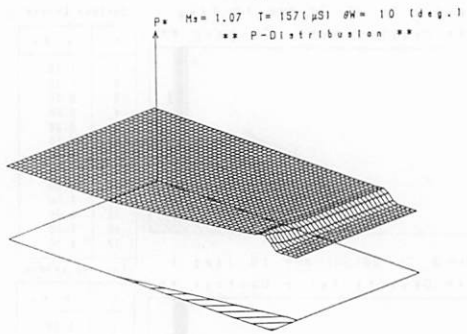
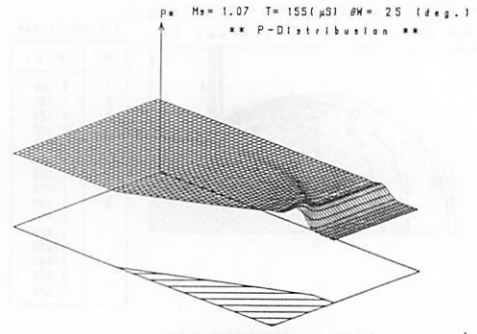
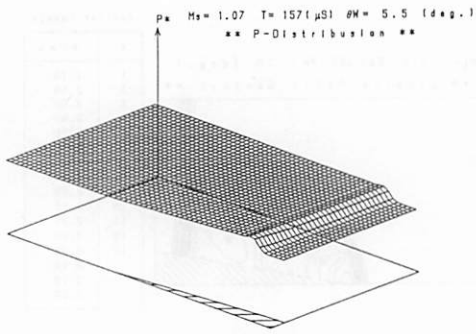


图13(a) 压力分布图

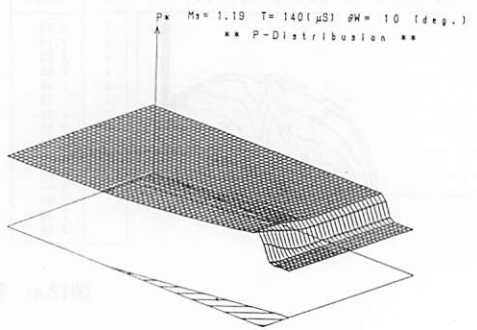
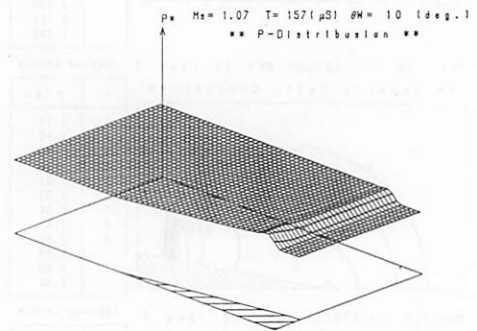
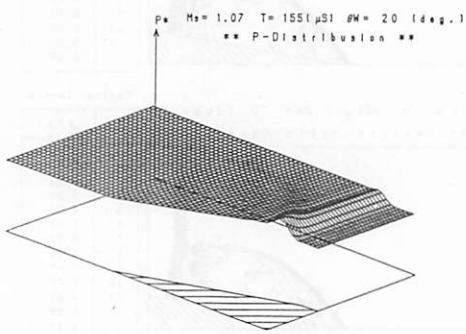


图13(a) 压力分布图

图13(b) 压力分布图

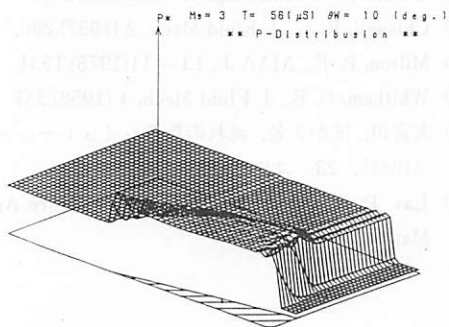
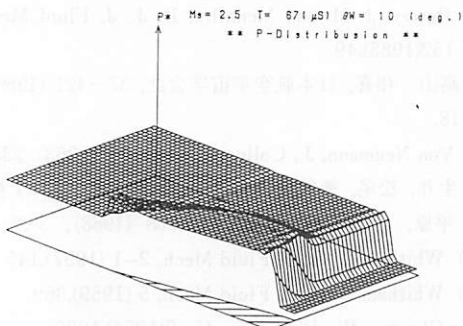
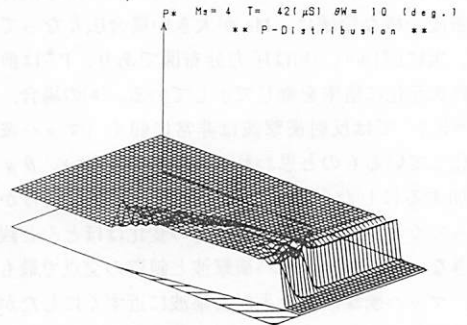
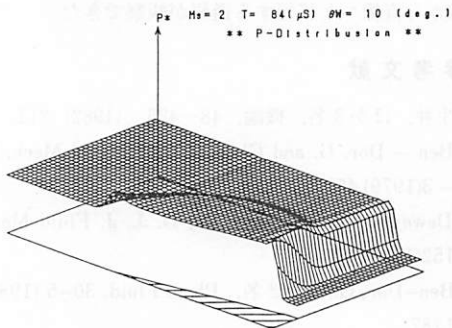
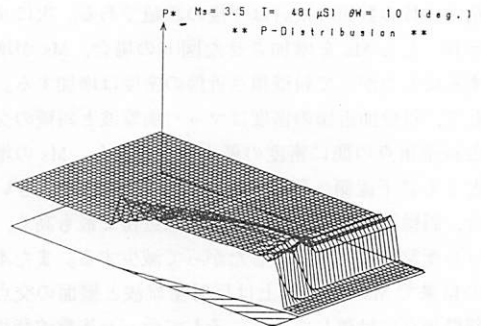
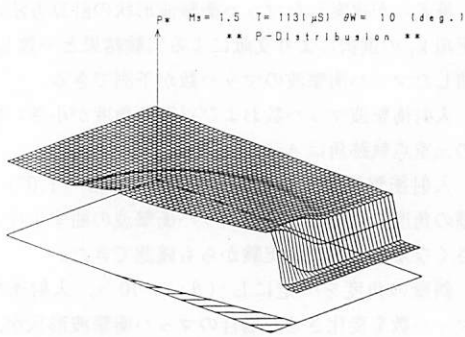
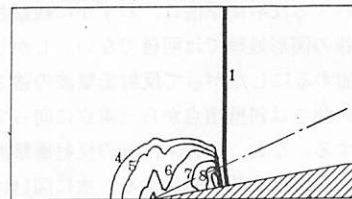
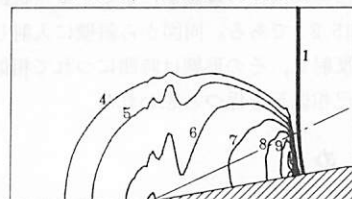


図13(b) 圧力分布図

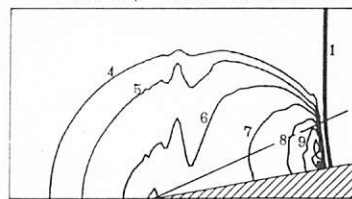
$M_2 = 1.19$   $T = 60(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
\*\* Density Ratio Contour \*\*



$M_2 = 1.19$   $T = 120(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
\*\* Density Ratio Contour \*\*



$M_2 = 1.19$   $T = 140(\mu S)$   $\theta W = 10$  (deg.)  
\*\* Density Ratio Contour \*\*



Contour Levels

n	$\rho/\rho_0$
1	1.10
2	1.15
3	1.20
4	1.33
5	1.34
6	1.35
7	1.36
8	1.37
9	1.38
	1.39
	1.40
	1.41

図13(b) 圧力分布図

図14 反射形態の時間的变化

工粘性係数の数値の検討は今後の課題である。次に  $\theta_w = 10^\circ$  とし  $M_s$  を増加させた図(b)の場合,  $M_s$  が増加するにしたがって斜壁頂点近傍の密度は増加する。そして, 斜壁面近傍の密度はマッハ衝撃波と斜壁の交点と斜壁頂点の間に密度の最小値が存在し,  $M_s$  の増加とともに下流側へ移行する。そして,  $M_s$  が大きい場合, 斜壁面近傍の密度は斜壁頂点近傍で最も高く, マッハ衝撃波に近づくにしたがって減少する。また本報の結果で  $M_s = 3.0$  以上は反射衝撃波と壁面の交点が斜壁頂点に付着している。そしてマッハ衝撃波背後の密度一様な領域は,  $M_s$  が大きい場合広がっている。次に図13(a), (b)は圧力分布図であり,  $P^*$  は前述の無次元化に倍率を乗じて示している。(a)の場合,  $\theta_w = 5.5^\circ$  では反射衝撃波は非常に弱く(マッハ波に退化しているものと思われる)観察できない。 $\theta_w$  が増加するにしたがって反射衝撃波の存在が明らかとなってくるが, 上流側での圧力の変化はほとんど観察できない。圧力はマッハ衝撃波と斜壁の交点で最も高く, マッハ衝撃波上を入射衝撃波に近づくにしたがって減少してくる。そして反射衝撃波の強さは, 入射衝撃波との交点で最も高く, 反射衝撃波上を斜壁面に近づくにしたがって減少してくる。次に(b)の場合,  $M_s = 1.07, 1.19$  に対する反射衝撃波は, わずかに観察される程度で, 本報の図形処理では明確でない。しかしながら  $M_s$  が増加するにしたがって反射衝撃波の強さは増し, またその強さは斜壁頂点から三重点に向けてなめらかに減少する。なお, 図13(a), (b)の反射衝撃波強さの定量値については次報で議論する。次に図14は  $M_s = 1.19, \theta_w = 10^\circ$  の等密度線の時間的変化を示す。図中の一点鎖線は前述の理論値による三重点軌跡と斜壁のなす角  $15.2^\circ$  である。同図から斜壁に入射した平面衝撃波が反射し, その形態は時間につれて相似的に変化する自己相似形を保つと思われる。

## 6. ま と め

斜壁に平面衝撃波が干渉し, 弱いマッハ反射が生じる場合の理論的解析および数値実験によって次の結果を得た。

- ① 筆者らが提案したマッハ衝撃波形状の計算方法は修正項  $k_1$  の選択により文献による実験結果と一致し, 湾曲したマッハ衝撃波のマッハ数が予測できる。
- ② 入射衝撃波マッハ数および斜壁の角度が小さい場合の三重点軌跡角は Acoustic 理論で見積れる。
- ③ 入射衝撃波マッハ数を一定にし ( $M_s = 1.07$ ), 斜壁の角度を増加させるとマッハ衝撃波の曲率半径は小さくなるのが数値実験からも確認できた。
- ④ 斜壁の角度を一定にし ( $\theta_w = 10^\circ$ ), 入射衝撃波マッハ数を変化させた場合のマッハ衝撃波形状が, 曲線から直線へと移行する過程が観察できた。

## 参 考 文 献

- 1) 生井, ほか3名, 機論, 48-426, (1982) 212.
- 2) Ben - Dor, G. and Glass, I. I., J. Fluid Mech, 92 - 3(1979),459.
- 3) Dewey, J. M. and Mcmillin, D. J., J. Fluid Mech, 152(1985),67.
- 4) Ben-Dor, G.,ほか2名, Phys. Fluid, 30-5 (1987), 1287.
- 5) Dewey, J. M. and Mcmillin, D. J., J. Fluid Mech, 152(1985),49.
- 6) 高山 和喜, 日本航空宇宙学会誌, 37-421 (1989), 18.
- 7) Von Neumann, J., Collected works, 6, (1963), 238.
- 8) 生井, 松尾, 衝撃波の力学, (1983) 129, コロナ社.
- 9) 平原, ほか2名, 機論, 54-508 (1988), 3325.
- 10) Whitham G. B., J. Fluid Mech, 2-1 (1957),145.
- 11) Whitham G. B., J. Fluid Mech, 5 (1959),369.
- 12) Chester, W., Phil. Mag, 45-7(1954),1293.
- 13) Chisnell, R. F., J. Fluid Mech, 2 (1957),286.
- 14) Milton, B. E., AIAA J., 13 - 11(1975),1531.
- 15) Whitham, G. B., J. Fluid Mech, 4 (1958),337.
- 16) 大宮司, ほか7名, 流れの数値シミュレーション, (1988), 23, コロナ社.
- 17) Lax, P. D. and Wendroff, B., Comm. Pure Appl. Math,13(1960),217.