

# 周波数領域におけるモデル・フォロイング制御系の一構成法

出川 喬庸\*

## A Frequency Domain Synthesis of Model Following Control System

Tadayasu DEGAWA

This paper deals with the problem of designing a model following control system for a Multi-input single-output linear, time-invariant, continuous system in the frequency domain, in which transfer matrices are assumed to be known, and only the inputs and outputs can be measured.

An algorithm is developed to synthesis control system so that transfer matrix between reference inputs and plant outputs coincide with model transfer matrix.

This algorithm is easily programmable in a digital computer since only numerical computation using coefficient matrices are necessary.

Finally, simulation results of the different cases are shown to justify the proposed scheme.

Keywords: model following, control system synthesis

### 1. まえがき

モデル・フォロイング制御系の設計はプラントの出力が規範モデルの出力を忠実に追従するように制御則を決定することから成り、航空機に望ましい運動をさせるような制御を行うためには有望な手法である。

時間領域における設計法は既に報告しているが、本研究では周波数領域における多入力単出力線形時間固定係数系のモデル・フォロイング制御系の設計法を考察し、規範入力とプラントの出力間の伝達マトリクスを規範モデルの伝達マトリクスに一致させるための入出力信号と補償要素のみを用いた制御系の構成を求める実行容易なアルゴリズムを開発している。これまで、複雑な多項式マトリクスの変換操作を伴う種々のアルゴリズムが提案されてはいるが、この方法では定数マトリクスの計算だけで制御系の構成が求められる。モデル・フォロイング制御系を設計するためには望ましい動特性を与える規範モデルの伝達マトリクスとプラントの伝達マトリクスが与えられ、入力と出力のみが測定できればよい。プラントの規範モデルに初期誤

差があってもプラントの出力をモデルの出力に漸近的に一致させることができる。

最後に、その有効性を数値シミュレーションによって検討している。

### 2 問題の記述

制御されるプラントは  $p$  入力  $q$  出力  $n$  次線形固定係数系であり、つぎの微分方程式で記述される。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1-1}$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^p$ ,  $y(t) \in R^q$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  はそれぞれ  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $q \times n$  の定数マトリクス、系は完全可制御・可観測、 $p \geq q$ 、状態  $x(t)$  は未知であり、入力  $u(t)$  と出力  $y(t)$  のみが測定可能とする。(1-1) 式からプラントの伝達マトリクスは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}W_p(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{z_m s^m + z_{m-1} s^{m-1} + \dots + z_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_0} \\ &= \frac{z(s)}{\alpha(s)}\end{aligned}\tag{1-2}$$

ここで、

\*航空工学科

$$\begin{aligned} Z(s) &= z_m s^m + z_{m-1} s^{m-1} + \dots + z_0 \\ \alpha(s) &= s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_0 \\ m &\leq n-1 \\ \text{rank} Z(s) &= q \end{aligned}$$

$Z(s)$  は  $m$  次以下の多項式を要素とする  $q \times p$  多項式マトリクス,  $\alpha(s)$  は  $n$  次モノック多項式,  $z_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$  は  $q \times p$  定数マトリクス,  $|Z(s)G|$  がフルピッツ多項式となるような  $q \times p$  定数マトリクス  $G$  が存在し, 多項式  $\alpha(s)$  と多項式マトリクス  $Z(s)G$  の少なくとも 1 つの要素多項式が互いに素であると仮定する。

本研究の多変数系のモデル・フォロイング制御系の構成問題は,  $\bar{p}$  個の基準入力  $r(t)$  とプラントの出力  $y(t)$  間に微分器を含まない制御器を配置して得られる制御系の伝達マトリクスを次のような安定な規範モデルの伝達マトリクス  $W_M(s)$  に一致させることである。

$$\begin{aligned} W_M(s) &= \frac{\bar{z}_m s^{\bar{m}} + \bar{z}_{m-1} s^{\bar{m}-1} + \dots + \bar{z}_0}{s^{\bar{n}} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-1} s^{\bar{n}-1} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-2} s^{\bar{n}-2} + \dots + \bar{\alpha}_0} \\ &= \frac{\bar{Z}(s)}{\bar{\alpha}(s)} \end{aligned} \quad (1-3)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \bar{Z}(s) &= \bar{z}_m s^{\bar{m}} + \bar{z}_{m-1} s^{\bar{m}-1} + \dots + \bar{z}_0 \\ \bar{\alpha}(s) &= s^{\bar{n}} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-1} s^{\bar{n}-1} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-2} s^{\bar{n}-2} + \dots + \bar{\alpha}_0 \\ \bar{m} &\leq \bar{n}-1 \\ \bar{n} - \partial_r[\bar{Z}(s)] &\geq n - \partial_r[Z(s)] \end{aligned}$$

$\bar{Z}(s)$  は  $\bar{m}$  次以下の多項式を要素とする  $q \times \bar{p}$  多項式マトリクス,  $\bar{\alpha}(s)$  は  $n$  次モノック・フルピッツ多項式,  $\bar{z}_i (i = 0, 1, 2, \dots, \bar{m})$  は  $q \times \bar{p}$  定数マトリクスであると仮定する。ただし, 記号  $\partial_r$  は行次数を表す。

したがって, 望ましい  $r(s)$  と  $y(s)$  の関係式は次のように表される。

$$y(s) = W_M(s)r(s) \quad (1-4)$$

### 3 制御系の構成

制御系の構成についての複雑さはプラントの伝達マトリクスの構造, 特に  $Z(s)$  の構造に依存し, 次のような場合が考えられる。

- i)  $p = q = \bar{p} = 1$
- ii)  $p = q = 1, \bar{p} \geq 2$  のとき
- iii)  $q = 1, p \geq 2, \bar{p} \geq 1$  のとき
- iv)  $p = q = \bar{p} \geq 2$  のとき
- (1)  $|Z_m| \neq 0$  のとき

$$(2) |Z_m| = 0, |\Gamma_r[Z(s)]| \neq 0 \text{ のとき}$$

$$(3) |Z_m| = 0, |\Gamma_r[Z(s)]| = 0 \text{ のとき}$$

$$v) p = q \geq 2, \bar{p} > p = q \text{ のとき}$$

$$vi) q \geq 2, p > q, \bar{p} \geq q \text{ のとき}$$

ただし, 記号  $\Gamma_r[Z(s)]$  は  $Z(s)$  の各行の最高次数の係数から構成される定数マトリクスを表す。

ここでは, 構成が比較的簡単な i), ii), iii) の場合についてのみ報告し, iv), v), vi) の場合については次の研究課題とする。

$$i), p = q = \bar{p} = 1 \text{ のとき}$$

ここでは単入力単出力のモデル・フォロイング制御系の一構成法を示す。

$y(s) = W_p(s)u(s)$  の関係から, 出力  $y(s)$  は次のように表現される。

$$f(s)y(s) = \sum_{i=1}^n \{-a_i v_i + b_i w_i(s)\} \quad (2-1)$$

ここで;

$$f(s) = s^{n-m} + f_{n-m-1} s^{n-m-1} + \dots + f_0$$

$$v_i(s) = y(s)/(s + \lambda_i), w_i(s) = u(s)/(s + \lambda_i)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$v_n(s) = y(s), w_n(s) = u(s)$$

$a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$  は  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ ,  $\alpha_j (j = 0, 1, \dots, n-1)$ ,  $z_k (k = 0, 1, \dots, m)$  および  $f_\ell (\ell = 0, 1, \dots, n-m-1)$  によって決定される定数であり,  $\lambda_i, f_\ell$  は設計パラメータであり,  $\lambda_i > 0, \lambda_i \neq \lambda_j$  for  $i \neq j$  および  $f(s)$  がフルピッツ多項式になるように選定される。

(2-1) 式における  $a_i, b_i$  を  $\lambda_i, \alpha_j, z_k$  および  $f_\ell$  から決定する方法は次のようにして導かれる。

(2-1) 式から,  $u(s)$  と  $y(s)$  の関係を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \left\{ f(s) + a_1 \frac{1}{s + \lambda_1} + a_2 \frac{1}{s + \lambda_2} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{s + \lambda_{n-1}} + a_n \right\} y(s) \\ = \left\{ b_1 \frac{1}{s + \lambda_1} + b_2 \frac{1}{s + \lambda_2} + \dots + b_{n-1} \frac{1}{s + \lambda_{n-1}} + b_n \right\} u(s) \end{aligned} \quad (2-2)$$

上式の両辺に  $(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_{n-1})$  を掛けると次式が得られる。

$$f(s)g(s) + d(s) y(s) = h(s)u(s) \quad (2-3)$$

ここで,

$$g(s) = s^{n-1} + g_{n-2} s^{n-2} + \dots + g_0$$

$$= (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_{n-1})$$

$$d(s) = d_{n-1} s^{n-1} + d_{n-2} s^{n-2} + \dots + d_0$$

$$\begin{aligned}
&= a_1(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) \cdots (s + \lambda_{n-1}) \\
&+ a_2(s + \lambda_1)(s + \lambda_3) \cdots (s + \lambda_{n-1}) \\
&+ \cdots \\
&+ a_n(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_{n-1}) \\
h(s) &= h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \cdots + h_0 \\
&= b_1(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) \cdots (s + \lambda_{n-1}) \\
&+ b_2(s + \lambda_1)(s + \lambda_3) \cdots (s + \lambda_{n-1}) \\
&+ \cdots \\
&+ b_n(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_{n-1})
\end{aligned}$$

$$d_{n-1} = a_n, h_{n-1} = b_n$$

$\partial \{f(s)g(s) + d(s)\} = 2n - m - 1, \partial \{h(s)\} = n - 1$  ( $\partial$  は次数を表す。) であるから (2-3) 式の入出力関係が  $y(s) = W_p(s)u(s)$  に一致するためには、多項式  $f(s)g(s) + d(s)$  と  $h(s)$  が  $(n - m - 1)$  次の共通のモノックな因数  $\phi(s)$  を含まなければならない。

$$\phi(s)\alpha(s) = f(s)g(s) + d(s) \quad (2-4)$$

$$\phi(s)z(s) = h(s) \quad (2-5)$$

ここで、 $\phi(s) = s^{n-m-1} + \phi_{n-m-2}s^{n-m-2} + \cdots + \phi_0$

また、係数ベクトルを次のように定義する。

$$a^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$b^T = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

$$d^T = [d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_0]$$

$$h^T = [h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_0]$$

$$\alpha^T = [1, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0]$$

$$z^T = [z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_0]$$

$$f^T = [1, f_{n-m-1}, f_{n-m-2}, \dots, f_0]$$

$$g^T = [1, g_{n-2}, g_{n-3}, \dots, g_0]$$

$$\phi^T = [\phi_{n-m-2}, \phi_{n-m-3}, \dots, \phi_0]$$

このとき、(a, b) と (d, h) の関係は次のようになる。

$$d = T(\lambda)a \quad (2-6)$$

$$h = T(\lambda)b \quad (2-7)$$

ここで、 $T(\lambda)$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c(A/\lambda_1) & c(A/\lambda_2) & \cdots & c(A/\lambda_{n-1}) \end{array} \right] c(A)$$

$c = (A) = g$

$c(A)$  は多項式  $g(s)$  の係数で作られるベクトル、 $c(A/\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  は  $g(s)$  から因数  $(s + \lambda_i)$  を除いて作られる多項式の係数ベクトルである。

さて、(2-4) (2-5) 式において  $\alpha(s)$  と  $z(s)$  は既知であり、 $f(s)$  と  $g(s)$  は設計者が任意に選択できるから、未知の多項式は  $\phi(s)$  と  $d(s)$  および  $h(s)$  である。

(2-4) 式を書き換えると次のようになる。

$$(s^{n-m-1} + \phi_{n-m-2}s^{n-m-2} + \cdots + \phi_0)$$

$$\begin{aligned}
&\times (s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0) \\
&= (s^{n-m} + f_{n-m-1}s^{n-m-1} + \cdots + f_0) \\
&\times (s^{n-1} + g_{n-2}s^{n-2} + \cdots + g_0) \\
&+ d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \cdots + d_0 \quad (2-8)
\end{aligned}$$

(2-8) 式を検討すると、 $s$  について  $n$  次以上の高次の係数についてのみ右辺で確定しているが、 $s$  について  $n-1$  次以下の係数については、両方とも不確定である。したがって、まず  $s$  について  $n$  次以上の係数が両辺で等しくなるように、未知の係数ベクトル  $\phi$  を求めれば、左辺において  $n-1$  次以下の係数が確定し、未知の係数ベクトル  $d$  が求められることが明らかである。さらに  $\phi(s)$  が決定されると (2-5) 式から  $h(s)$  が求められる。

(2-4) (2-5) 式から、係数についての関係式は次のようになる。

$$T_a\phi = T_f g + T_d d \quad (2-9)$$

$$T_z\phi = h \quad (2-10)$$

ここで、

$$T_a = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & \\ \alpha & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \alpha \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} 2n - m$$

$$T_f = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & \\ f & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & f \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} 2n - m$$

$$T_d = \left[ \begin{array}{c} O_{(n-m) \times n} \\ I_n \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}} \right\} 2n - m$$

$$T_z = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & \\ z & & & \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & z \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} n$$

(2-9) 式の両辺の  $(2n-m)$  ベクトルの 1 行目から  $(2n-m)$  行目までの要素はそれぞれ順に (2-4) 式の両辺の多項式の  $s^{2n-m-1}$  から  $s^0$  の係数に対応する。また、(2-10) 式の両辺の  $n$  ベクトルの 1 行目から  $n$  行目までの要素はそれぞれ順に (2-5) 式の両辺の多項式の  $s^{n-1}$  から  $s^0$  の係数に対応する。

いま、マトリクス  $T_a$  と  $T_f$  を次のようにサブマトリクスで表す。

$$T_a = \begin{bmatrix} T_{a1} \\ T_{a2} \end{bmatrix} \quad T_f = \begin{bmatrix} T_{f1} \\ T_{f2} \end{bmatrix}$$

ここで、 $T_{a1}$ 、 $T_{a2}$ 、 $T_{f1}$  および  $T_{f2}$  はそれぞれ  $(n-m) \times (n-m)$ 、 $n \times (n-m)$ 、 $(n-m) \times n$ 、 $n \times n$  マトリクスである。

$$T_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \alpha_{m+1} & \alpha_{m+2} & \cdot & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{a2} = \begin{bmatrix} \alpha_m & \alpha_{m+1} & \cdots & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \alpha_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_0 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$T_{f1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ f_{n-m-1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & f_{n-m-1} & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & f_{n-m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ f_1 & f_2 & \cdot & \cdots & \cdots & f_{n-m-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{f2} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-m-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & \cdot & \cdot & f_{n-m-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & f_0 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_0 & \cdot & f_{n-m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_0 \end{bmatrix}$$

したがって、 $s$  について  $n$  次以上の項の係数および  $s$  について  $(n-1)$  次以下の係数について、それぞれ次の関係式が成り立たなくてはならない。

$$T_{a1}\phi = T_{f1}g \quad (2-11)$$

$$T_{a2}\phi = T_{f2}g + d \quad (2-12)$$

$T_{a1}$  は対角要素がすべて 1 の  $(n-m) \times (n-m)$  の下三角行列であるから、 $|T_{a1}| = 1$  であり、正則であるから、(2-11) (2-12) (2-10) 式より未知

の係数ベクトル  $\phi$ 、 $d$ 、 $h$  は次のように計算される。

$$\phi = T_{a1}^{-1}T_{f1}g \quad (2-13)$$

$$d = T_{a2}\phi - T_{f2}g \quad (2-14)$$

$$h = T_2\phi = T_\phi z \quad (2-15)$$

また、未知の係数ベクトル  $a$ 、 $b$  は (2-6) (2-7) 式より求められる。

$$a = T^{-1}(\lambda)d \quad (2-16)$$

$$b = T^{-1}(\lambda)h \quad (2-17)$$

基準入力  $r(t)$  と出力  $y(t)$  間の望ましい関係は次のように書き換えることができる。

$$f(s)y(s) = f(s)W_M(s)r(s) \quad (2-18)$$

ここで、 $n-m \leq \bar{n} - \bar{m}$  の仮定より  $f(s)W_M(s)$  はプロパーな伝達マトリクスであり、微分器を用いることなく実現可能である。

(2-1) と (2-18) を比較すると左辺は等しく、 $f(s)$  はフルビッツ多項式であるから、次式が成り立つような制御入力  $r(t)$  が存在すれば、 $r(t)$  と  $y(t)$  間の伝達関数は規範モデルの伝達関数に一致する。

$$f(s)W_M(s)r(s) = \sum_{i=1}^n \{-a_i v_i(s) + b_i w_i(s)\} \quad (2-19)$$

上式から  $u(s)$  は次のように求められる。

$$u(s) = \frac{1}{b_n} \{f(s)W_M(s)r(s) + \sum_{i=1}^n a_i v_i(s) - \sum_{i=1}^{n-1} b_i w_i(s)\} \quad (2-20)$$

例 1) プラントと規範モデルの伝達関数がそれぞれ次式で与えられる場合を考える。

$$W_p(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+s+3} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$W_M(s) = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{y(s)}{r(s)}$$

$n=3$ 、 $m=1$  であるから、 $\lambda_1=1$ 、 $\lambda_2=2$ 、 $f(s)=s^2+2s+1$  と選定すると

$$T_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{f1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g^T = [1 \quad 3 \quad 2]$$

$$T_{a2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad T_{f2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となるから、(2-13) ~ (2-17) 式を用いて、

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を求めると、プラントの入出力関係は(2-1)式より次のように表される。

$$(s^2 + 2s + 1)y(s) = \frac{1}{s+2} u(s) + u(s) - \frac{6}{s+1} y(s) + \frac{1}{s+2} y(s) + 2y(s)$$

また、規範モデルについては(2-18)式より次の

ように表す。

$$(s^2 + 2s + 1)y(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)} r(s)$$

以上から、制御入力  $u(s)$  は次のようになる。

$$u(s) = \frac{1}{s+2} u(s) + \frac{6}{s+1} y(s) - \frac{1}{s+2} y(s) - 2y(s) + \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)} r(s)$$

このとき制御系の構成は図1のようになる。

この制御系の伝達関数は規範モデルの伝達関数に一致していることを確認するために図1から  $r(s)$  と  $y(s)$  間の伝達関数を求める。

1)  $q(s)$  と  $u(s)$  間の伝達関数

$$\frac{u(s)}{q(s)} = \frac{s+2}{s+3}$$

2)  $q(s)$  と  $y(s)$  間の伝達関数

$$\frac{y(s)}{q(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+2s^2+s+3)}$$

3)  $y(s)$  と  $S(s)$  間の伝達関数

$$\frac{S(s)}{q(s)} = \frac{-(2s^2+s-7)}{(s+1)(s+2)}$$

4)  $p(s)$  と  $y(s)$  間の伝達関数

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{p(s)} &= \frac{\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+2s^2+s+3)}}{1 + \frac{(2s^2+s-7)}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+2s^2+s+3)}} \\ &= \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+2s^2+s+3) + 2s^2+s-7} \\ &= \frac{(s+s)(s+2)}{s^4+5s^3+9s^2+7s+2} = \frac{1}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

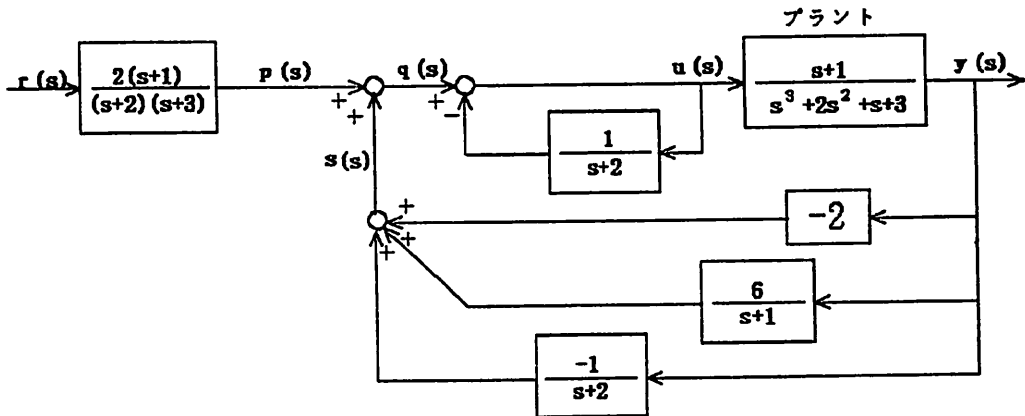


図1, 例1)の制御系

5)  $r(s)$  と  $y(s)$  間の伝達関数

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+1)^2} = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} = W_M(s)$$

ii)  $p = q = 1, \bar{p} \geq 2$  のとき

i) の場合と異なるのは基準入力  $r(s)$  が2つ以上ということであり、プラントの出力が  $(2-1)$  のように記述されることは同様である。また、規範モデルの入出力関係も  $n - \partial_r[Z(s)] \leq \bar{n} - \partial_r[\bar{Z}(s)]$  の仮定より  $(2-18)$  式と同様に表すことができる。ただし、 $f(s)W_M(s)$  は伝達関数ではなく伝達マトリクス(ベクトル)になる。さらに、制御入力  $u(s)$  も  $(2-20)$  式で与えられる。

例2) プラントと規範モデルの伝達関数がそれぞれ次式で与えられる場合を考える。

$$W_p(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+s+3}$$

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{1}{s^2+5s+4} \end{bmatrix}$$

プラントの伝達関数は例1)と同じであり、その入出力関係は例1)に示したとおりである。また、規範モデルについては次のように表すことができる。

$$(s^2+2s+1)y(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)} & \frac{s+1}{s+4} \end{bmatrix} r(s)$$

$$r^T(s) = [r_1(s) \quad r_2(s)]$$

したがって、制御入力  $u(s)$  は次のようになる。

$$u(s) = \frac{1}{s+2}u(s) + \frac{6}{s+1}y(s) - \frac{1}{s+2}y(s) - 2y(s)$$

$$+ \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)}r_1(s) + \frac{s+1}{s+4}r_2(s)$$

このとき制御系の構成は図2のようになる。系の伝達マトリクスを求める。

1)  $p(s)$  と  $y(s)$  間の伝達関数

$$\frac{y(s)}{p(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

2)  $r(s)$  と  $y(s)$  間の伝達マトリクス

$$y(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{1}{s^2+5s+4} \end{bmatrix} r(s)$$

iii)  $p = 1, q \geq 2, \bar{p} \geq 1$  のとき

ii) で明らかになったように、1出力系の場合、基準入力の数と次数差に無関係にモデル・フォロイング制御系を構成できる。ここでは、プラントの入力数が2つ以上の場合を考える。このとき、 $Z(s)$  は  $1 \times p$  マトリクスであり、 $|Z(s)G|$  がフルピッチ多項式になるような  $p \times 1$  定数マトリクス  $G$  により、入力について  $u(s) = Gv(s)$  ( $v(s)$  はスカラー) なる変換を行うと  $v(s)$  と  $y(s)$  の関係は次のようになる。ただし、 $|Z(s)G|$  と  $s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0$  は共通の因数を含まないものとする。

$$y(s) = \frac{Z(s)G}{\alpha(s)} v(s)$$

したがって、問題は  $r(s)$  と  $y(s)$  間の伝達マトリクスが規範モデルの伝達マトリクスに一致するようなスカラー入力  $v(s)$  を決定する問題となり、i)と同様にして解決することができる。

#### 4 応答の数値計算

数値計算によって規範入力  $r(t) = 4\sin 4t$  に対する

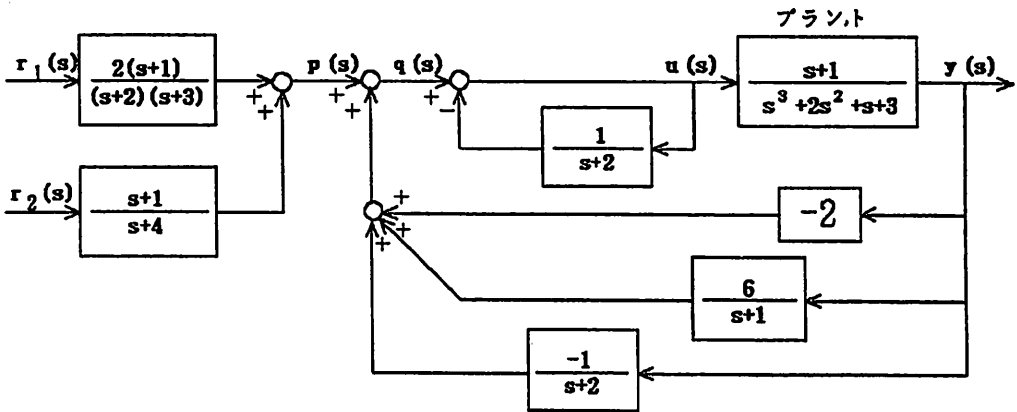


図2. 例2)の制御系

例1)の望ましい規範モデルの応答  $y_m$  とプラントの応答  $y$  を示したのが図3である。なお、初期値は規範モデルの出力  $-1$ 、プラントの出力を  $1$  とし、それ以外はすべて零としている。

数値計算によって規範入力  $r_1(t) = 4\sin 8t$ ,  $r_2(t) = 4\sin 4t$  に対する例2)の望ましい規範モデルの応答  $y_m$  とプラントの応答  $y$  を示したのが図4である。なお、初期値は規範モデルの出力を  $-1$ 、プラントの出力を  $1$  とし、それ以外はすべて零としている。

いずれの場合も初期値の違いにかかわらず、追従状況は良好である。

## 5 あとがき

プラントとモデルの伝達マトリクスと測定可能な入出力信号を用いて周波数領域で直接モデル・フォロイング制御系を構成する方法を示した。この制御系を構成したり実行するのにプラントやモデルの入出力関係を時間領域の状態方程式で表示したり、状態量を測定することは必要ではない。制御則を求めるのに必要なものは伝達関数の係数と簡単なマトリクスの演算だけであり、制御を実行するのに必要なものは基準入力とプラントの入出力信号だけであり、モデルの動特性を制御系に含む必要はない。

基準入力からプラントの出力までの伝達関数が規範モデルの伝達関数に一致するように制御入力が求められるが、仮定から不安定な極と零点の相殺は起こらないので制御系の安定性は保証される。

制御系の構成についての複雑さはプラントの伝達マトリクスの構造に依存しているが、本報告では多入力単出力系のモデル・フォロイング制御系の設計法のみを考察した。本設計法の多入力多出力系への拡張についてはさらに研究する。

## 参考文献

- 1) W. A. Wolovich : linear Multivariable Systems.  
New York : Spring Verlag, 1974
- 2) 出川, 金井, 内門 : 多変数モデル・フォロイング制御系の一構成法, 計測自動制御学会論文集, 第18巻, 第12号, 1982年, pp1132 ~ 1139
- 3) 出川 : 状態観測器を含むモデル・フォロイング制御系の一構成法, 第一工業大学研究報告, 第4号, 平成4年3月, pp59 ~ 64

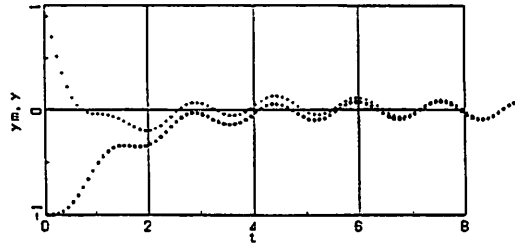


図3. 例1)の規範モデルとプラントの応答の比較  
□ : 規範モデルの応答    + : プラントの応答

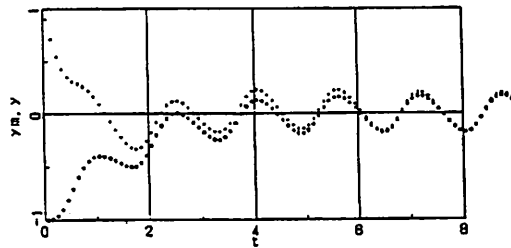


図4. 例2)の規範モデルとプラントの応答の比較  
□ : 規範モデルの応答    + : プラントの応答