

弱い衝撃波のマッハ反射に関する研究

灘光 陽*1・本田 隆志*1

Investigation of the Mach reflection of weak shock waves

Yoh NADAMITSU and Takashi HONDA

The results of a weak uniform plane shock wave propagating in the rest air and impinging on a ramp with a small angle θ_w were calculated using a TVD scheme by Harten and a potential theory by Lighthill. In this case the Mach numbers of a incident shock wave are 1.105, 1.240 and 1.415. They have referred to other author's experimental results. A comparison of the two methods showed a good agreement with a tendency of the Mach stem shock strength.

Key words: Compressible Flow, Weak Shock Wave, Mach Reflection, Potential Theory, Numerical Calculation, TVD Scheme

1. まえがき

静止気体中を伝ばする平面衝撃波が傾斜面に入射する際の反射形態は、入射衝撃波マッハ数、傾斜面の角度および気体の熱物性によって、通常、正常反射とマッハ反射（単純マッハ反射、複合マッハ反射、二重マッハ反射）に分けられ、従来から多くの理論的、実験的研究がなされている。¹⁾²⁾ これらの反射形態のうち単純マッハ反射領域で、弱い平面衝撃波が比較的小さな角度の傾斜面に入射し弱いマッハ反射を生じる場合マッハ衝撃波が傾斜面頂点（コーナー点）の方へ緩やかに湾曲し³⁾、マッハ衝撃波および三重点近傍の流れは非一様で、衝撃波のマッハ反射に関する三衝撃波理論は実験結果を十分に説明できない。この弱い衝撃波背後の非一様な流れの物理量を記述できる理論を見出すことや、数値計算スキームによる予測の確認は衝撃波現象の解析や衝撃波の応用の面から意義がある。本報では、この弱いマッハ反射のマッハ衝撃波面形状および強さに対し、Lighthillの理論⁴⁾による計算結果およびDewey⁵⁾⁶⁾らによる実験からの解析結果、数値シミュ

レーション（二次元非定常オイラー方程式をYeeとHartenによる陽的TVDスキーム⁷⁾で数値解析）の結果を比較検討する。

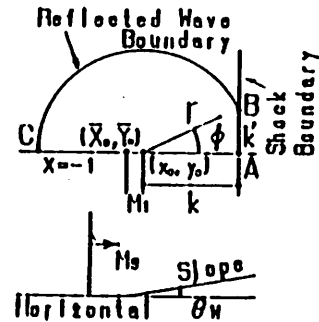


図1 (x, y) 平面

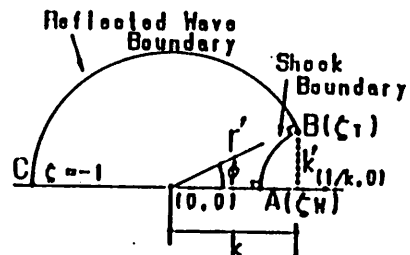


図2 ζ 平面

*本研究の一部は日本機械学会沖縄地方講演会において講演

*1機械工学科

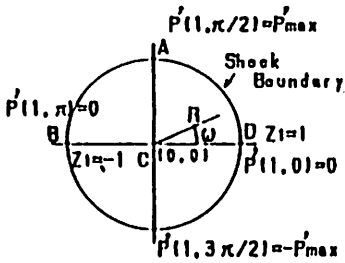


図3 \$Z_1\$ 平面

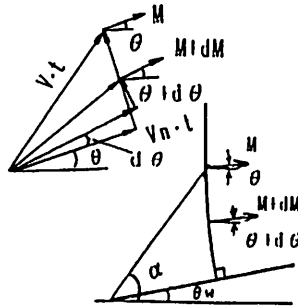


図4 (2), (3)式の解析モデル

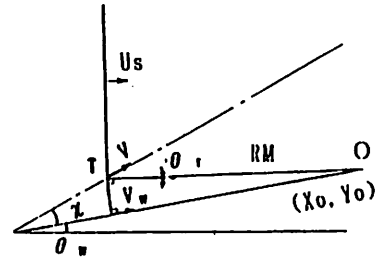


図5 (4)式の解析モデル

2. ポテンシャル問題としての解法

静止気体中を伝ばする平面衝撃波が小さな角度 \$\theta_w\$ の傾斜面に入射し、弱いマッハ反射を生じた時、入射後の物理量の変化は微小であると仮定し、粘性、熱伝導性を無視した場合、マッハ衝撃波直後の圧力変動 \$P'\$ の関係式は次のようになる。

$$\frac{\partial P'}{\partial \omega} = \frac{4C_1 C_4 \theta_w (C_2(1+2\cot^2 \omega - C_0) - 1)}{[\sqrt{2(1+2\cot^2 \omega - C_0)} (C_3^2 + 2(C_4^2 - 2C_3)\cot^2 \omega + 4\cot^2 \omega) \sin \omega \tan \omega]} \quad \dots\dots(1)$$

ただし、

$$x = \frac{\bar{X} - q_1 t}{a_{1t}}, \quad y = \frac{\bar{Y}}{a_{1t}}, \quad P' = \frac{P_2 - P_1}{a_1 q_1 \rho_1}$$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad r' = [1 - (1 - r^2)^{\frac{1}{2}}] / r$$

$$0 < \omega < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \phi = \pm \frac{k'}{k \sqrt{\tan^2 \omega + 1}}$$

$$\zeta = r' e^{i\phi}, \quad Z_1 = \frac{i(\zeta_w - 1)(\zeta + 1)}{(\zeta_w + 1)(\zeta - 1)}$$

$$\zeta_w = (1 - k')/k, \quad k' = (1 - k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta_r = k + ik'$$

$$k = \left[\frac{(\gamma - 1)M_2^2 + 2}{2\gamma M_2^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$C_0 = - \frac{\{(M_1^2 - 1)(1 - k^2) + (M_1 + k)^2\}}{(M_1 k + 1)^2}$$

$$M_1 = \frac{2(M_2^2 - 1)}{[(2\gamma M_2^2 - (\gamma - 1))(\gamma - 1)M_2^2 + 2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$C_1 = \frac{\{C_3 + C_4(1 - C_0)^{\frac{1}{2}} + (1 - C_0)\} |1 - C_0^{\frac{1}{2}}|^{\frac{1}{2}} M_1}{\pi |1 - M_1^2|^{\frac{1}{2}}}$$

$$C_2 = \frac{C_3}{C_3^2 + C_4 C_5 + C_3} \left[\frac{(M_1 k + 1)^2}{2C_6 M_1 (M_1 + k)} + \frac{C_4 + C_5}{C_3 C_5} \right]$$

$$C_3 = 2M_2^2, \quad C_4 = 2\sqrt{2} k M_2^2$$

$$C_5 = \frac{\sqrt{2}(M_1 + k)}{M_1 k + 1}$$

$$C_6 = \frac{(\gamma + 1)(M_2^2 - 1)}{2(\gamma + 1)M_2^2 + 4}$$

ここで、\$\rho\$ は密度、\$P\$ は圧力、\$q\$ は速度ベクトル、\$a\$ は音速、下添字 1 は入射衝撃波背後の値、下添字 2 は反射波背後の値を示す。\$\bar{X}\$ はコーナ点 \$(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)\$ からの距離、\$t\$ は入射衝撃波がコーナ点に到達してからの時間、\$\gamma\$ は気体の比熱比、\$M_2\$ は入射衝撃波マッハ数を示す。\$C_0 \sim C_6\$ は \$M_2\$ によって定まる定数である。マッハ衝撃波面の位置 \$(\bar{X}, \bar{Y})\$ は自己相似が保たれると仮定して次式で求めた。

$$\bar{X} = \frac{M}{M_s} \frac{\bar{X}_i \cos \alpha}{\cos(\alpha - \theta)}, \quad \bar{Y} = \bar{X} \tan \alpha \quad \dots\dots(2)$$

$$\bar{X}_i = U_s \cdot t, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \omega} = \frac{C_6}{k' \cos \omega} \frac{\partial P'}{\partial \omega}$$

$$\frac{dM}{d\theta} = M \tan(\alpha - \theta) \quad \dots\dots(3)$$

ここで、\$M\$ はマッハ衝撃波面に垂直な速度ベクトル \$V_n\$ に対するマッハ数、\$\theta\$ は \$V_n\$ と水平面を挟む角度、\$\alpha\$ は衝撃波面の位置ベクトル \$(V \cdot t)\$ と水平面を挟む角度である。(3)式は図4に示す衝撃波面の位置ベクトル関係、あるいはwhithamによるRay-Shock理論⁸⁾から導かれる。\$\bar{X}_i\$ はコーナ点から入射衝撃波までの距離である。

3. マッハ衝撃波面を円弧形状とした場合

Dewey⁵⁾⁶⁾らによって弱いマッハ反射のマッハ衝撃波面に対して、実験結果からその形状を多項関数の代わりに円弧で適合させる研究がなされた。図5に示すように傾斜面上に円の中心 \$O\$ があると仮定した場合、傾斜面上の衝撃波速度 \$V_w\$ を次式で与えている。

$$V_w = \frac{U_s (\sin(\chi + \theta_w - \theta_r) - \sin \chi)}{\sin(\theta_w - \theta_r) \cos(\chi + \theta_w)}$$

衝撃波面の位置 \$(\bar{X}, \bar{Y})\$ は図5の記号を用いて次式となる。

$$\bar{X} = X_0 - R_M \cos \theta$$

$$\bar{Y} = Y_0 - R_M \sin \theta \quad \dots\dots(4)$$

また、 $M = M_s \cdot \bar{X}(\cos \theta + \sin \theta \tan \alpha)$

ここで、 θ_T は三重重点(T)での衝撃波面に垂直な速度ベクトルと水平面を挟む角度、 χ は三重重点の軌跡角である。

4. 差分法による計算(数値シミュレーション)

一般座標系における理想気体の非定常・二次元・非粘性・圧縮流れの基礎方程式は次のように表すことができる。

$$\xi = \xi(X, Y) \quad \eta = \eta(X, Y)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad \dots\dots(5)$$

$$W = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad F = J \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x P \\ \rho v U + \xi_y P \\ (E+P)U \end{bmatrix}$$

$$G = J \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x P \\ \rho v V + \eta_y P \\ (E+P)V \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} J &= X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi \\ U &= \xi_x u + \xi_y v \\ V &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned}$$

また理想気体の圧力は次式によって定義される。

$$P = (\gamma - 1) [E - \rho(u^2 + v^2)/2]$$

ここで、 u は x 方向流速、 v は y 方向流速、 E は全エネルギーを示す。差分法の格子系の形状には $X = \xi$ 、 $Y = \eta + b(X)$ の変換式を用いた。得られた格子系の例を図6に示す。計算に用いた格子点数は傾斜面に対し X 方向450点とした。(5)式に対する差分近似は *strang type* の次元分割法で計算した。

$$W_{i,j}^{n+2} = L_\xi(\Delta t) L_\eta(\Delta t) L_\eta(\Delta t) L_\xi(\Delta t) W_{i,j}^n$$

$$L_\xi W_{i,j} = W_{i,j} - \lambda_\xi (\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j})$$

$$L_\eta W_{i,j} = W_{i,j} - \lambda_\eta (\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}} - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}})$$

$$\lambda_\xi = \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \quad \lambda_\eta = \frac{\Delta t}{\Delta \eta}$$

n は時間ステップ、 i, j は空間格子を示す。数値流束関数 \bar{F} 、 \bar{G} 内の制限関数は Roe の *superbee* を用いた。境界条件は傾斜面と水平面(下方境界)で滑り流れ条件とし、傾斜面・水平面に対する垂直方向の圧力勾配を0とした。上流・下流境界は水平方向に物理量の変化がないとした。また上方境界は垂直方向に物理量の変化はないとした。初期条件として、水平面に垂直に入射衝撃波を設定した。初期値の一例を以下に示す。

$$M_s = 1.105 \quad \gamma = 1.4$$

$$\begin{bmatrix} \rho_0 \\ P_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \rho_1 \\ P_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.178 \\ 1.258 \\ 0.197 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

ここで、下添字0は入射衝撃波前方を示し、1は入射衝撃波背後を示している。

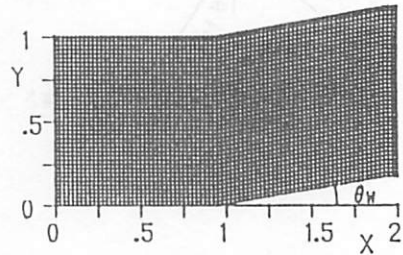


図6 格子系

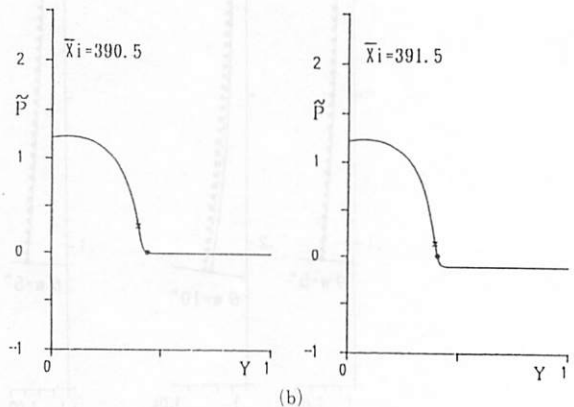
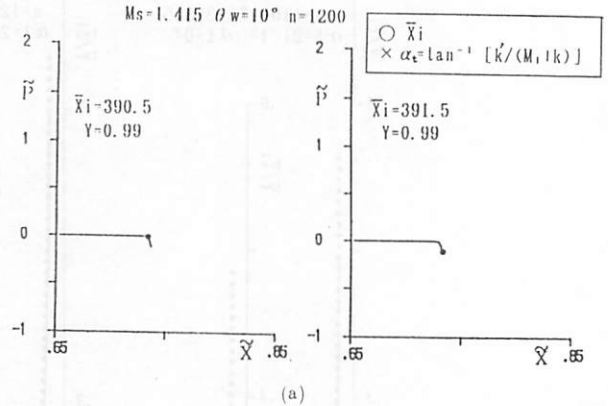


図7 シミュレーションに対する入射衝撃波境界と反射衝撃波境界

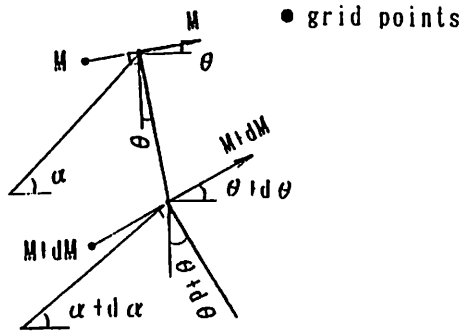


図 8 マッハ衝撃波面の位置と強さ

5. シミュレーションに対する入射衝撃波境界と反射衝撃波境界

弱いマッハ反射の場合、一般に反射衝撃波は非常に弱く、明確なすべり線も見られず、実験およびシミュレーション結果から三重点を特定することはむずかしい。本報では、シミュレーション結果に対して、入射衝撃波境界と反射衝撃波境界を格子点でとった。図 7 に一例を示している。図 7(a)は入射衝撃波境界を示し、横軸は $\bar{X} = (\bar{X} U_s) / (\bar{X} i a_1) - M_1$ 、 \bar{X} がコーナー点からの格子点数、 $\bar{X} i$ が入射衝撃波の位置に対するコー

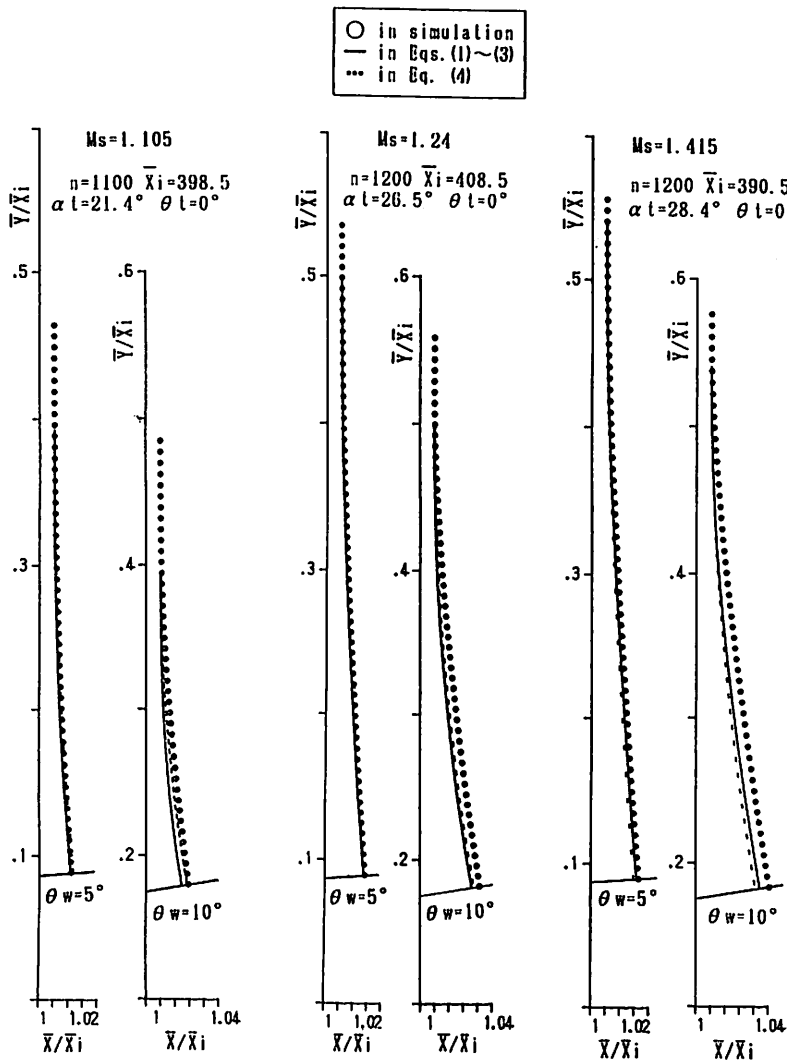


図 9 マッハ衝撃波面の位置

ナ一点からの格子点数で、図中○印で示している。本報ではコーナー点を格子点間に設定したので、5となっている。縦軸は圧力変動で、 $\bar{P} = (P_2 - P_1) / (\theta_w (P_1 - P_0))$ を用いている。 $\bar{P} = 0$ が入射衝撃波背後の状態量を示している。図7(b)は反射衝撃波境界を示し、y方向の \bar{P} の作図で、 \bar{X}_i に対する反射衝撃波境界の格子点を算出している ($Y = (J - 1) / (JMAX - 1)$)。×印は後述の α_i 近傍の格子点数で、反射衝撃波と入射衝撃波の交点を示している。

マッハ衝撃波面の座標点は、本報では図8の幾何学性と前述の(3)式を適用して算出している。黒丸は格子点を示し、マッハ衝撃波面直後の物理量は、 \bar{X}_i から下流側の格子点での圧力の最大値を用いている。

6. 結果と考察

図9は $\gamma = 1.4$ の気体に対するシミュレーション結果と解析結果をマッハ衝撃波面の位置で比較して示している。それぞれの M_s は文献(5)による値を用いている。実線は式(1)~(3)の計算結果、破線は式(4)の計算結果、シンボル記号がシミュレーション結果を示している。横軸と縦軸は式(2)の関係で、横軸の1は入射衝撃波の位置に対応し、各記号の最上位が反射衝撃波、入射衝撃波、マッハ衝撃波の交点、いわゆる三重点(本報は非粘性で、厳密には反射衝撃波境界と入射衝撃波境界の交点を示すと思われるが以下三重点と記す)を示す。各記号の最下位は傾斜面上の位置に相当し、下

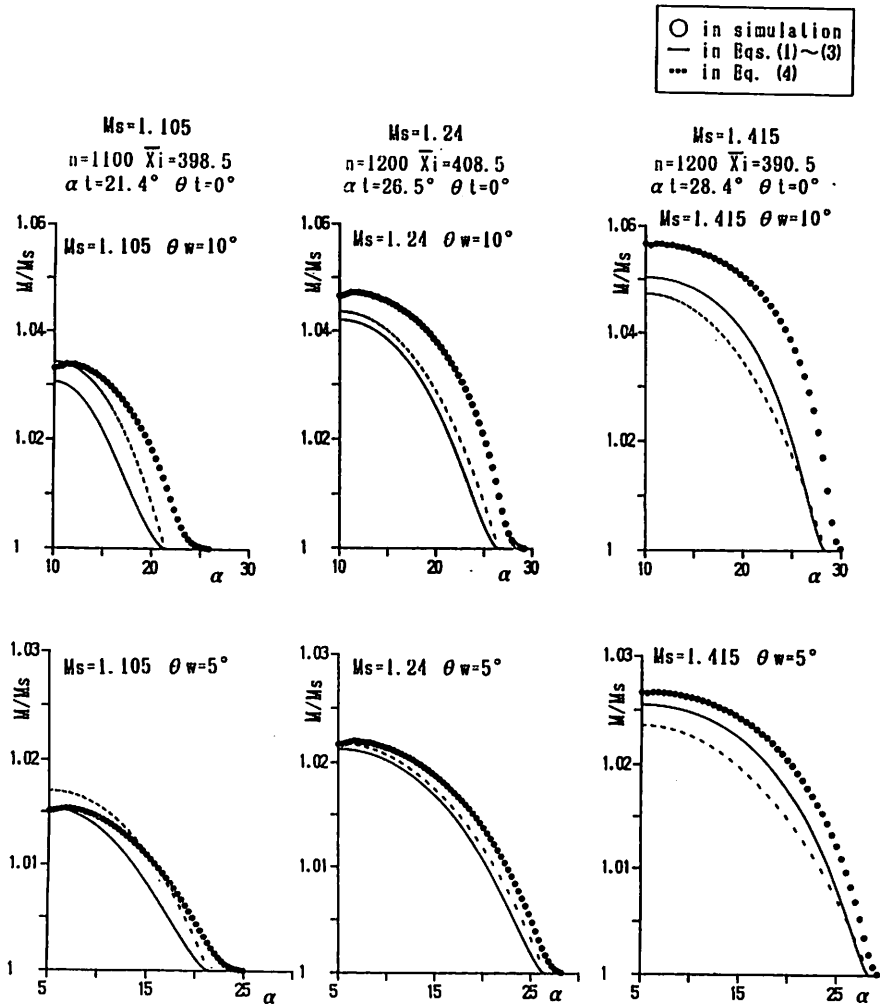


図10-(a) マッハ衝撃波の強さ (M/M_s)

添字 t は三重点を意味し、 α_t は Lighthill の理論による値である。 n はシミュレーションの時間ステップを表す。解析結果とシミュレーションによるマッハ衝撃波面は、三重点から傾斜面に向って緩やかに湾曲している。破線と実線を比較すると、図から大きな差は見られない。シミュレーション結果のマッハ衝撃波は、解析結果よりわずかに前方に位置している。そして定性的ではあるが、 $\theta_w = 10^\circ$ では三重点近くからシミュレーション結果と解析結果に位置の差が見られる。また $\theta_w = 5^\circ$ は $\theta_w = 10^\circ$ に比較してマッハ衝撃波面の曲率半径が大きいことが定性的に確認できる。図10-(a)は α に対するマッハ衝撃波の強さをマッハ数比の分布でシミュレーション結果と解析結果を比較して示

している。横軸との交点は三重点に相当し、縦軸との交点は傾斜面上のマッハ衝撃波に対応している。マッハ衝撃波面のマッハ数は三重点から傾斜面に向って緩やかに変化している。実線と破線は三重点近くで M_s によりその変化の割合が異なる。高い M_s に対して実線が破線より大きい。シミュレーション結果は交点から傾斜面側へ少し離れた領域でのマッハ数増加の割合が本計算の範囲内では低い M_s を除き解析結果より大きい。そしてその分布の傾向は実線に近いと思われる。そしてマッハ数の差は M_s が高くなるほど大きく、また $\theta_w = 5^\circ$ のシミュレーション結果は $\theta_w = 10^\circ$ に比較して解析結果に近づくことがわかる。図10-(b)はマッハ衝撃波の強さを圧力変動で示したものである。

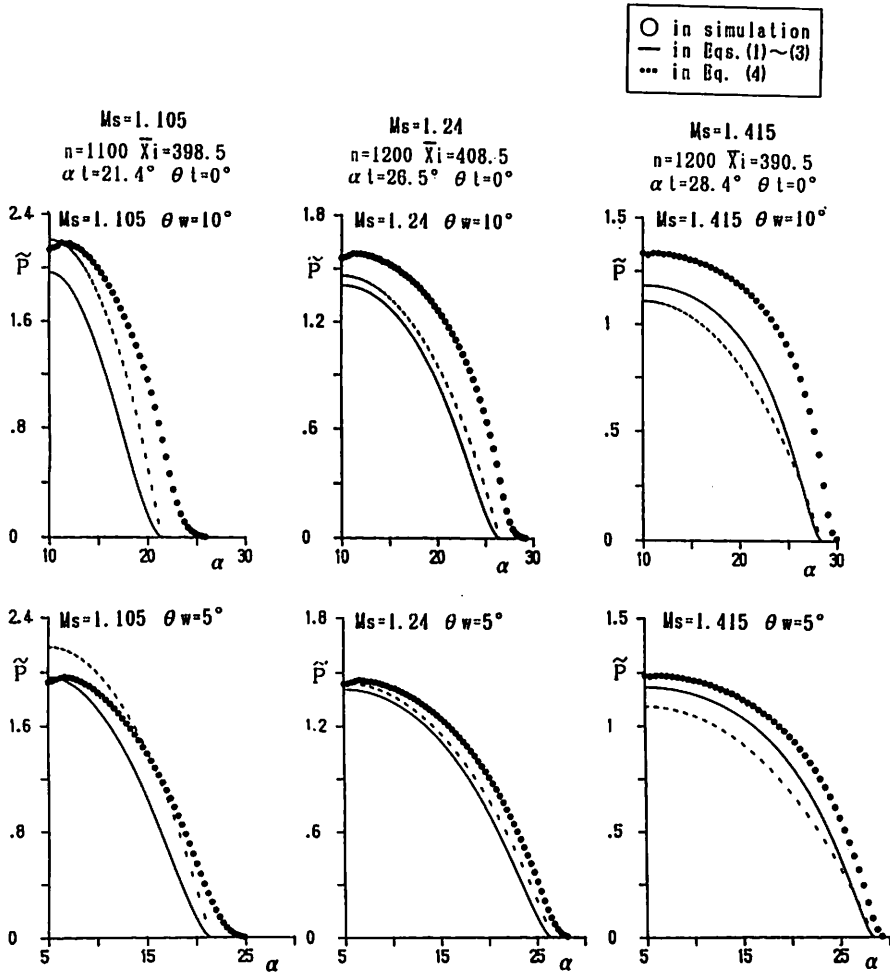


図10-(b) マッハ衝撃波の強さ (\bar{P})

Lighthill の理論は反射面で θ_w に比例するのに対し、シミュレーション結果は必ずしもそうでないことを示している。図11-(a)~(c)は、前図(図10-(a))の格子点前後の \bar{X}_i に対するマッハ数分布、入射衝撃波境界、反射衝撃波境界を比較して示している。 \bar{X}_i により、特に三重重点近くでわずかな差が見られる。図12-(a)は

文献(5)による実験結果からの α_i , θ_i に(4)式を用いた場合の解析結果とシミュレーション結果を比較して示している。破線がシンボル記号に近づくことが定性的にわかるが、 α に対するマッハ数の部分的な差がわずかに見られる。図12-(b)は文献(6)の反射衝撃波を含めた解析モデルで求めた θ_i を(4)式に用いた結果を示し

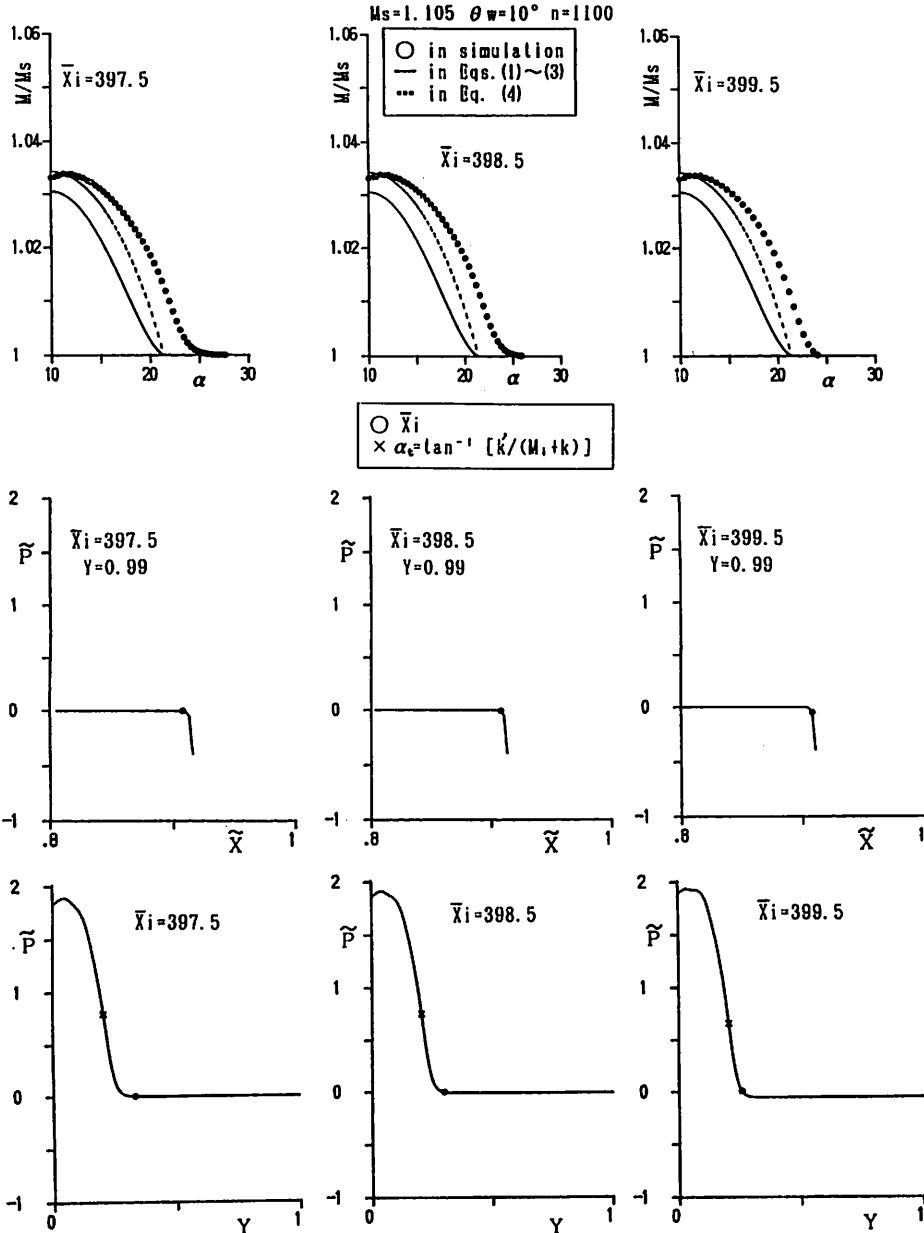


図11-(a) \bar{X}_i によるマッハ衝撃波の強さ、入射衝撃波境界、反射衝撃波境界の比較
($M_s = 1.105$ $\theta_w = 10^\circ$ $n = 1000$)

表1 図12に対する反射面上のマッハ衝撃波マッハ数
($\theta_w = 10^\circ$)

	$M_s = 1.105$	$M_s = 1.24$	$M_s = 1.415$
Ref(6)	1.144 ± 0.003	1.293 ± 0.003	1.487 ± 0.003
○	1.142	1.298	1.495
—	1.139	1.292	1.486
Ref(8)	1.144(1.146)	1.3(1.299)	1.494(1.490)
	1.150	1.306	1.503

Ref(6): experimental results Ref(8): ray shock theory

ている。シンボル記号の横軸の交点から破線の交点近くまでを三重点での圧力の変化と見ることもできる。これらの反射面での値を表1に示している。Ref(6)は Dewey らの実験値で、Ref(8)は Ray shock 理論による

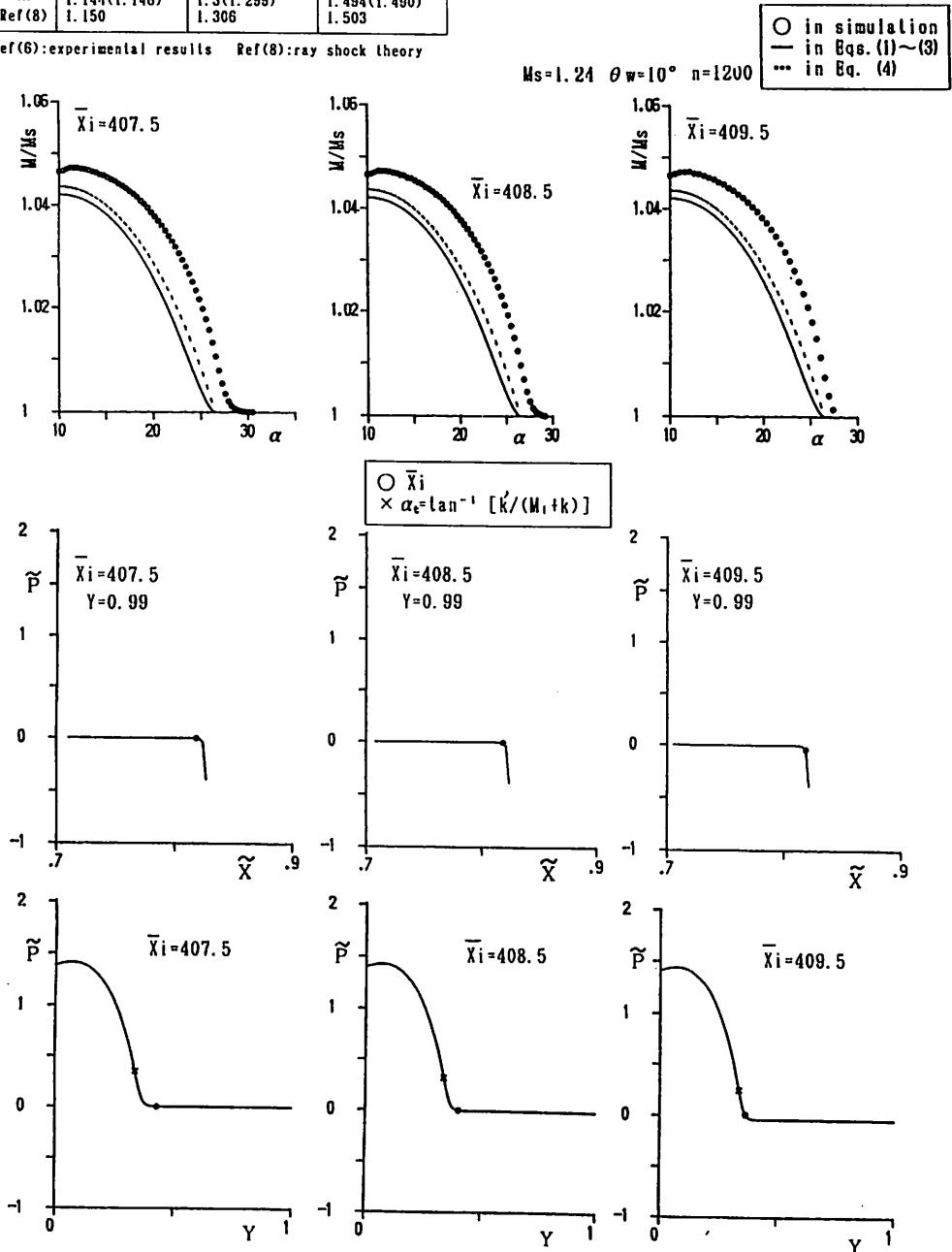


図11-(b) \bar{X}_i によるマッハ衝撃波の強さ、入射衝撃波境界、反射衝撃波境界の比較
($M_s = 1.24 \quad \theta_w = 10^\circ \quad n = 1200$)

値を示している。図13-(a)は $M_s = 2.01$, $\theta_w = 26.56^\circ$ に対するシミュレーション結果と Rayshock 理論 (実線) を比較して示している。この M_s と θ_w では三重点近傍がほとんど不連続で、マッハ衝撃波の変

化もわずかと思われる。図13-(b), (c)は等密度線図を示している。定性的ではあるが、 $M_s = 2.01$, $\theta_w = 26.56^\circ$ 以外は明確なすべり線は見られない。

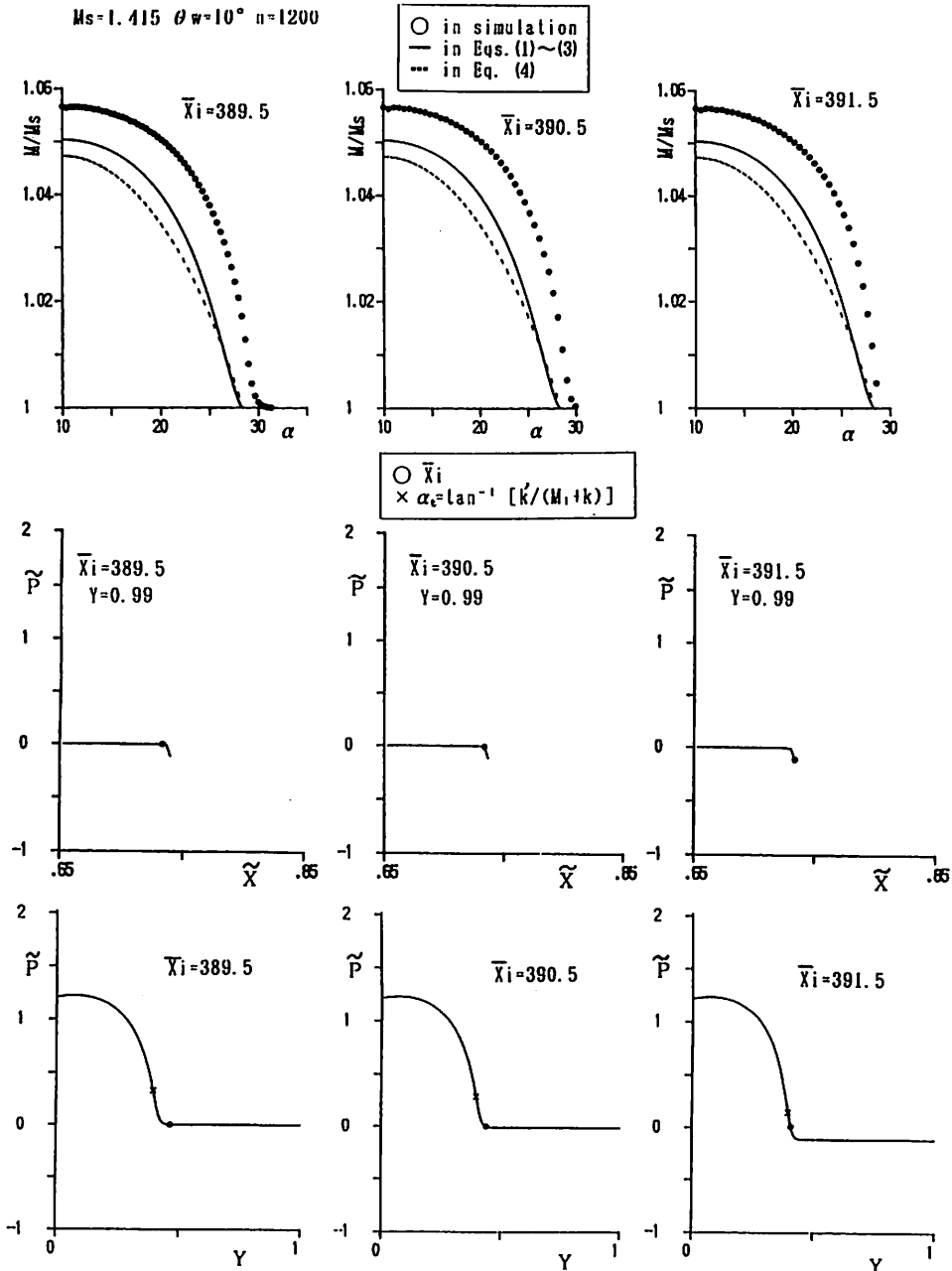


図11-(c) \bar{X}_i によるマッハ衝撃波の強さ、入射衝撃波境界、反射衝撃波境界の比較 ($M_s = 1.415$ $\theta_w = 10^\circ$ $n = 1200$)

(Ref. (5), (6) の αt 、 θt を用いた場合)

○ in simulation
 — in Eqs. (1)~(3)
 ... in Eq. (4)

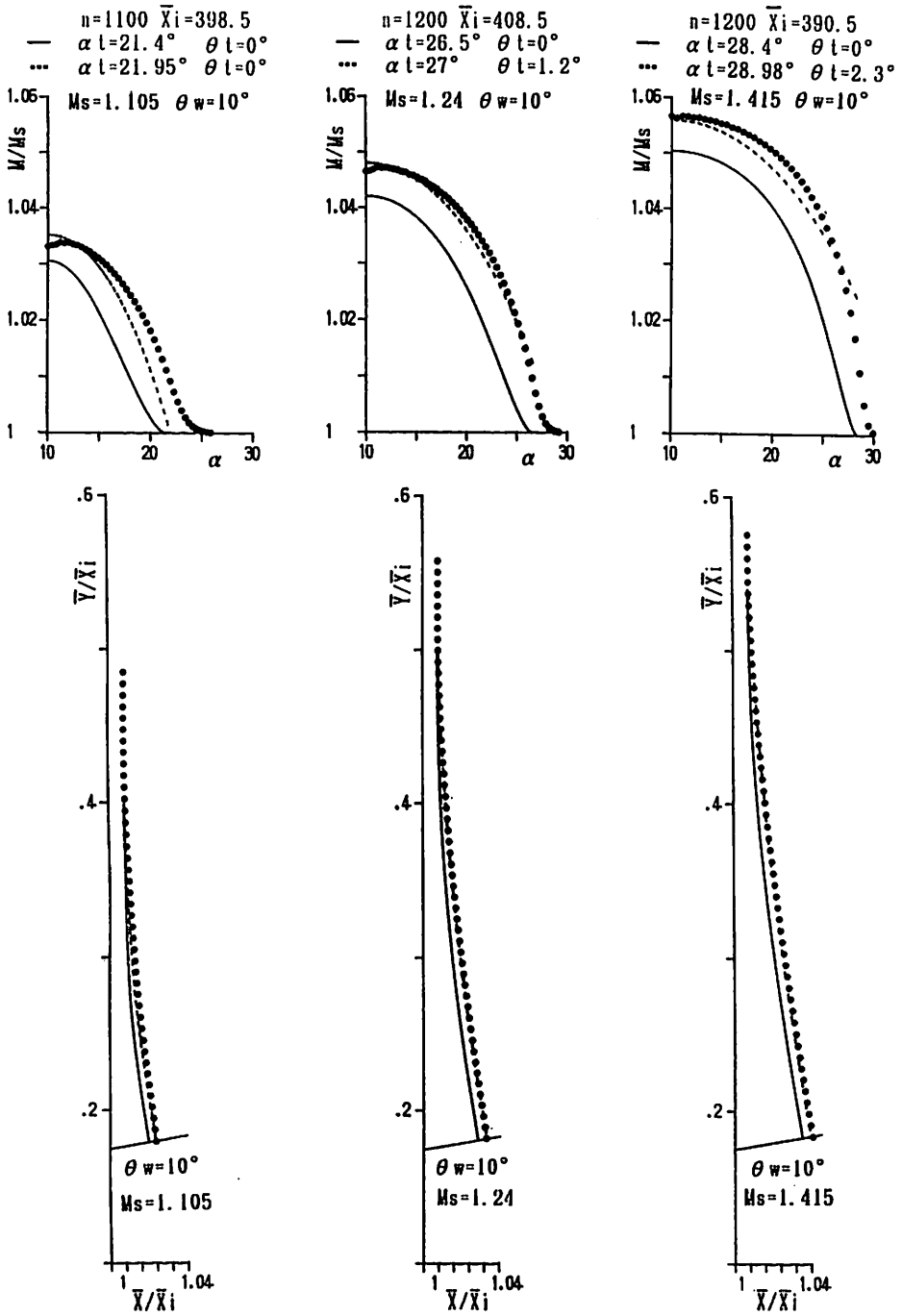


図12-(a) マッハ衝撃波の位置と強さ

(Ref. (5), (6) の αt 、 θt を用いた場合)

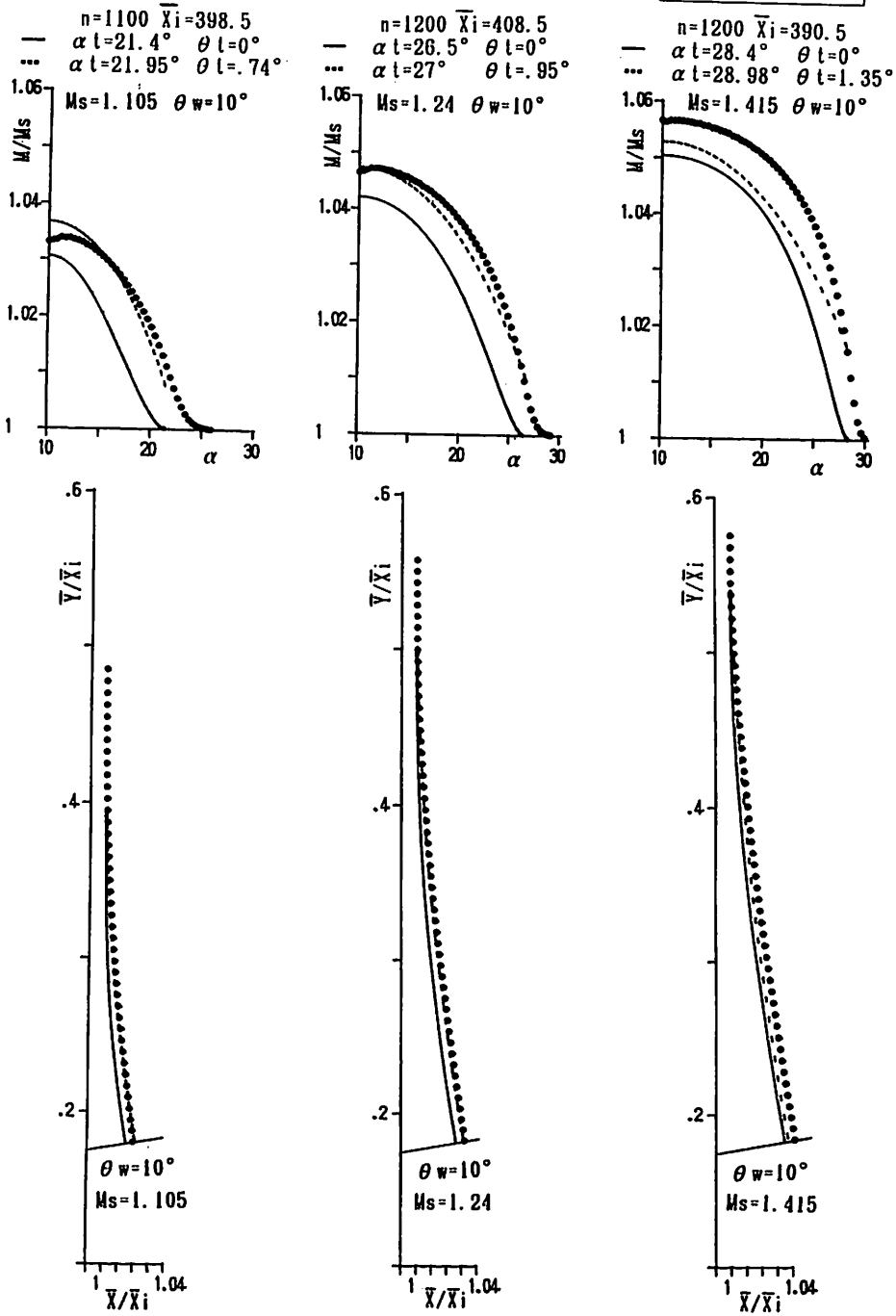


図12-(b) マッハ衝撃波の位置と強さ

$M_s=2.01$ $\theta_w=26.56^\circ$ $n=1200$

○ in simulation
 — Ray Shock Theory ($\alpha=10.1^\circ$)

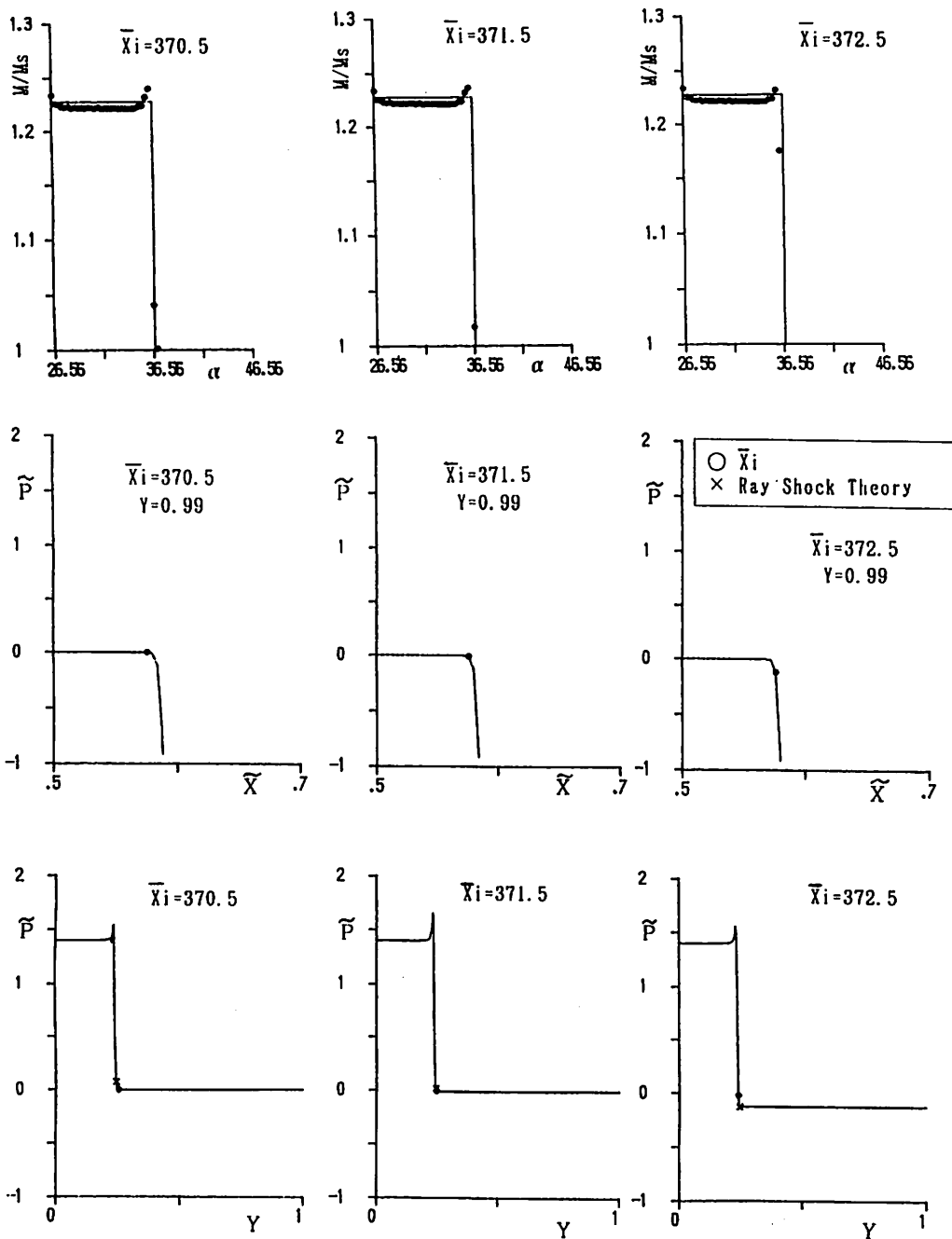


図13-(a) 比較的強い入射衝撃波に対するシュミレーション結果と Ray shock 理論の比較

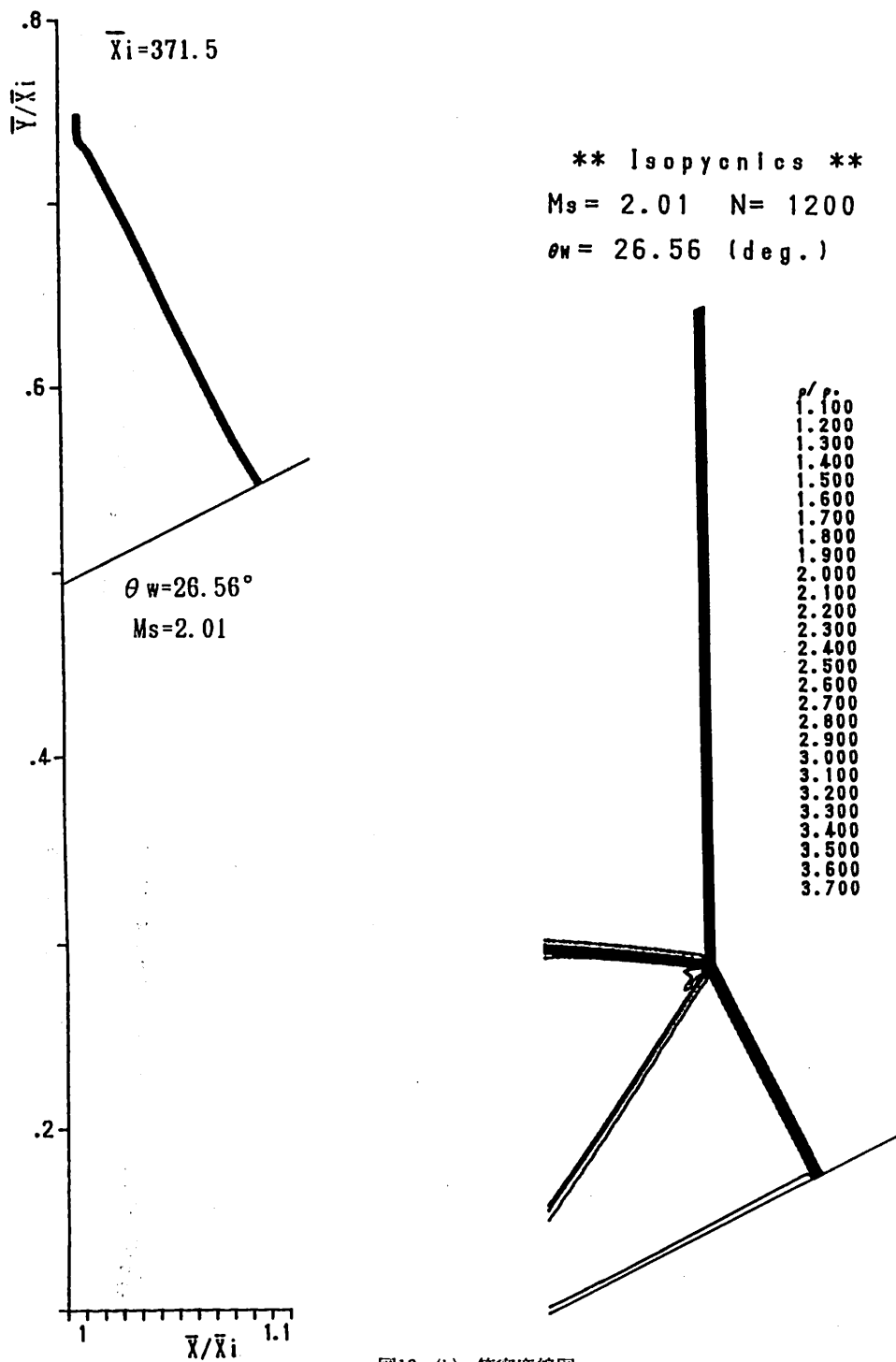
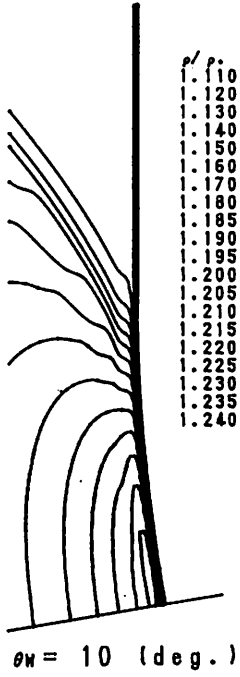


図13-(b) 等密度線図

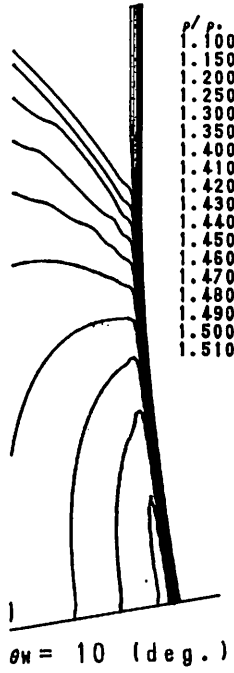
$M_s = 1.105$

$N = 1100$



$M_s = 1.24$

$N = 1200$



$M_s = 1.415$

$N = 1200$

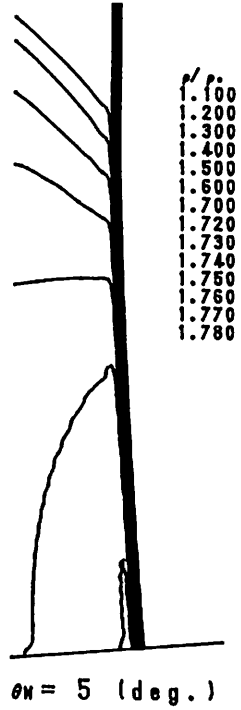
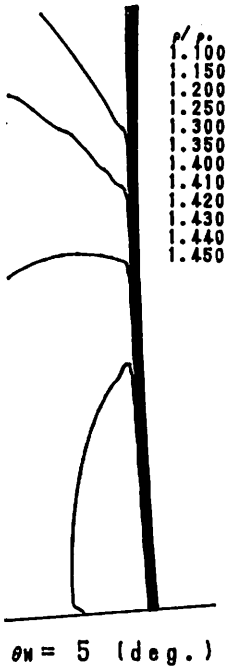
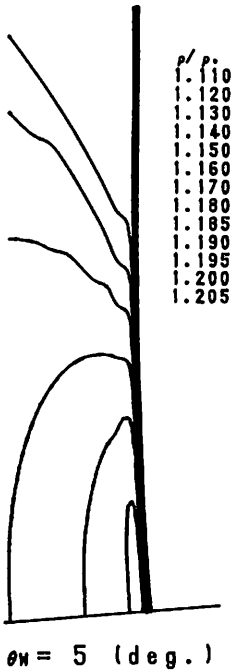
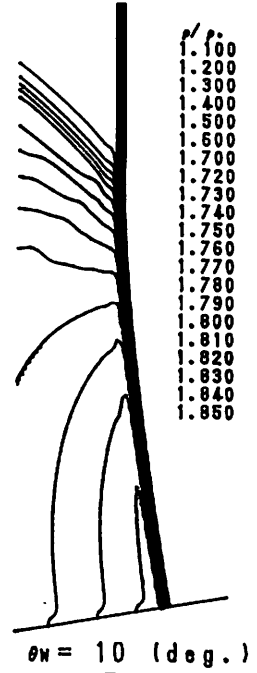


图13-(c) 等密度线图

7. まとめ

弱い平面衝撃波が比較的小さな角度の傾斜面に入射し、弱いマッハ反射を生じる場合のマッハ衝撃波面形状および強さに対し、Lighthillの理論による計算結果、Deweyらによる実験からの解析結果（マッハ衝撃波面を円弧で適合させる）Yee, Hartenによる陽的TVDスキームを用いた数値シミュレーション結果を比較し次の結果が得られた。

- (1) Lighthillの理論による計算結果とマッハ衝撃波面を円弧とした場合では、特に三重点近くでマッハ数増加の割合が異なる（三重点極近くを除く）。
- (2) シミュレーション結果は、両解析結果に比較して低い M_s を除き、三重点近くに対するマッハ数増加の割合が定性的ではあるが少し大きい。

シミュレーションによるマッハ数分布の傾向はLighthillの理論による計算結果と比較的一致する。

参考文献

- 1) 生井, ほか3名, 機論, 48-426, (1982), 212
- 2) Ben-Dor, G. and Glass, I. I., J. Fluid Mech, 92-3 (1979), 459
- 3) 平原, ほか2名, 機論, 54-508, (1988), 3325
- 4) Lighthill, M. J., Proc. Roy. Soc, A, 198, (1949), 454
- 5) Dewey, J. M. and Mcmillin, D. J., J. Fluid Mech, 152, (1985), 49
- 6) Dewey, J. M. and Mcmillin, D. J., J. Fluid Mech, 152, (1985), 67
- 7) Yee, H. C. and Harten, A., AIAA J. 25, (1987), 266
- 8) Whitham, G. B., J. Fluid Mech., 5(1959), 369