

衝撃波の反射に関する研究

(double wedge に平面衝撃波が入射する場合の一考察)

灘光 陽*¹・本田 隆志*¹

Investigation of shock reflections

(A consideration of a reflection process of a shock wave over a double wedge)

You NADAMITSU and Takashi HONDA

A numerical simulation of a reflection process when a plane shock wave is incident on a double wedge is examined by TVD numerical simulation.

A double wedge is formed the second wedge for which have a greater angle than the first wedge.

Also a theoretical means is conducted for the interaction of the slip stream from the first triple point and the reflected shock wave from the second wedge.

Key word compressible Flow, Shock Reflection, TVD Scheme, Conservation Equation

1. 緒言

静止気体中を伝播する平面衝撃波が1つの頂角を有する斜壁に入射する場合、衝撃波の反射形態は時間に対し相似形を保つ準定常流れで、通常正常反射とマッハ反射に分けられ従来から多くの理論的・実験的研究がなされている。^{(1)~(4)} また壁面が曲面形状を有する場合の衝撃波の反射形態は、凹面壁ではマッハ反射から正常反射への遷移が生じ、凸面壁においては正常反射からマッハ反射への遷移が起こる。^{(5)~(6)} この遷移の臨界角は曲面壁の曲率半径および曲面壁の初期傾き角に強く依存する報告もある。⁽⁷⁾ そして類似の遷移現象は頂角の異なる斜壁を二段に組み合わせた場合(double wedge) も生じることが知られている。^{(6),(8),(9)} そして図1に示すように平面衝撃波が第一段の斜壁(以下 W_1 の記号を用いる)の頂角より大きい傾き(concave case)あるいは小さい傾き(convex case)を有する第二段の斜壁(以下 W_2 の記号を用いる)に入射する場合、入射衝撃波マッハ数は二つの斜壁頂角の組み合わせによって表1に示す7つの反射過程を衝

撃波極線による解析と実験によって明らかにしている。⁽⁹⁾

しかしながらこれらの反射過程で生じる可能性がある干渉問題(例えば process 6, 7のすべり面と反射衝撃波の干渉や W_1 で生じた反射衝撃波と W_2 で生じた反射衝撃波の干渉による反射衝撃波背後の流れへの影響など)を詳細に記述した論文を筆者らには見い出せない。そこで本報ではこれらの干渉を考慮した反射過程を得るための1 stepとして Process 6の差分法による数値計算例と、すべり面と反射衝撃波の干渉により生じるじょう乱の強さを見積る理論的な一方法を提案する。

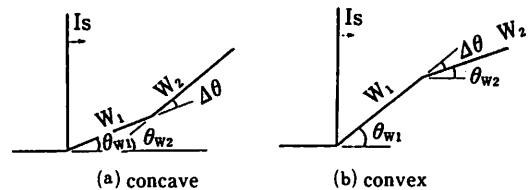


Fig. 1 double wedge

θ_{w1} : W_1 の傾斜角 θ_{w2} : W_2 の傾斜角
 $\Delta\theta$: $\theta_{w2} - \theta_{w1}$ I_S : 入射衝撃波

*¹ 機械工学科

表1 reflection process (Ref.(9))

process	case	first wedge	second wedge
1	convex	RR	RR
2	convex	MR	MR
3	convex	RR	MR
4	concave	RR	RR
5	concave	MR	RR→MR
6	concave	MR	MR→MR
7	concave	MR	MR→RR

RR : regular reflection
MR : Mach reflection

2. 数値計算

数値計算には二次元非定常オイラー方程式に対し、不連続面をより安定に鮮明に捉えることができる TVD 差分法を用いた。⁽¹¹⁾ 計算に対し格子数は90×60で、物理場に対し座標変換を施して矩形の計算場に変換している。また境界条件は物体表面上では運動量一定のまま流れの向きを壁の接線に沿わせる滑り条件を用い、上流・下流および上方の境界では0次外挿を用いる。

3. 理論

3-1 衝撃波の関係式

図2(b)に示す衝撃波静止座標に対し連続、運動量、エネルギーの保存式を適用すればよく知られている衝撃波の関係式が得られる。(詳細は文献(12),(13)参照) なお図中の S は衝撃波、 U_s は衝撃波の伝播速度、 u_1 , u_2 はそれぞれ衝撃波前方を後方の速度を示している。今領域①, ②の圧力比を $\frac{P_2}{P_1} = Z_{12}$, $\eta = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ (γ は気体の比熱比) とすると

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\eta + Z_{12})}{(1 + \eta Z_{12})} \dots\dots\dots (1)$$

$$M_s = \frac{U_s - u_1}{a_1} = \sqrt{\frac{\eta + Z_{12}}{\gamma(1 - \eta)}} \dots\dots\dots (2)$$

$$u_2 = u_1 + (Z_{12} - 1) \sqrt{\frac{P_1(1 - \eta)}{\rho_1(\eta + Z_{12})}} \dots\dots\dots (3)$$

$$Z_{12} = \frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \dots\dots\dots (4)$$

斜め衝撃波に対しては衝撃波に垂直に(1)~(4)式が成立する。表1の Process 6を記述すると図3のようになる。伝播する入射衝撃波は W_1 でマッハ反射する。準定常流れであるので三重点静止座標 (図3左上) に対し斜め衝撃波の関係をを用いる三衝撃波理論 (詳細は文献(12)) により M_s と θ_{w1} に対する図中の流れの諸量と角度が得られる。この場合三重点近傍に対しすべり面 (図中の破線) 前後で圧力と流れの向きが等しいと仮定する (密度・温度は異なる)。 M_{w1} が W_2 に到達した場合は M_{w1} を入射衝撃波とし、 M_{w1} に対する壁の傾き角を $\Delta\theta$ とすれば W_2 でのマッハ反射に対する流れの諸量と角度が得られる。

3-2 すべり面と反射衝撃波の干渉

接触不連続面と衝撃波の干渉の理論は一般に接触不連続面前後で圧力と速度が等しいと仮定している (例えば文献(13))。本報ではすべり面前後で圧力は等しく、衝撃波伝播の座標ですべり面に垂直な速度成分が等しいと仮定する。また理論を適用する部分の入射衝撃波、

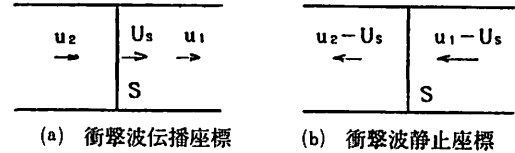


Fig. 2 coordinate system

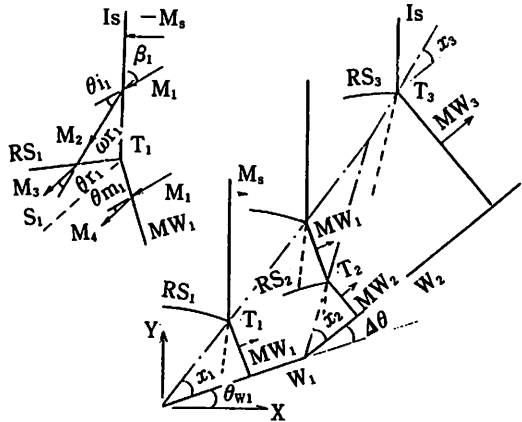


Fig. 3 Process 6

T_i : 三重点 ($i=1\sim 3$) RS_i : 反射衝撃波 ($i=1\sim 3$) M_s : 入射衝撃波マッハ数 M_{wi} : マッハ衝撃波 or マッハ衝撃波マッハ数 ($i=1\sim 3$) M_i : 領域 i に対する流れのマッハ数 ($i=1\sim 6$) β_i : 入射角 ($i=1\sim 5$) θ_{ii} : 入射衝撃波に対する偏角 ($i=1, 2$) θ_{ri} : 反射衝撃波に対する偏角 ($i=1\sim 8$) θ_{mi} : マッ

ハ衝撃波に対する偏角 ($i=1, 2$) χ_i : 三重点軌跡角 ($i=1-3$) ω_{r1} : y 軸と反射衝撃波の挟角 ($i=1-3$) s_i : すべり面 ($i=1-3$)

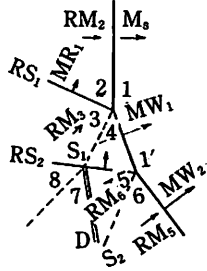


Fig. 4 shock propagation coordinate system

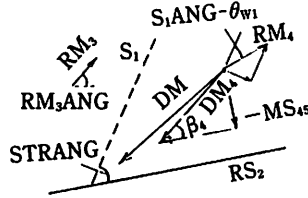


Fig. 5 composition system

MR_i : 反射衝撃波のマッハ数 ($i=1-2$)
 RM_i : 領域 i に対する流れのマッハ数 ($i=2-8$)
 D : 干渉によって生じたじょう乱 DM : S_1 と RS_2 を静止させる領域 4 のマッハ数 DM_i : DM を加えた各領域 i のマッハ数 ($i=3-8$) M_{Sij} : 領域 i, j 間の衝撃波のマッハ数 s_1ANG : x 軸と s_1 の挟角 $STRANG$: RS_2 と s_1 の挟角 RM_iANG : x 軸と領域 i の速度との挟角

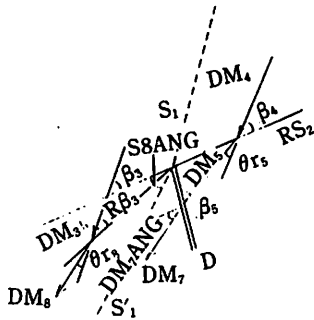


Fig. 6 interaction model
 $S8ANG$: s_1' と RS_2 の挟角

マッハ衝撃波, 反射衝撃波 (三重点近傍) は直線で, マッハ衝撃波は斜壁に垂直であると仮定する。そして次の方法で理論式を導く。三重点静止座標での速度に対し領域①, ②, ③に $M_s \times a_1 / \sin \beta_1$, 領域④, ⑤, ⑥に $M_{w1} \times a_1 / \sin \beta_2$ の速度を加えて図 4 に示す衝撃波伝播座標に変換する。図中の領域⑦, ⑧は, 三重点 T_1 から生じるすべり面と RS_2 が干渉した後の領域である。これらの領域はすべり面で分けられていて圧力は等しく, また領域⑤と⑦の間には圧縮波 or 膨張波 (図中の記号 D) が生じると仮定する。

3-3 干渉のモデル化

三衝撃波理論で得られる図 4 の RM_3 は三重点 T_1 の静止座標から求められ, W_2 で生じる RS_2 の強さ Z_{45} は三重点 T_2 の静止座標で得られる値であるので, s_1 と RS_2 の干渉に対し, T_1 静止の座標で流れを記述すると Z_{45} が満足されず, また T_2 静止の座標で流れを記述するとすべり面前後の速度の条件を満足しない。そこで一つの方法として図 5 に示す速度 $DM \times a_4$ を合成する (a_4 は領域④の音速)。合成して得られた速度 $DM_4 \times a_4$ は次式を満足している。

$$DM_4 \cdot a_4 \sin(STRANG - \beta_4) = RM_4 \cdot a_4 \sin(S_1ANG - \theta_{w1}) \dots (5)$$

$$|M_{S45}| = DM_4 \sin \beta_4 \dots (6)$$

(5)式は s_1 を静止させ, (6)式は RS_2 を静止させる関係式である。 RS_2 静止座標での M_{S45} は(2)式と同様に

$$M_{S45} = \sqrt{\frac{\eta + Z_{45}}{\gamma(1-\eta)}} \dots (7)$$

そして(5), (6)式から DM_4 の RS_2 に対する入射角 β_4 が得られる。(記号は図 6 参照)

$$\beta_4 = \tan^{-1} \left[\frac{\sin(STRANG)}{\cos(STRANG) + \frac{RM_4}{M_{S45}} \sin(STRANG - \theta_{w1})} \right] \dots (8)$$

そして領域⑤の流れの偏角 θ_{r5} は一般的な次式で得られる

$$\theta_{r5} = \tan^{-1} \left[- \{ (Z_{45} - 1) \times \sqrt{(2\gamma DM_4^2 - \gamma + 1) / (\gamma + 1) - Z_{45}} / (Z_{45} + \eta) \} / (1 + \gamma \cdot DM_4^2 - Z_{45}) \right] \dots (9)$$

また領域⑤の RS_2 に垂直な速度成分 $M_{n5} \times a_5$ は質量, 運動量, エネルギー保存則から次式となる。

$$M_{n5} = [M_{S45} - (Z_{45} - 1) \sqrt{(1-\eta) / (\gamma(\eta + Z_{45}))}] \frac{a_4}{a_5}$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \sqrt{(2\gamma M_{S45}^2 - \gamma + 1) (2 + (\gamma - 1) M_{S45}^2) / ((\gamma + 1) M_{S45})} \dots (10)$$

そして DM_5 は次式から得られる

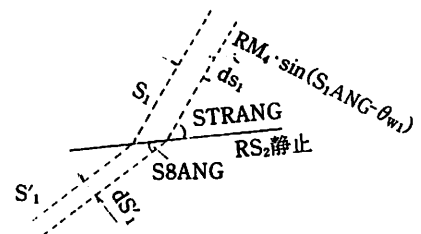


Fig. 7 reflected shock stationary model

$$DM_5 = M_{n5} / \sin(\beta_4 - |\theta_{r5}|) \dots\dots\dots (11)$$

一方領域③の速度 $DM_3 \times a_3$ は $RM_3 \times a_3$ に速度 $DM \times a_4$ を合成することによって得られる。

ただし

$$|DM| = [RM_4^2 + DM_4^2 + 2RM_4 \cdot DM_4 \cos(\theta_{w1} - \beta_4 - (\omega r_2 - 90))]^{1/2}$$

そして s_1 と RS_2 の干渉後に ωr_2 が変化しない(図6の二点鎖線)と仮定すると β_3 はただちに決定され次式となる。

$$\beta_3 = DM_3 \text{ANG} - (\omega r_2 - 90)$$

しかしながら干渉後のすべり面 s_1' に垂直な領域⑦, ⑧の速度成分は等しくならなければならない。そこで図7に示すように RS_2 だけが静止する座標に対しては s_1 が距離 ds_1 動く間に s_1' は距離 ds_1' 移動し, RS_2 とそれぞれのすべり面との挟角の時間的变化はないと仮定すると次式が成り立つ。

$$ds_1 = RM_4 \cdot a_4 \sin(S_1 \text{ANG} - \theta_{w1}) \cdot dt$$

$$ds_1' = \frac{ds_1}{\sin(\text{STRANG})} \cdot \sin(S8 \text{ANG}) \dots\dots\dots (12)$$

したがって干渉によって生じたじょう乱(図では強さ Z_{57} のじょう乱を記号 D で示している)を横切る流れと干渉後の強さ Z_{38} の RS_2 を横切る流れに対して次式が成り立つ。

$$DM_7 \cdot a_7 \sin(DM_7 \text{ANG} - S8 \text{ANG}) \cdot dt = ds_1' \dots\dots\dots (13)$$

$$DM_8 \cdot a_8 \sin(S8MR8) \cdot dt = ds_1' \dots\dots\dots (14)$$

(13), (14)式を満足するように図6の $S8 \text{ANG}$ および β_3 を調整する。調整後の β_3 を $R\beta_3$ とすると, 上式および前述と同じ関係式を用いて領域⑦, ⑧の諸物理量, 干渉後の反射衝撃波の強さ, じょう乱の強さが求められる。

ただし

$$Z_{38} = [2\gamma(DM_3 \sin(R\beta_3))^2 - (\gamma - 1)] / (1 + \gamma)$$

$$S8MR8 = R\beta_3 - |\theta_{r8}| - S8 \text{ANG} + \beta_3 - R\beta_3$$

$$Z_{57} = 1 + (Z_{38} - Z_{45}) / Z_{45}$$

$$DM_7 \text{ANG} = \beta_4 - |\theta_{r5}| + \theta_{r7}$$

4. 計算結果と考察

図8は数値計算による等密度線図(静止気体の密度で無次元化)である。図中の数値は No を示している。また入射衝撃波マッハ数 $M_5 = 3.0$ で気体は炭酸ガス($\gamma = 1.301$)である。そして $\theta_{w1} = 20^\circ$ を用いている。これらの条件は文献(8)を参考にしている。入射衝撃波は左から右へ静止気体中を伝播し, 同図(a)は $\theta_{w1} =$

20° であるので W_1 でマッハ反射を生じている。図中の三つの衝撃波が交わる点が三重点であるが, 同図から三重点の位置を決定することは困難である。なお図中の直線 A は Milton の修正項を加えた rayshock 理論により求めた θ_{w1} に対する三重点の軌跡を示している(理論値の妥当性は文献(15)で示した)。また三衝撃波理論による密度比は入射衝撃波に対して4.4, マッハ衝撃波に対して4.9, 反射衝撃波に対して5.4である。次に同図(b)は W_1 で生じたマッハ衝撃波が W_2 でマッハ反射している過程を示している。図中の直線 B は W_1 でのマッハ衝撃波のマッハ数と $\Delta\theta$ の角度により前述の rayshock 理論を用いて算出した三重点軌跡を示している。したがって直線 A と B の交点は, それぞれの三重点の理論的な干渉位置を示している。次に同図(c)は理論的な三重点干渉後の状態である。図中の直線 C は W_2 に平行に引いた線である。正確ではないが, 数値計算による三重点は C よりも上方で, 直線 A と B の間に位置することが定性的にわかる。この Process は表1 Process 6の反射過程である。次に同図(d), (e)はそれぞれ $\theta_{w2} = 30^\circ$ と 50° の三重点干渉後の状態を示している。そして図9(a)~(c)は図8(c)~(e)に対応する等マッハ数線図を示している。これらの図から θ_{w2} の増加とともにマッハ衝撃波の足の長さは短くなっていくことが定性的にわかる。このことはマッハ反射から正常反射への移行を意味する。次に図10は速度ベクトルの一例である。表示は速度に係数を乗じて行なっている。同図からマッハ衝撃波背後に速度の大きな領域が観察される。そして速度の大きさが異なる境界がすべり面に対応している。図11に圧力分布の一例を示す。 W_1 と W_2 での圧力の違いが観察される。そして入射衝撃波の圧力の不連続が3~5格子となっている。次に図12は密度比の分布を示す。縦軸は入射衝撃波背後の密度(下添字2)で無次元化した値で横軸は x 方向の格子番号である。そして J は y 方向の格子番号を示し, $J=1$ は物体表面, $J=30$ は斜壁の影響を受けていない領域である。同図(a), (b), (c)は図8(a), (b), (c)に対応している。同図(a)から W_1 で生じた反射衝撃波によって密度は上昇し, マッハ衝撃波に向ってゆるやかに減少する。三衝撃波理論による密度比はマッハ衝撃波背後で1.11, 反射衝撃波背後で1.24である。これらの値よりも数値計算の値は大きいように思われる。この点については今後検討したい。次に同図(b)では二つの密度の上昇が見られる。 $X=45$ 付近から密度の上昇は W_2 で生じた反射衝撃波による

もので、上昇の後 W_2 で生じた第2のマッハ衝撃波に向って減少している。同図(c)では $X=60$ 近傍でも密度の再上昇が見られる。これは図8(c)で示したように理論的には三重点干渉後の状態であり、その場合二つの反射衝撃波の交点で第2の三重点が形成され⁽⁶⁾⁽⁹⁾、この三重点からのすべり面が考えられる。ただし $M_s = 3.0$, $\theta_{w2} = 40^\circ$ の一段傾斜壁に対しては二重マッハ反射である¹⁰。次に表2は前述の理論式に対して、 $R\beta_3 \leq \beta_3$ の場合の計算例を示す。この場合のすべり面と反射衝撃波の干渉によって生じるじょう乱の強さは極めて弱い。しかしながら本報の数値計算結果から理論式による計算値の妥当性の検討はできなかった。また文献(8)によればすべり面前後の流れの向きおよび圧力は必ずしも一致せず、文献(14)においては実在気体効果 (M_s が大きい場合) 及び粘性の効果 (すべり面に境界層理論を適用) を導入して ω_r , 三重点軌跡と反射衝撃波の挟角の修正を行なっている。これらを考慮した場合を今後検討したい。

5. 結 言

平面衝撃波が静止気体中を伝播し二段に組み合わせた斜壁に入射する場合の反射形態の1つに対し、二次元 Euler 方程式に TVD scheme を用いた数値計算と衝撃波関係式を用いたすべり面と反射衝撃波の干渉に関する理論式によって次の結果が得られた。

- 1) 第一斜壁でマッハ反射し、さらに第二斜壁でもマッハ反射する反射形態をシミュレートした。
- 2) すべり面および第二斜壁で生じる反射衝撃波を静止させる座標系に対し、衝撃波関係式を用いた場合、すべり面と反射衝撃波の干渉によって生じるじょう乱の強さは弱い。

参考文献

- 1) 生井・他3名, 機論, 48-426, (1982), P212
- 2) G. Ben-Dor and I.I. Grass, J. Fluid Mech, 92-3, (1979), P459
- 3) J.M. Dewey and D.J. Mcmillin, J. Fluid Mech, 152, (1985), P67
- 4) G. Ben-Dor・他2名, Phys. Fluid, 30-5, (1987), P1287
- 5) G. Ben-Dor・他2名, J. Fluid Mech, 100-1, (1980), P147
- 6) K. Takayama and G. Ben-Dor, AIAA Journal, 23-12, (1985), P1853

- 7) K. Takayama and M. Sasaki, Rep. Inst. High Speed Mech, Tohoku, Univ, 46, (1983), P1
- 8) 松尾・他4名, 機論, 51-466, (1985), P1947
- 9) G. Ben-Dor・他2名, J. Fluid Mech, 176, (1987), P483
- 10) 松尾・他4名, 機論, 51-466, (1985), P1941
- 11) A. Harten, J. Compt. phys, 49, (1983), P357
- 12) 生井・松尾, 衝撃波の力学, (1983), コロナ社
- 13) R.F. Chisnell, Proc. Poy. Soc. A, 232, (1955), P350
- 14) G. Ben-Dor, J. Fluid Mech, 181, (1987), P467
- 15) 本田・灘光, 機論誌, No888-2, (1988), P27

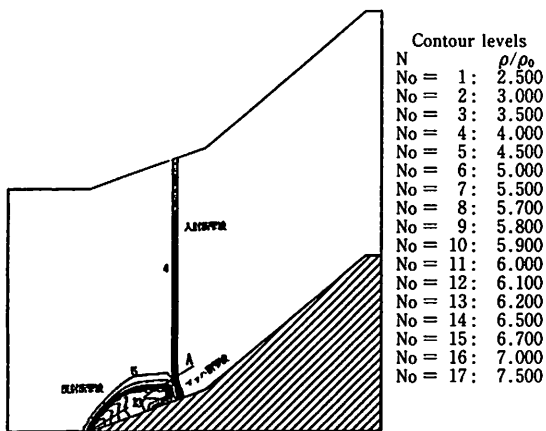


Fig. 8-(a) Isopycnics
($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

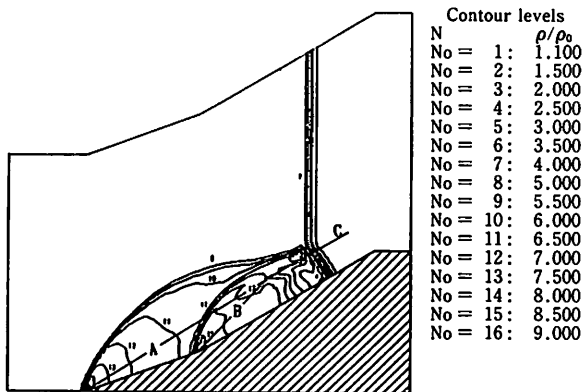


Fig. 8-(d) Isopycnics
($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=30^\circ$)

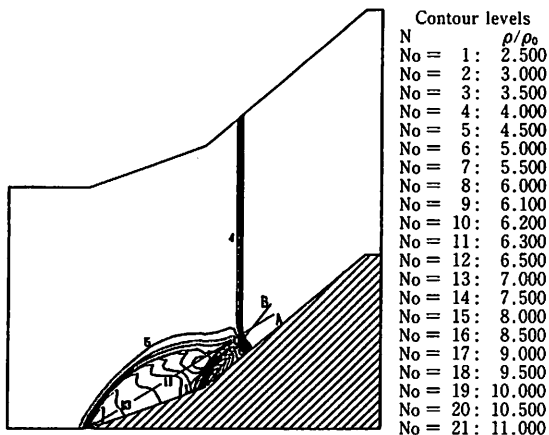


Fig. 8-(b) Isopycnics
($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

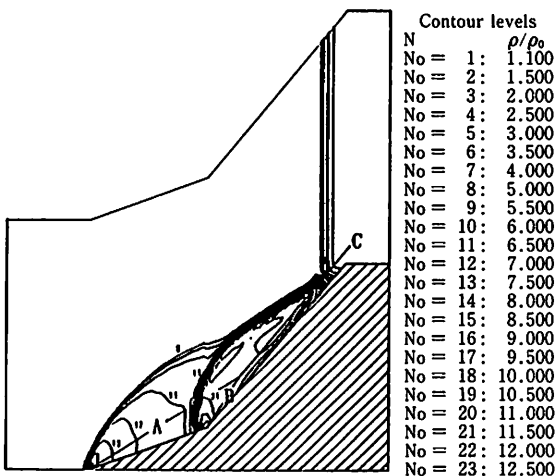


Fig. 8-(e) Isopycnics
($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=50^\circ$)

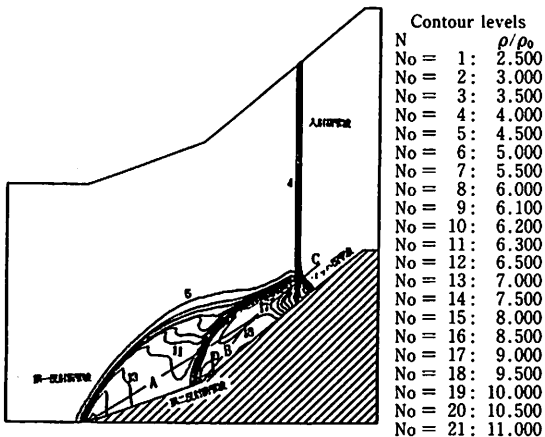


Fig. 8-(c) Isopycnics
($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

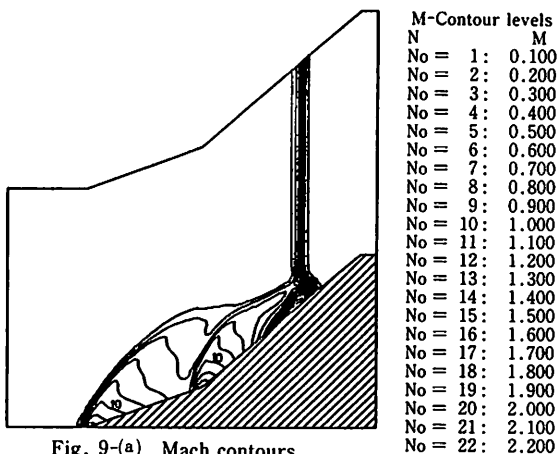


Fig. 9-(a) Mach contours
($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

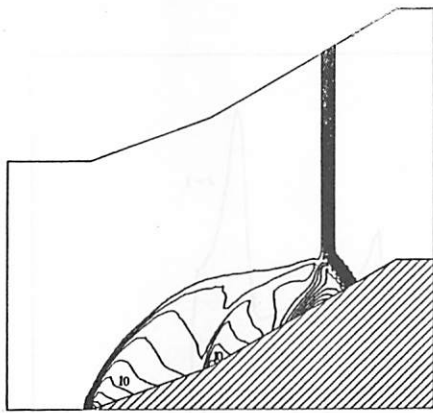


Fig. 9-(b) Mach contours
 ($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=30^\circ$)

N	M
No = 1:	0.100
No = 2:	0.200
No = 3:	0.300
No = 4:	0.400
No = 5:	0.500
No = 6:	0.600
No = 7:	0.700
No = 8:	0.800
No = 9:	0.900
No = 10:	1.000
No = 11:	1.100
No = 12:	1.200
No = 13:	1.300
No = 14:	1.400
No = 15:	1.500
No = 16:	1.600
No = 17:	1.700
No = 18:	1.800
No = 19:	1.900
No = 20:	2.000
No = 21:	2.100
No = 22:	2.200

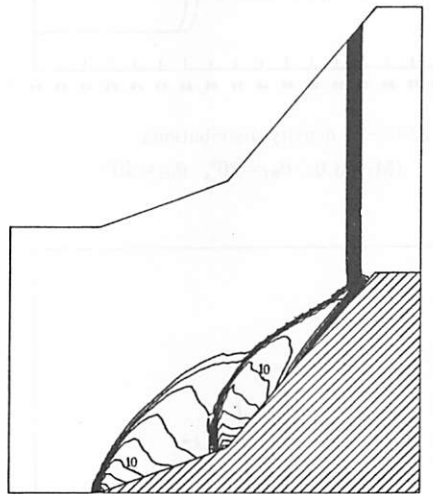


Fig. 9-(c) Mach contours
 ($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=50^\circ$)

N	M
No = 1:	0.100
No = 2:	0.200
No = 3:	0.300
No = 4:	0.400
No = 5:	0.500
No = 6:	0.600
No = 7:	0.700
No = 8:	0.800
No = 9:	0.900
No = 10:	1.000
No = 11:	1.100
No = 12:	1.200
No = 13:	1.300
No = 14:	1.400
No = 15:	1.500
No = 16:	1.600
No = 17:	1.700
No = 18:	1.800
No = 19:	1.900
No = 20:	2.000
No = 21:	2.100
No = 22:	2.200

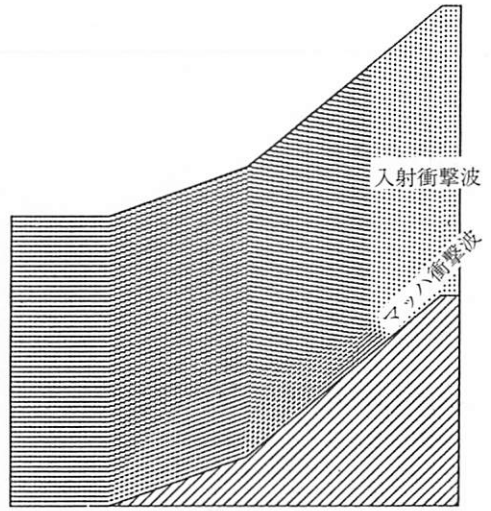


Fig. 10 Velocity vector
 ($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

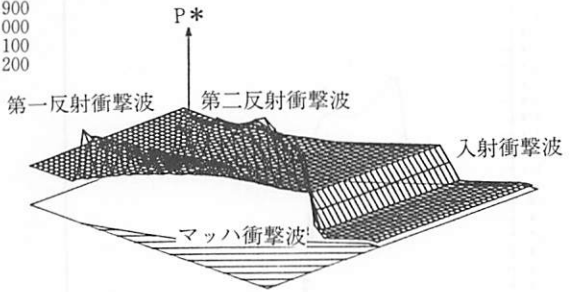
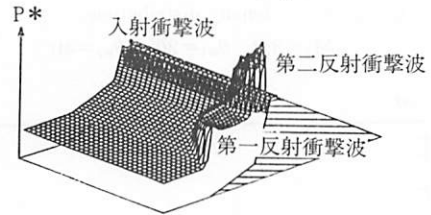


Fig. 11 displays of pressure field
 ($M_S=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

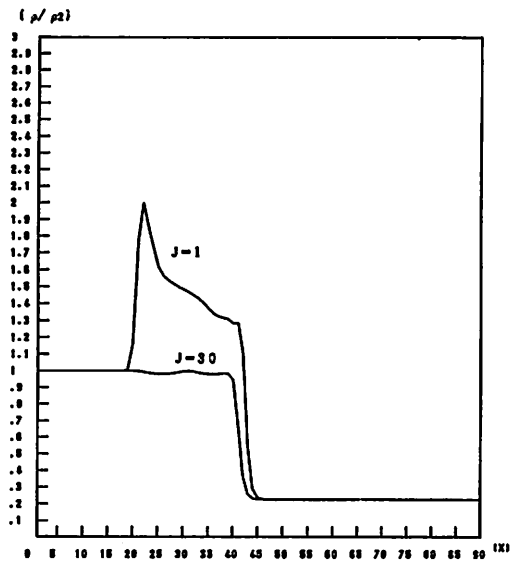


Fig. 12-(a)-1 density distributions
 ($M_s=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

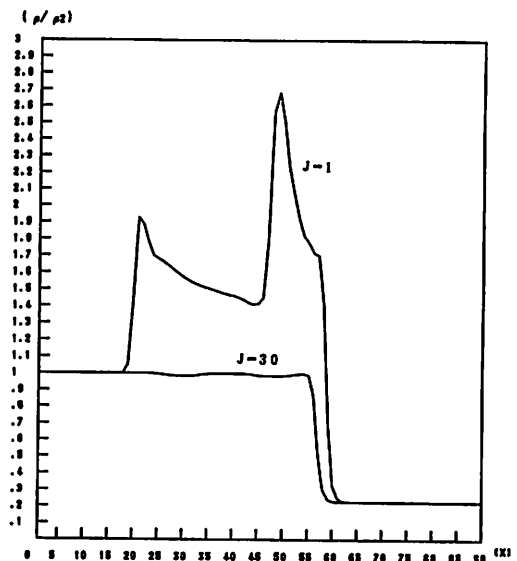


Fig. 12-(b)-1 density distributions
 ($M_s=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

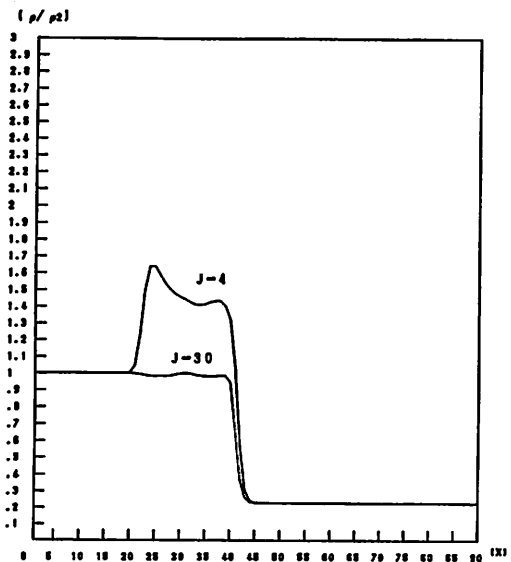


Fig. 12-(a)-2 density distributions
 ($M_s=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

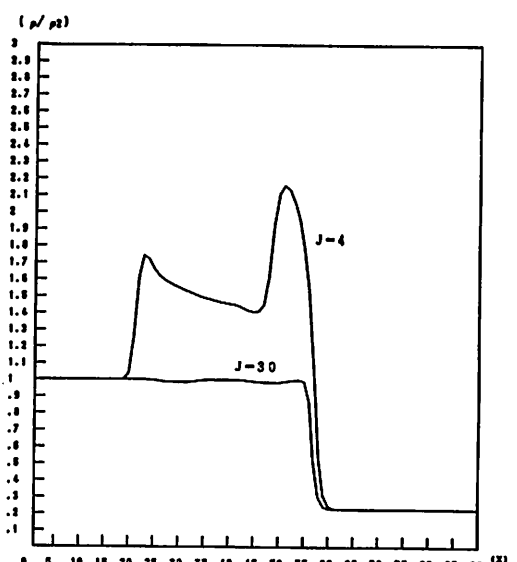


Fig. 12-(b)-2 density distributions
 ($M_s=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

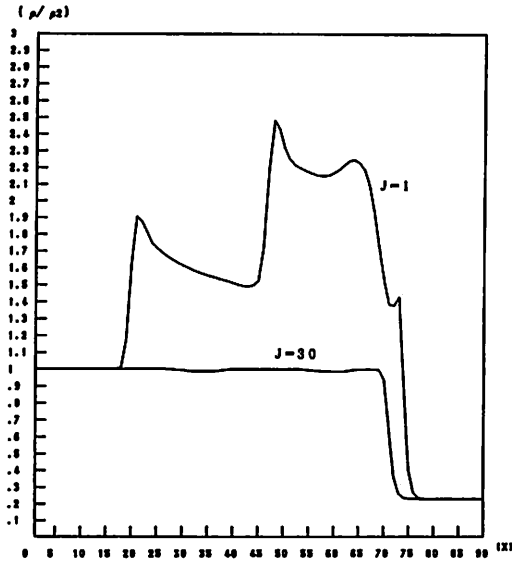


Fig. 12-(c)-1 density distributions
 ($M_s=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)

表2 present calculation

$\gamma=1.301 \quad M_s=3.0 \quad \theta_{w1}=20 \quad \theta_{w2}=40$							
M_{w1}	M_{w2}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{r1}	θ_{r2}	θ_{s1}	θ_{s2}
3.44	3.93	-38.1	-40.2	6.3	5.5	-32.8	-34.6
x_1	x_2	ω_{r1}	ω_{r2}	ρ_2/ρ_1	ρ_3/ρ_2	ρ_4/ρ_2	ρ_5/ρ_4
11.2	10.8	97.2	121.8	4.40	1.24	1.11	1.23
ρ_6/ρ_5	ρ_7/ρ_6	ρ_7/ρ_2	ρ_7/ρ_5	Z_{s5}	Z_{s6}	Z_{s7}	
1.26	1.56	1.40	1.02	1.31	1.35	1.03	

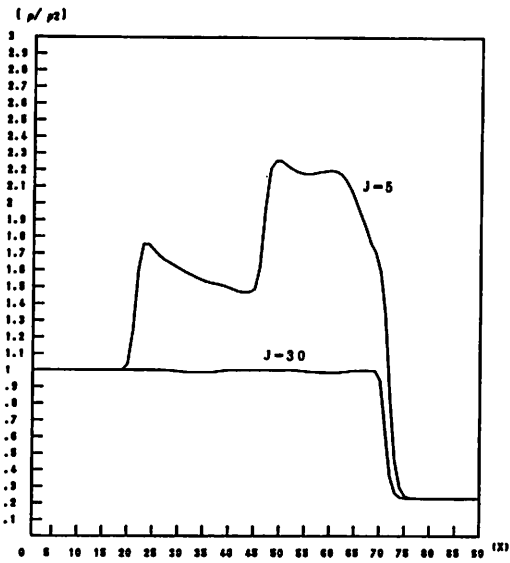


Fig. 12-(c)-2 density distributions
 ($M_s=3.0, \theta_{w1}=20^\circ, \theta_{w2}=40^\circ$)