

Liénard 形非線形システムの リアプノフ関数に関する一考察

宮城 雅夫*・宮城 隼夫**

A Study of Constructing Lyapunov Function for Liénard-type Nonlinear Systems

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

In the stability analysis of Liénard's equation, it is common to utilize the Lyapunov method, and the energy function is widely employed as a Lyapunov function. The Lyapunov method has two main uses, i. e., establishment of the stability of a null solution of the system and determination of a stability region of the system. The latter is often important to system engineers, because a lot of systems appeared in the engineering are nonlinear, and thus, only the local stability may be discussed. Moreover, the Lyapunov method gives, generally, only the sufficient conditions for obtaining stability. Hence, the Lyapunov function which gives good approximation to the true stability boundary is desired.

This paper investigates new type Lyapunov functions of a Liénard-type nonlinear system, utilizing the conventional Lyapunov functions.

Key words; Liénard-type Nonlinear System, Energy Function, Lyapunov Function.

1. 緒 言

Liénard の方程式は、バネや回転機の機械システムをはじめ、LRC 回路で表現される電気システム的一般形として知られ、工学上適用範囲の広い重要な方程式の一つである。

非線形システムの安定性解析の手段としてはリアプノフ法が一般的であるが、Liénard の方程式で記述されるシステムが独特な非線形性を有するため、効果的なリアプノフ関数構成法がなく、多くの場合、二階の微分方程式から直観的に得られるシステムのエネルギーがリアプノフ関数として採用されている。

リアプノフ法は、原点の安定性だけでなく、システムの漸近安定領域まで論じることができ、システムの微分方程式を解かずに安定性の解析を行うことができる。しかしながら、リアプノフの安定定理はリアプノフ関数を構成する手順についてはなんの示唆も与えておらず、一つのシステムに対して種々のリアプノフ関数が考えられるので、工学的にはより広い安定領域を与えるリアプノフ関数を得ることが重要となる。

本論文では、簡単な Liénard 形非線形システムを対象に従来のリアプノフ関数¹⁾を拡張した新しい関数の存在について検討した。

2. Liénard 形非線形システムのリアプノフ関数

本論文で対象とする Liénard 形非線形システムは次式で表される。

*機械工学科

**琉球大学工学部 (〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原 1)

$$x + g_{(x)}x + f_{(x)} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $g_{(x)}$, $f_{(x)}$ は連続で微分可能な関数であり、次の性質を満足するものとする²⁾。

- i) $x \neq 0$ に対し、 $g_{(x)} > 0$
- ii) $x \neq 0$ に対し、 $xf_{(x)} > 0$
- iii) $|x| \rightarrow \infty$ のとき、 $|\phi_{(x)}| \rightarrow \infty$

$$\text{ただし } \phi_{(x)} = \int_0^x g_{(x)} dx$$

ここでは、 $g_{(x)}$ のかわりに正の定数 D を用いる。

式(1)において、 $x_1 f_{(x_1)} > 0$ ($x_1 \neq 0$) なる領域でシステムの原点は安定であり、従来構成されているリアプノフ関数としては、次の3つのリアプノフ関数がある。

$$V_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \dots\dots\dots(2)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha D^2(1-\alpha)x_1^2 + \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \dots\dots\dots(3)$$

$$V_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha D^2(1-\alpha)x_1^2 + \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 + 2D \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \int_0^{x_1} \sqrt{x_1 f_{(x_1)}} dx_1 \dots\dots\dots(4)$$

リアプノフ関数 V_1 , V_2 , V_3 から導かれる安定領域と真の安定領域を図1に示す。ただし、 $f_{(x_1)} = \sin(x_1 + \delta_0) - \sin \delta_0$, $\delta_0 = 0.412$, $D = 0.3$ とする。図よりリアプノフ関数 V_3 の与える安定領域の方がリアプノフ関数 V_1 , V_2 の与える安定領域より優れていることがわかる。しかしながら、 V_3 の与える安定領域は真の安定領域より控え目である。

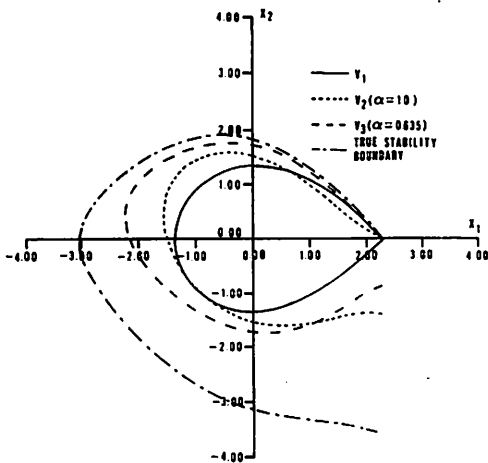


図1 V_1 , V_2 , V_3 の安定領域

3. リアプノフ関数の拡張法

リアプノフ関数の拡張法については幾多の研究³⁾⁻⁵⁾ がなされてきたが、ここでは新しい拡張法について述べる。

一般に、 $V > 0$, $\dot{V} < 0$ の性質を満足するリアプノフ関数に対して別のリアプノフ関数を $V_0 = V^n$ (n : 正整数) とすると

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= V^n > 0 \\ \dot{V}_0 &= nV^{n-1} \cdot \dot{V} < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

となる。 $n = 2$ として、上式を V_1 に適用すると次のようなリアプノフ関数 V_0 が得られる。

$$\begin{aligned} V_0 = V_1^2 &= \left| \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}x_2^4 + x_2^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 + \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 > 0 \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

その時間導関数は

$$\dot{V}_0 = 2 \left(\frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right) (-Dx_2^2) < 0 \dots\dots\dots(7)$$

となる。しかしながら、(6)式のリアプノフ関数の保証する安定領域は、もとのリアプノフ関数 V_1 で保証される安定領域と同じになり、単に2乗 (n 乗) しただけでは安定領域の拡大にはならない。このことは、リアプノフ関数を K 倍 ($K > 0$) しても、安定領域は変わらないことと等価である。すなわち、(6)式で $V_0 = V_1 \cdot V_1$ と考えると V_0 は V_1 を V_1 倍 ($V_1 > 0$) しているとみなすことができ、安定領域は変化しない。そこで、(6)式の第1項を変形した次式を考える。

$$\begin{aligned} V_{01} &= \frac{1}{4}x_2^2(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + x_2^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \\ &+ \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ところが、この形では、時間導関数が負にならず、 V_{01} はリアプノフ関数とならないので、さらに、 \dot{V}_{01} が負になるように修正した次式を考える。

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{1}{8}x_2^2(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + x_2^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \\ &+ \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 + \frac{1}{8}x_2^4 + \frac{1}{4} \alpha^2 D^2 \int_0^{x_1} x_1 f_{(x_1)} dx_1 > 0 \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

(9)式の時導関数は

$$\begin{aligned} \dot{V}_{11} = & -Dx_2^2 \left\{ (1-\alpha)x_2^2 - \frac{1}{4}\alpha D(\alpha-3)x_1 + \frac{1}{4}\alpha^2 D^2 x_1^2 \right\} \\ & - Dx_2^2 \left\{ \frac{3}{4}\alpha x_1 f_{(x_1)} + 2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right\} < 0 \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし、 $1-2\sqrt{2} \leq \alpha \leq 1+2\sqrt{2}$

となり、 V_{11} はリアプノフ関数となる。(9)式において、 $\alpha=0$ とすれば、(6)式に帰着するので、(9)式は(6)式のリアプノフ関数を一般化したものとみなすことができ、さらに(2)式の V_1 を一般化したものとみなすこともできる。(9)式において、 α の値を変化させたときに得られる安定領域を図2に示す。図より、(9)式のリアプノフ関数 V_{11} で与えられる安定領域の方が、(2)式のリアプノフ関数 V_1 で与えられる安定領域よりも広がっていることがわかる。

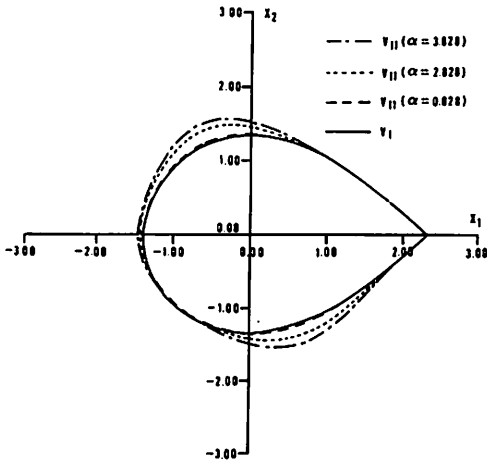


図2 V_{11} と V_1 の安定領域の比較

4. 拡張リアプノフ関数

ここでは、 V^2 を基盤とした拡張法と、 V^3 を基盤とした拡張法について考察する。

4-1. V^2 を基盤とした拡張法

前章では、リアプノフ関数 V_1 を2乗した(6)式を(9)式のように変形した。そこで、別の拡張リアプノフ関数を得るために、さらに(8)式の第2項の x_2^2 を変形した次式を考える。

$$\begin{aligned} V_{02} = & \frac{1}{4}x_2^2(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + (x_2 + \alpha Dx_1)^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \\ & + \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

しかしながら、この場合も時導関数が負にならず、 V_{02} はリアプノフ関数とならないので、さらに \dot{V}_{02} が負になるように修正する。結果として

$$\begin{aligned} V_{12} = & \frac{1}{8}x_2^2(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + (x_2 + \frac{3}{8}\alpha Dx_1)^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \\ & + \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 + \frac{1}{8}x_2^4 + \frac{1}{8}\alpha D^2(2\alpha-3) \int_0^{x_1} x_1^2 f_{(x_1)} dx_1 \\ & + \frac{1}{2}\alpha D^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{32}\alpha \right) x_1^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 > 0 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

が得られ、(12)式の時導関数は

$$\begin{aligned} \dot{V}_{12} = & -Dx_2^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\alpha\right)x_2^2 + \frac{1}{4}\alpha D(3-\alpha)x_1x_2 + \frac{1}{4}\alpha^2 D^2 x_1^2 \right\} \\ & - \frac{3}{4}\alpha Dx_1 f_{(x_1)} \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \\ & - D \left(2 - \frac{3}{4}\alpha \right) x_2^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 < 0 \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし、 $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq \frac{8}{3}$

となる。 V_{12} は、 $V_{12} > 0$ 、 $\dot{V}_{12} < 0$ を満足するので、リアプノフ関数である。 α を変化させたときの拡張リアプノフ関数 V_{12} の保証する安定領域を図3に示す。図より拡張リアプノフ関数 V_{12} ($\alpha=2.66$)が与える安定領域の方が、リアプノフ関数 V_1 の与える安定領域より広がっていることがわかる。

次に、リアプノフ関数 V_1 の代わりにリアプノフ関数 V_2 を用いる。 V_2 を(5)式に適用し、2乗すると次式が得られる。

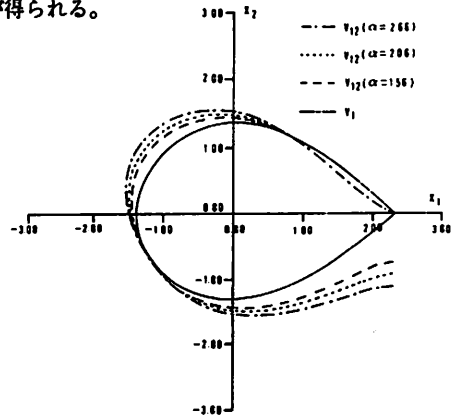


図3 V_{12} と V_1 の安定領域の比較

$$V_{20} = V_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha D^2(1-\alpha)x_1^2 + \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \dots \dots \dots (14)$$

上式は、リアプノフ関数となり得るが、この関数の与える安定領域はもとのリアプノフ関数 V_2 が与える安定領域と同じであるので、(14)式を次式のように変形する。

$$V_{21} = \frac{1}{2}(x_2 + \alpha Dx_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha D^2(1-\alpha)x_1^2 + \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \dots \dots \dots (15)$$

$$+ 2\alpha(1-\alpha)D^2x_1^2x_2^2 + 4\alpha D^2 \int_0^{x_1} x_1^2 f_{(x_1)} dx_1 > 0 \dots \dots \dots (15)$$

V_{21} の時間導関数は

$$\dot{V}_{21} = -D(x_2 - \alpha Dx_1)^2 \{ (1-\alpha)x_2^2 + \alpha x_1 f_{(x_1)} \} - \alpha^2 D^3 x_1^3 f_{(x_1)}$$

$$- \alpha D^3(1-\alpha)(1-5)x_1^2x_2^2 - 2\alpha Dx_1 f_{(x_1)} \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1$$

$$- 2(1-\alpha)Dx_1^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 < 0 \dots \dots \dots (16)$$

ただし、 $0 \leq \alpha \leq 1$

となるので V_{21} はリアプノフ関数である。

α を変化させたときの拡張リアプノフ関数 V_{21} の保証する安定領域を図4に示す。図より拡張リアプノフ関数 $V_{21} (\alpha = 1.0)$ が与える安定領域の方がリアプノフ関数 V_2 の与える安定領域より広がっていることがわかる。

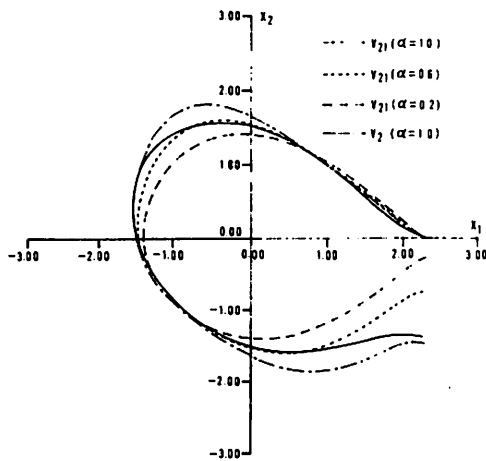


図4 V_{21} と V_2 の安定領域の比較

4-2. V^3 を基盤とした拡張法

前節では、リアプノフ関数 V の2乗を基盤とした拡張法を示し、拡張リアプノフ関数を構成した。ここでは、リアプノフ関数 V の3乗を基盤とした拡張法を示す。

リアプノフ関数 V_1 を(5)式に適用し、3乗すると次式が得られる。

$$V_{03} = V_1^3$$

$$= \frac{1}{8}x_2^4(2x_2 + \alpha Dx_1)^2 + \frac{3}{4}x_2^4 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1$$

$$+ \frac{3}{2}x_2^2 \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 + \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^3 \dots \dots \dots (17)$$

上式は、リアプノフ関数となり得るが、この関数の与える安定領域はもとのリアプノフ関数 V_1 が与える安定領域と同じであるので、(17)式を次式のように変形する。

$$V_{13} = \frac{1}{8}x_2^2(2x_2 + \alpha Dx_1)^2 + \frac{3}{4}x_2^4 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1$$

$$+ \frac{3}{2}x_2^2 \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^2 + \left| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 \right|^3$$

$$+ \frac{5}{2} \alpha^2 D^2 x_1^2 x_2^2 \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 D^2 x_1^4 x_2^2$$

$$+ 5 \alpha^2 D^2 \int_0^{x_1} |x_1^2 f_{(x_1)}| \int_0^{x_1} f_{(x_1)} dx_1 dx_1 > 0 \dots \dots \dots (18)$$

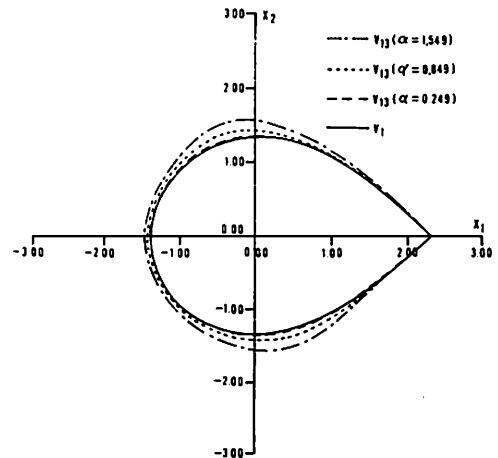


図5 V_{13} と V_1 の安定領域の比較

上式の時間導関数は

$$\dot{V}_{13} = -Dx_2^4 \left\{ \frac{1}{4}(3-\alpha)x_2^2 - \frac{5}{4} \alpha D(1-\alpha)x_1x_2 + \frac{5}{2} \alpha^2 D^2 x_1^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{5}{4}Dx^4_2x_1f(x_1) \\
 & -Dx^2_2\int_0^{x_1}f(x_1)dx_1 \{3x^2_2-5\alpha^2Dx_1x_2+5\alpha^2D^2x^2_1\} < 0 \\
 & \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } -\frac{2\sqrt{15}}{5} \leq \alpha \leq \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

となるので、(18)式の V_{13} もリアプノフ関数と言える。
 α を変化させたときの拡張リアプノフ関数 V_{13} の保証する安定領域を図 5 に示す。図より拡張リアプノフ関数 $V_{13}(\alpha = 1.549)$ が与える安定領域の方がリアプノフ関数 V_1 の与える安定領域よりも広がっていることがわかる。

5. 結 言

本論文では、簡単な Liénard 形非線形システムを対象に、従来のリアプノフ関数を拡張した新しい関数の

存在について検討した。さらに、得られた拡張リアプノフ関数によって与えられる安定領域が従来の関数によって与えられる安定領域よりも広がっていることも示した。

文 献

- 1) Miyagi, H., Taniguchi, T., Int. J. Control, 32 - 2(1980), 371
- 2) ラサール, J., レフシェッツ, S. (山本訳). リアプノフ法による安定性理論 (1975). 60, 産業図書
- 3) 宮城・宮城, 計自論, 25-2 (1989), 252
- 4) 宮城・宮城, 計自論, 24-4 (1988), 344
- 5) 宮城・宮城, 機講論, No908-2 (1990), 246