

# ラグランジュ・シャルピ法による積形 非線形システムのリアプノフ関数構成

宮城 雅夫\*・宮城 隼夫\*\*

## CONSTRUCTION OF LYAPUNOV FUNCTION FOR PRODUCT-TYPE NONLINEAR SYSTEMS USING THE LAGRANGE-CHARPIT METHOD

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

The direct method of Lyapunov is used to study the stability of a system with product-type nonlinearities. The Lyapunov function, which is based on a solution obtained from a linear partial differential equation, is given by using the Lagrange-Charpit method. The product-type nonlinear system is originated from a generator system, taking into account the effects of variable damping and field flux decay. The Lyapunov function obtained in this paper is employed in estimating the stability boundary of the system, showing the superiority of the proposed function.

Key words : Lyapunov function, Lagrange-Charpit method, Product-type nonlinear system, generator system.

### 1. 緒 言

非線形システムの安定性を解析する手法として、近年リアプノフ法が有力視されている。リアプノフ法の特長として、システムの解の挙動を調べる必要がなく直接にシステムの原点の安定性が論じられることがあげられる。さらに、局所安定なシステムに対してはその漸近安定領域にまで言及でき、解析のみならずシステムの設計に対しても有効である。しかしながら、リアプノフ法によって与えられる安定判別は十分条件であり、多くの工学の問題では控え目すぎる結果となっている。したがって、工学的にはより広い漸近安定領域を保証するリアプノフ関数の構成が重要となり、この点を考慮した関数構成法について幾つかの研究結果が報告されている<sup>1)~6)</sup>。非線形システムの代表的リアプノフ関数構成法として知られる Anderson 氏ら<sup>6)</sup>の手法は、ポポフの条件から導かれる安定条件と等価なルーリエ形リアプノフ関数を得る優れた手法であ

り、各方面で採用されている<sup>7)~10)</sup>。しかしながら、適用システムがいわゆる非線形フィードバック制御システム<sup>7)</sup>に限られ、工学の分野でしばしば見られる積形の非線形性を有するシステムに直ちに適用することはできない。もう一つの代表的関数構成法として Zubov 法<sup>1)</sup>もあるが、この手法は級数打ち切りの問題、並びにリアプノフ関数構成の糸口を与えるスカラ関数の推測が困難であるという問題点がある。最近、偏微分方程式の代表的解法であるラグランジュ・シャルピ法<sup>3,4)</sup>をリアプノフ関数構成に適用した一つの新しい関数構成法が提案された。この手法は積形の非線形性を有するシステムに対しても適用できるうえ、得られる関数も真の漸近安定領域にかなり近い安定領域を保証することが知られている。

一方、発電機システムの安定性の解析にリアプノフ法を適用した論文<sup>1)~5)</sup>も数多く見られ、多くの有用な結果が得られている。本論文では、発電機システムにおいて非線形制動<sup>3)</sup>並びに鎖交磁束減衰<sup>5)</sup>の諸特性

\*第一工業大学 機械工学科

\*\*琉球大学工学部 (〒903 沖縄県中頭郡西原町千原1)

を考慮した場合、積形非線形性を有するシステムになることに着目し、このシステムのリアプノフ関数をラグランジュ・シャルビ法によって構成する。得られるリアプノフ関数はエネルギー関数など従来のリアプノフ関数を含む一般的リアプノフ関数となる。さらに、本論文で提案する関数は保証する漸近安定領域の点でも優れていることが示される。

本論文で用いられるラグランジュ・シャルビ法については次章にその大要を記した。

### 2. ラグランジュ・シャルビ法

非線形なオートノマスシステムは一般に次式で表わされる。

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $x$  は  $n$  次元ベクトル、 $f(x)$  は  $n$  次元ベクトル関数であり、 $x=0$  は平衡点を表わす。

ラグランジュ・シャルビ法によれば、リアプノフ関数  $V$  は偏微分方程式

$$F(x, V, P) = P^T f(x) + \psi(x) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

を解くことによって求められる。ここで、 $P = \partial V / \partial x$  であり、 $\psi$  は任意の非負値関数である。

(2)式を解くための補助方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\partial F} &= \frac{dx_2}{\partial F} = \dots = \frac{dx_n}{\partial F} \\ &= \frac{-dP_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + P_1 \frac{\partial F}{\partial V}} = \frac{-dP_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + P_2 \frac{\partial F}{\partial V}} = \dots \\ &= \frac{-dP_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + P_n \frac{\partial F}{\partial V}} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

で与えられる。このとき  $\partial F / \partial x_1, \partial F / \partial x_2, \dots, \partial F / \partial x_n$  はそれぞれ  $\partial \psi / \partial x_1, \partial \psi / \partial x_2, \dots, \partial \psi / \partial x_n$  を含む。

上式より少なくとも  $P$  の一つの成分を含む  $n - 1$  個の関係式

$$\left. \begin{aligned} G_1(x, V, P, \partial \psi / \partial x) &= 0 \\ G_2(x, V, P, \partial \psi / \partial x) &= 0 \\ &\vdots \\ G_{n-1}(x, V, P, \partial \psi / \partial x) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left( \begin{array}{l} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} x_2 \\ -[D(x_1)x_2 + K_1(x_3 + e) \sin(x_1 + \delta_0) - P_1] / M \\ -\eta_1 x_3 - \eta_2 g(x_1) \end{array} \right) \dots\dots\dots (12)$$

ただし

が導出されるものとすれば、これらの  $G_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) と(2)式の  $F$  が共通解を有するために、次式の関係が満足されねばならない。

$$[G_i, F] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{dG_i}{dx_k} \frac{\partial F}{\partial P_k} - \frac{dF}{dx_k} \frac{\partial G_i}{\partial P_k} \right) \dots\dots\dots (5)$$

ただし

$$\frac{dG_i}{dx_k} = \frac{\partial G_i}{\partial x_k} + P_k \frac{\partial G_i}{\partial V} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $[G_i, F]$  が  $P$  の関数ならば、さらに  $[G_i, F] = G_s$  と置き、すべての  $G$  と  $F$  が共通解をもつようにする。したがって未知関数  $\partial \psi / \partial x$ 、 $\psi$  は次のヤコビの括弧式の零になる条件を満足し、かつ  $\psi$  が非負値関数となるように決定される。

$$\left. \begin{aligned} [G_\ell, G_m] &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{dG_\ell}{dx_k} \frac{\partial G_m}{\partial P_k} - \frac{dG_m}{dx_k} \frac{\partial G_\ell}{\partial P_k} \right) = 0 \\ [G_s, F] &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{dG_s}{dx_k} \frac{\partial F}{\partial P_k} - \frac{dF}{dx_k} \frac{\partial G_s}{\partial P_k} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $\ell, m = 1, 2, \dots, \max[s], s > n - 1, \ell \neq m$ 。

$\psi$  はその非負値性の証明の容易さから、 $x$  に関する2次形式の項を含むことが望ましいので、 $[G_i, F] = G_s$  の置換えは(7)式の偏微分方程式が  $\psi$  についての2階偏微分形を含むまで続けられる。

$\psi$  が決定されたのち、もし(2)、(4)式から

$$P = P(x, V) \dots\dots\dots (8)$$

として求められるならば

$$P^T dx = (VV)^T dx \dots\dots\dots (9)$$

は積分可能であり、所望のリアプノフ関数  $V$  とその時間微分  $\dot{V}$  は

$$V(x) = \int_0^x P^T dx \dots\dots\dots (10)$$

$$\dot{V} = -\psi(x) \dots\dots\dots (11)$$

として与えられる。ただし、この時点で  $V$  は正定値の条件を満たしているものとする。

### 3. 積形非線形システム

発電機(同期機)システムにおいて、非線形制動並びに鎖交磁束減衰の諸特性を考慮すれば、次に示すような積形の非線形システム<sup>1)~3)</sup>となる。

$$D(x_1) = a_1 \cos^2(x_1 + \delta_0) + a_2 \sin^2(x_1 + \delta_0) \quad , \quad a_1 > a_2$$

$$g(x_1) = \cos \delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0) \quad , \quad P_1 = K_1 e \sin \delta_0$$

であり、 $M, K_1, e, \delta_0, \eta_1, \eta_2$  は正の定数である。(12式において  $x_1$  は発電機の位相角の変化、 $x_2$  は角速度の変化を表わす変数である。また鎖交磁束減衰の効果は  $x_3$  の変化によって表わされる。従来は非線形制動係数  $D(x_1)$  を定数で近似したり、あるいは磁束減衰の効果を見捨て、1個の積形の非線形項をもつシステムのリアプノフ関数を構成しているが、本論ではこの両特性を同時に考慮した積形非線形システムを対象とする。

#### 4. リアプノフ関数構成

ラグランジュ・シャルビ法によれば、(12式のシステムに対するリアプノフ関数  $V$  は(2)式を解くことによって求められる。このとき、補助方程式は(3)式で与えられるが、これより2個の偏微分方程式

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \int_0^{x_1} \alpha(x_1) dx_1 + \beta x_2 - P_2 = 0 \\ G_2 &= \int_0^{x_1} \gamma(x_1) dx_1 + \xi x_3 - P_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

と、(13式が成立するための条件式

$$\left. \begin{aligned} G_3 &= \alpha(x_1)x_2 - \beta |D(x_1)x_2 + K_1(x_3 + e) \sin(x_1 + \delta_0) - P_1| / M + P_1 - |D(x_1)/M| P_2 + \partial \psi / \partial x_2 = 0 \\ G_4 &= \gamma(x_1)x_2 - \xi |\eta_1 x_3 + \eta_2 g(x_1)| - P_2 (K_1/M) \sin(x_1 + \delta_0) - P_3 \eta_1 + \partial \psi / \partial x_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

が得られる。(13, (14)式において  $\beta, \xi$  は任意定数、 $\alpha(x_1), \gamma(x_1)$  は  $x_1$  についての任意関数である。

FとこれらのGに対して(7)式を適用すれば

$$2|\alpha(x_1) - \beta D(x_1)/M| + \partial^2 \psi / \partial x_2^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\gamma(x_1) - \beta (K_1/M) \sin(x_1 + \delta_0) + \partial^2 \psi / \partial x_3 \partial x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\gamma(x_1) - \beta (K_1/M) \sin(x_1 + \delta_0) + \partial^2 \psi / \partial x_2 \partial x_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$2\xi \eta_1 - \partial^2 \psi / \partial x_3^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} &\xi \eta_2 \sin(x_1 + \delta_0) - |d\gamma(x_1)/dx_1| x_2 + \alpha(x_1) (K_1/M) \sin(x_1 + \delta_0) \\ &+ (K_1/M) \cos(x_1 + \delta_0) \int_0^{x_1} \alpha(x_1) dx_1 + \beta (K_1/M) x_2 \cos(x_1 + \delta_0) + \eta_1 \gamma(x_1) - \partial^2 \psi / \partial x_3 \partial x_1 = 0 \quad \dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(K_1/M) (x_3 + e) \cos(x_1 + \delta_0) \int_0^{x_1} \alpha(x_1) dx_1 + \eta_2 \sin(x_1 + \delta_0) \int_0^{x_1} \gamma(x_1) dx_1 + \eta_2 \xi x_3 \sin(x_1 + \delta_0) \\ &+ \alpha(x_1) [K_1(x_3 + e) \sin(x_1 + \delta_0) - P_1] / M + \gamma(x_1) (\eta_1 x_3 + \eta_2 g(x_1)) \\ &+ (\partial^2 \psi / \partial x_2 \partial x_1) x_2 - \partial \psi / \partial x_1 + [|d\alpha(x_1)/dx_1| - (\beta/M) |dD(x_1)/dx_1|] x_2^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

が導出される。(15)~(20)式を用いて  $\psi$  を決定すれば結果的に次式となる。

$$\begin{aligned} \psi &= |\beta D(x_1)/M - \alpha(x_1)| x_2^2 + \Phi(x_1) x_2 + |\beta (K_1/M) \sin(x_1 + \delta_0) - \gamma(x_1)| x_2 x_3 \\ &+ \xi \eta_1 x_3^2 + \xi \eta_2 g(x_1) x_3 + (K_1/M) x_3 \sin(x_1 + \delta_0) \int_0^{x_1} \alpha(x_1) dx_1 + \eta_1 x_3 \int_0^{x_1} \gamma(x_1) dx_1 \\ &+ (1/M) |K_1 e \sin(x_1 + \delta_0) - P_1| \int_0^{x_1} \alpha(x_1) dx_1 + \eta_2 g(x_1) \int_0^{x_1} \gamma(x_1) dx_1 \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

上式において、任意定数  $\xi$  と任意関数  $\gamma(x_1)$  を

$$\xi = (\beta K_1 \eta_1) / (M \eta_2), \quad \gamma(x_1) = \beta (K_1/M) \sin(x_1 + \delta_0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

と選び、さらに

$$\beta = 1, \quad \alpha = \alpha' \frac{D(x_1)}{M}, \quad S(x_1) = \int_0^{x_1} D(x_1) dx_1 \quad \dots\dots\dots (23)$$

と置き換えたのち

$$\Phi(x_1) = -\frac{2}{M} \sqrt{\alpha'(1 - \alpha') D(x_1) L(x_1) S(x_1)}, \quad 0 \leq \alpha' \leq 1 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$L(x_1) = \frac{1}{M} \left[ K_1 \left\{ e - \frac{\eta_2}{\eta_1} g(x_1) - \frac{\alpha' \eta_2 S(x_1)}{4M \eta_1^2} \sin(x_1 + \delta_0) \right\} \sin(x_1 + \delta_0) - P_1 \right] \dots\dots\dots (25)$$

に選定すれば、 $\psi$ は次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} \psi = -\dot{V} = & \frac{1}{M} \left[ \sqrt{(1-\alpha')D(x_1)x_2 - \sqrt{\alpha'L(x_1)S(x_1)}}^2 \right. \\ & \left. + K_1 \left| \sqrt{\frac{1}{\eta_2}} (\eta_1 x_3 + \eta_2 g(x_1)) + \frac{\alpha' \sqrt{\eta_2}}{2\eta_1 M} S(x_1) \sin(x_1 + \delta_0) \right|^2 \right] \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

上式を見れば、 $\dot{V}$ が所望の定値性を満足することがわかる。また、(13)、(14)式さらに(26)式の関係を用いれば

$$\begin{aligned} P_1 = & \frac{\alpha'}{M^2} D(x_1)S(x_1) + \frac{\alpha'}{M} D(x_1)x_2 + \frac{2}{M} \sqrt{(1-\alpha')\alpha'D(x_1)S(x_1)L(x_1)} \\ & + \{ K_1(x_3 + e) \sin(x_1 + \delta_0) - P_1 \} / M \\ P_2 = & (\alpha' / M) S(x_1) + x_2 \\ P_3 = & (K_1 \eta_1 / M \eta_2) x_3 + (K_1 / M) g(x_1) \end{aligned} \dots\dots\dots (27)$$

が得られるので、これに(10)式を適用することにより次のリアプノフ関数が導かれる。

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} |x_2 + \frac{\alpha'}{M} S(x_1)|^2 + \frac{K_1}{2M} \left| \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} x_3 + \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}} g(x_1) \right|^2 + \frac{\alpha'}{2M^2} (1-\alpha') S^2(x_1) \\ & + \frac{2}{M} \sqrt{\alpha'(1-\alpha')} \int_0^{x_1} \sqrt{D(x_1)S(x_1)L(x_1)} dx_1 + \frac{1}{M} \left[ K_1 \left\{ e - \frac{\eta_2}{2\eta_1} g(x_1) \right\} g(x_1) - P_1 x_1 \right] \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

Vの正定値性は文献5と同様な手法により証明される。(28)式において $\alpha' = 0$ に選べばエネルギー関数が得られる。セクター条件 $x_1 L(x_1) > 0$ は選ばれる $\alpha'$ の値によって変化するが、最適な $\alpha'$ の選定については、より大きな $V_{max}$ (しきい値)を与える $\alpha'$ の値が一つの目安となる。

プノフ関数( $\alpha' = 0.24$ )はルーリエ形に対応するリアプノフ関数( $\Phi = 0, \alpha' = 0.24$ )やエネルギー関数( $\alpha' = 0$ )より広い安定領域を保証する。なお $\alpha' = 0.24$ の値は図1において最大の $V_{max}$ を与える $\alpha'$ の値である。

5. 例題計算

本章では、提案するリアプノフ関数によって保証される安定領域を具体的に描き、得られる結果が従来のリアプノフ関数より優れていることを示す。システム定数としては $M=0.035, K_1=0.77, e=1.03, \delta_0=0.316, \eta_1=0.25, \eta_2=0.1$ を採用する<sup>5)</sup>。リアプノフ関数を安定領域の評価に使用するには、まず安定限界を与えるVのしきい値( $V_{max}$ )を求めねばならないので、各種の $\alpha'$ に対する $V_{max}$ を計算し、その結果を図1に示した。図2、3、4は各種リアプノフ関数によって保証される安定限界を描いたものであり、図2が $x_3 = 0$ とした場合の断面図、図3、4はそれぞれ $x_2 = 0, x_1 = 0$ とした場合の断面図を示している。もし制動係数 $D(x_1)$ が定数なら(28)式は文献7で述べられている非ルーリエ形リアプノフ関数となり、さらに関数構成段階で(24)式で与えられる $\Phi(x_1)$ を0に選べばルーリエ形リアプノフ関数となる。図2~4からわかるように、非ルーリエ形に相当する(28)式のリア

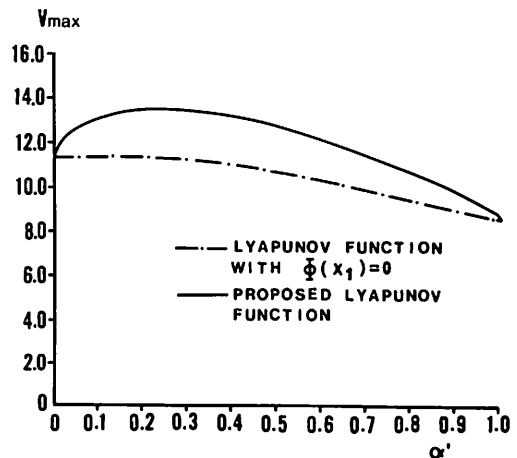


図1  $\alpha'$ 対 $V_{max}$ 曲線

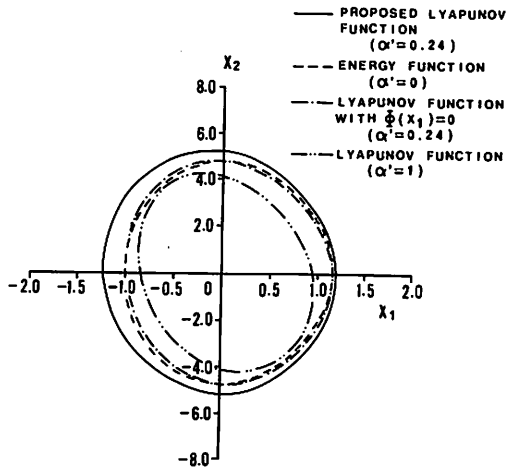


図2 安定領域の断面図 ( $x_3 = 0$ )

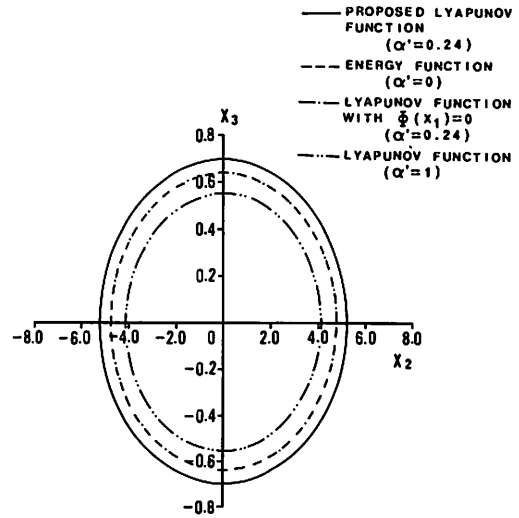


図4 安定領域の断面図 ( $x_1 = 0$ )

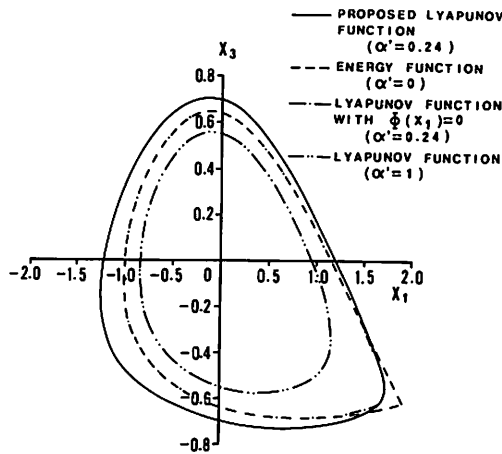


図3 安定領域の断面図 ( $x_2 = 0$ )

## 6. 結 言

発電機システムにおいて非線形制動と鎖交磁束減衰の効果を考慮すれば積形の非線形システムとなり、このシステムのリアプノフ関数をラグランジュ・シャルビ法によって構成した。本論文で提案される関数は従来形のリアプノフ関数より優れていることが示された。

## 文 献

- 1) DeSarKer, A. K., Dharma Rao, N., Proc. IEE, 118-8 (1971), 1035.
- 2) Pai, M. A., Rai, V., Int. J. Control, 20-4 (1974), 817.
- 3) Miyagi, H., Taniguchi, T., Proc. IEE, 128-3 (1981), 117.
- 4) Miyagi, H., IEEE Trans. Autom. Control, 29-12 (1984), 1120.
- 5) 宮城, 計自論, 18-9 (昭57), 893.
- 6) Moore, J. B., Anderson, B. D. O., J. Franklin Inst., 285-6 (1968), 488.
- 7) Miyagi, H., Yamashita, K., IEEE Trans. Autom. Control, 31-10 (1986), 970.
- 8) 宮城, 宮城, 計自論, 23-3 (昭62), 247.
- 9) Miyagi, N., Miyagi, H., ASME DS, 109-4(1987), 410.
- 10) Miyagi, H., Bergen, A. R., IEEE Trans. Autom. Control, 31-3 (1986), 210.