非ルーリエ形リアプノフ関数を用いた非線形フィードバックシステムの安定性

宮城　雅夫*　　宮城　隼夫**

Stability Studies of Nonlinear Feedback Systems Using a Non–Luré Type Lyapunov Function

Norio MIYAGI, College of Technology, Dai–Ichi University
Hayao MIYAGI, Faculty of Engineering, Ryukyu University

Stability of control systems with multiple nonlinearities is discussed. A non–Luré type Lyapunov function is presented, which surpasses the Luré–type function from the point of view of the stability region guaranteed. This function is used to establish a stability criterion for the system. The Superiority of the functions proposed is indicated by a numerical example, comparing the stability boundary to that obtained by a Luré–type Lyapunov function.

Key Words: Non–Luré Type Lyapunov Function, Nonlinear Feedback System, Stability

1．緒　言

リアプノフ法はシステムの漸近安定領域まで言及できるという点で有利であり，システムの安定性解析の手段としてよく用いられている。しかしながら，リアプノフ法によって与えられる安定条件は十分条件であり，保証される漸近安定領域も多かれ少なかれ控え目であることが知られている。従って工学的にはより広い安定領域を与える関数の構成が重要な課題となる。これまで，いくつかのリアプノフ関数が構成されているが[1)~3)]，最近，文献〔4〕において，リエナール形非線形システムの拡張リアプノフ関数がラグランジュ・シャルピ法によって構成されている。

本論文では、この拡張リアプノフ関数を非線形フィードバックシステムに適用し，一つの安定定理を導く。また得られた結果を例題システムに適用する。

*機械工学科
**琉球大学工学部（〒903　沖縄県中頭郡西原町字千原1）

2．問題の設定

本論文で対象とする非線形フィードバックシステムは次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}-\mathbf{Bf}_{(\sigma)} \quad (1)$$
$$\sigma=\mathbf{C}^T\mathbf{x}$$

(1)式で表されるシステムのブロック線図を図1に示す。$\mathbf{W}_{(s)}$ は w×w の行列であり，次式を満足する伝達関数である。

$$\mathbf{W}_{(\infty)}=0 \quad (2)$$

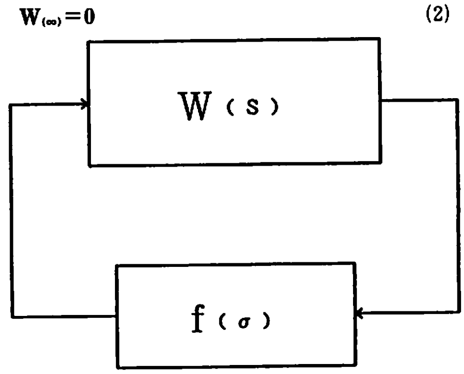

図1　非線形フィードバックシステム

また，非線形要素を表す $\mathbf{f}_{(\sigma)}$ は，次の条件を満足するものとする。

Ⅰ）$\mathbf{f}_{(\sigma)}$ は連続な w 次の実ベクトル関数であり σ も実数ベクトルである。

Ⅱ）$\mathbf{f}_{(\sigma)}$ は，ある実定数の対称行列 $\mathbf{E}$ について，次のような性質をもつ。

$$\mathbf{f}^T_{(\sigma)}\mathbf{E}\sigma \geqq 0,\ \mathbf{f}_{(0)}=0$$

Ⅲ）すべての実数ベクトル σ について，$V_{1(\sigma)}\geqq 0$ かつ $V_{1(0)}=0$ を満足するあるスカラ関数 $V_{1(\sigma)}$ が存在する。また $V_{1(\sigma)}$ はある実定数の行列 $\mathbf{Q}$ について，次のような性質をもつものとする。

$$\nabla V_{1(\sigma)}=\mathbf{Q}^T\mathbf{f}_{(\sigma)}$$

ただし，$\mathbf{E}=\mathrm{diag}\ [e_i]$，$\mathbf{Q}=\mathrm{diag}\ [q_i]$ で，$e_i\geqq 0$，$q_i>0$ とする。

また，$\mathbf{f}_{(\sigma)}$ は $f_{i(\sigma i)}$ (i＝1，2，…，w) で表せるものとする。

3．システムの安定性

(1)式で与えられるシステムの線形部分の伝達関数 $\mathbf{W}$ は次式となる。

$$\mathbf{W}_{(S)}=\mathbf{C}^T(\mathbf{SI}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \qquad (3)$$

そこで，Moore と Anderson の論文[5]に従い，次の定理が得られる。

《定　理　1》

もし，

$$\mathbf{Z}_{(S)}=(\mathbf{E}+\mathbf{QS})\mathbf{W}_{(S)} \qquad (4)$$

で与えられる $\mathbf{Z}_{(S)}$ が正実行列であるように実行列 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{Q}$ が存在するならば，次の(5)～(7)式を満足する実行列 $\mathbf{P}$，$\mathbf{L}$，$\mathbf{W}_0$ が存在する。ただし，$\mathbf{P}$ は対称な正定行列である。

$$\mathbf{PA}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}=-\mathbf{LL}^T \qquad (5)$$

$$\mathbf{PB}=\mathbf{CE}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{CQ}^T-\mathbf{LW}_0 \qquad (6)$$

$$\mathbf{W}_0\mathbf{W}_0{}^T=\mathbf{QC}^T\mathbf{B}-\mathbf{B}^T\mathbf{CQ}^T \qquad (7)$$

これは，Anderson の補助定理[6]を用いることにより証明されている。

次に安定定理が得られるが，従来はルーリエ形リアプノフ関数の存在を基盤として定理が確立されていた。すなわち，使用されるリアプノフ関数の形は

$$V_{(X)}=\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{PX}+V_{1(\sigma)} \qquad (8)$$

ただし，

$$V_{1(\sigma)}=\int_0^\sigma[\mathbf{Q}^T\mathbf{f}_{(\xi)}]^T d\xi$$

てあり，その時間導関数は

$$\dot{V}_{(X)}=-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T\mathbf{L}-\mathbf{f}^T\mathbf{W}_0^T)(\mathbf{L}^T\mathbf{x}-\mathbf{W}_0\mathbf{f})$$
$$-\mathbf{f}^T\mathbf{E}\sigma \qquad (9)$$

である。ここで，$\mathbf{P}$，$\mathbf{L}$，$\mathbf{W}_0$ は(5)～(7)式の解である。$\mathbf{f}_{(\sigma)}$ の積分 $V_{1(\sigma)}$ は，条件Ⅲ）を満足する $\mathbf{f}_{(\sigma)}$ のもとで積分可能である。また $\mathbf{f}_{(\sigma)}$ に対する条件Ⅱ）は(9)式の $\dot{V}$ が半負定値であることを保証する。しかしながら，本論文の目的は，ルーリエ形よりも広い安定領域を保証する非ルーリエ形のリアプノフ関数を基盤に安定性の解析を行うことである。そこで次の定理を導く。

《定　理　2》

もし，伝達関数 $\mathbf{Z}_{(S)}$ が正実で，かつ定理1で得られた $\mathbf{P}$，$\mathbf{L}$，$\mathbf{W}_0$ に加えて，次の(10)～(14)式を満足する行列 $\mathbf{H}$，$\mathbf{U}_0$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{K}=\mathrm{diag}\ [k_i]$，$\mathbf{D}=\mathrm{diag}\ [d_i]$，$\alpha=\mathrm{diag}\ [\alpha_i]$ が存在するならば，システム(1)は安定である。

$$\mathbf{LL}^T-2\mathbf{R}\Lambda\mathbf{C}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T\mathbf{C}\Psi\Psi\mathbf{C}^T\mathbf{A}=\mathbf{HH}^T \qquad (10)$$

$$\mathbf{LW}_0-\mathbf{R}\Lambda\mathbf{C}^T\mathbf{B}-2\mathbf{A}^T\mathbf{C}\Psi\Psi\mathbf{C}^T\mathbf{B}=\mathbf{HU}_0 \qquad (11)$$

$$\mathbf{W}_0^T\mathbf{W}_0-2\mathbf{B}^T\mathbf{C}\Psi\Psi\mathbf{C}^T\mathbf{B}=\mathbf{U}_0^T\mathbf{U}_0 \qquad (12)$$

$$\mathbf{A}^T[\mathbf{R}+\mathbf{C}(\mathbf{K}\Lambda+\mathbf{J})]=-\mathbf{CD}^T \qquad (13)$$

$$\mathbf{B}^T[\mathbf{R}+\mathbf{C}(\mathbf{K}\Lambda+\mathbf{J})]=\mathrm{diag}[\alpha_{i(\sigma i)}] \qquad (14)$$

ただし，$\mathbf{J}$，Λ，Ψ は次のような性質をもつ。

$$\mathbf{J}=\mathbf{M}-\mathbf{N}\Lambda=\mathrm{diag}[j_{i(\sigma i)}]$$
$$\mathbf{M}=\mathrm{diag}[m_i]$$
$$\mathbf{N}=\mathrm{diag}[n_i]$$
$$\Lambda=\partial\phi_{(\sigma)}/\partial\sigma=\mathrm{diag}[\lambda_{i(\sigma i)}]$$
$$\Psi=\mathrm{diag}[\sqrt{j_{i(\sigma i)}/\alpha_{i(\sigma i)}}]$$

さらに，m_i，n_i は任意定数，$\phi_{i(\sigma i)}$，$\alpha_{i(\sigma i)}$ は任意関数で，それぞれ以下の条件を満足するものとする。

$$\left.\begin{array}{l} m_i-n_i\lambda_i\geqq 0 \\ \sigma_i\phi_{i(\sigma i)}>0 \\ \phi_{i(0)}=0 \\ \alpha_{i(\sigma i)}>0 \\ d_i\geqq 0 \end{array}\right\} \qquad (15)$$

ただし，i＝1，2，…，w

（証　明）

(1)式のシステムに対するリアプノフ関数の候補として，次式で表される関数 $V_{(x)}$ を考える。

$$V_{(x)}=\frac{1}{2}[\ \mathbf{x}^T\ \ \phi^T_{(\sigma)}\ ]\begin{bmatrix}\mathbf{P} & \mathbf{R}\\ \mathbf{R}^T & \mathbf{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \phi_{(\sigma)}\end{bmatrix}$$
$$+V_{1(\sigma)}$$
$$+\int_0^\sigma[(\mathbf{M}-\mathbf{N}\Lambda)\phi_{(\sigma)}]^T d\sigma$$

$$+2\int_0^{\sigma}\boldsymbol{\delta}^T d\sigma \tag{16}$$

ただし，$\boldsymbol{\delta}$ は次式で表される要素をもつベクトル関数である。

$$\delta_i=\sqrt{f_{i(\sigma i)}(m_i-n_i\lambda_i)\phi_{i(\sigma i)}}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ w)$$

$V_{(x)}$ の時間導関数を求め，(10)〜(14)式の関係を代入すると，次式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(x)}=&-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(\mathbf{L}\mathbf{L}^T-2\mathbf{R}\Lambda\mathbf{C}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T\mathbf{C}\Psi\Psi\mathbf{C}^T\mathbf{A})\mathbf{x}\\&-\mathbf{x}^T(\mathbf{L}\mathbf{W}_0-\mathbf{R}\Lambda\mathbf{C}^T\mathbf{B}-2\mathbf{A}^T\mathbf{C}\Psi\Psi\mathbf{C}^T\mathbf{B})\mathbf{f}\\&-\frac{1}{2}\mathbf{f}^T(\mathbf{W}^T_0\mathbf{W}_0-2\mathbf{B}^T\mathbf{C}\Psi\Psi\mathbf{C}^T\mathbf{B})\mathbf{f}\\&-(\dot{\sigma}^T\Psi-\delta^T\Psi^{-1})(\Psi\dot{\sigma}-\Psi^{-1}\delta)\\&-\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{D}^T\phi-\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{E}^T\mathbf{f}\\=&-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T\mathbf{H}-\mathbf{f}^T\mathbf{U}^T_0)(\mathbf{H}^T\mathbf{x}-\mathbf{U}_0\mathbf{f})\\&-(\dot{\sigma}^T\Psi-\delta^T\Psi^{-1})(\Psi\dot{\sigma}-\Psi^{-1}\delta)\\&-\phi^T\mathbf{D}\sigma-\mathbf{f}^T\mathbf{E}\sigma\end{aligned}\tag{17}$$

(16)式の $V_{(x)}$ は，$\mathbf{f}_{(\sigma)}$ に対する条件Ⅰ)，Ⅱ)，Ⅲ）および(15)式の条件下で正定値となり(17)式の $\dot{V}_{(x)}$ は(10)〜(15)式の条件のもとに半負定値となる。したがって，(16)式はリアプノフ関数となり，リアプノフの定理に従い，(1)式のシステムは安定である。

4．例題システムへの適用

次式のように表されるシステムについて考える。ただし，$\eta>0$，$\mu>0$，$\beta>0$ とする。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\eta\\-\mu&-\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}f_{(\sigma)} \tag{18}$$

$$\sigma=[\,1\ \ 0\,]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

はじめに，上式のシステムに対して，Moore-Anderson の定理に従い，(5)〜(7)式を満足する $\mathbf{P}$，$\mathbf{L}$，$\mathbf{W}_0$ を求める。これらは最終的に次式となる。

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mu&0\\0&\eta\end{bmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{bmatrix}0&0\\0&\sqrt{2\eta\beta}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{19}$$

したがって，(18)式のシステムに対するルーリエ形のリアプノフ関数は，$\mathbf{Q}=1$ と置くことにより

$$\begin{aligned}V_{(x)}=&\frac{1}{2}[\,x_1\ \ x_2\,]\begin{bmatrix}\mu&0\\0&\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\\&+\int_0^{\sigma_1}f_{1(\sigma 1)}d\sigma_1\\=&\frac{1}{2}(\mu x_1^2+\eta x_2^2)+\int_0^{\sigma_1}f_{1(\sigma 1)}d\sigma_1\end{aligned}\tag{20}$$

となる。また，その時間導関数は

$$\dot{V}_{(\sigma)}=-\eta\beta x_2^2 \tag{21}$$

となる。

次に，定理２における(10)〜(14)式を満足する $\mathbf{H}$，$\mathbf{U}_0$，$\mathbf{K}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{D}$，$\boldsymbol{\alpha}$ を求める。このとき，$\mathbf{U}_0$，$\mathbf{R}$ はベクトルであり，$\mathbf{K}$，$\mathbf{D}$ はそれぞれ，スカラ k_1，d_1 になることに注意する。

(12)式において，$\mathbf{B}^T\mathbf{C}=0$，$\mathbf{W}_0^T=[\,0\ \ 0\,]$ であることから

$$\mathbf{U}_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

が得られる。また，(10)式より

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&2\eta\beta\end{bmatrix}-2\lambda_1\begin{bmatrix}0&\eta r_1\\0&\eta r_2\end{bmatrix}-\frac{2(m_1-n_1\lambda_1)}{\alpha_1}\begin{bmatrix}0&0\\0&\eta^2\end{bmatrix}=\mathbf{H}\mathbf{H}^T \tag{22}$$

ここで，(14)式より

$$\begin{aligned}\alpha_1=&[\,0\ \ 1\,]\left\{\begin{bmatrix}r_1\\r_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(k_1\lambda_1+n_1\lambda_1)\right\}\\=&[\,0\ \ 1\,]\begin{bmatrix}r_1\\r_2\end{bmatrix}=r_2\end{aligned}$$

となるので，$\mathbf{R}^T=[\,0\ \ 1\,]$ とすると，$\alpha_1=1$ となる。このとき(22)式は

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&2\eta\beta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&2\eta\lambda_1\end{bmatrix}-2(m_1-n_1\lambda_1)\begin{bmatrix}0&0\\0&\eta^2\end{bmatrix}=\mathbf{H}\mathbf{H}^T$$

となるので

$$m_1=\frac{\beta}{\eta},\ \ n_1=\frac{1}{\eta} \tag{23}$$

と置くことにより，$\mathbf{H}$ は次式となる。

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \tag{24}$$

また，(13)式より

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \eta & -\beta \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (k_1\lambda_1 + m_1 - n_1\lambda_1) \right\}$$

$$= -CD^T$$

である。ここで

$$k_1 = \frac{1}{\eta} \tag{25}$$

とすれば

$$d_1 = \mu \tag{26}$$

となることがわかる。

以上のように，(10)～(14)式を満足する H, U_0, R, D, α が見つかったので，定理2より(18)式のシステムは安定である。

実際に，(18)式のシステムに対する(16)式を用いた非ルーリエ形のリアプノフ関数を求めると

$$\begin{aligned} V_{(x)} = & \frac{1}{2}\mu x_1^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\eta}\, x_2 + \frac{\phi_{1(\sigma_1)}}{\sqrt{\eta}}\right)^2 \\ & + \int_0^{\sigma_1} f_{1(\sigma_1)} d\sigma_1 \\ & + \frac{1}{\eta}\int_0^{\sigma_1} (\beta - \lambda_1)\phi_{1(\sigma_1)} d\sigma_1 \\ & + 2\int_0^{\sigma_1} \sqrt{1/\eta f_{1(\sigma_1)} (\beta - \lambda_1)\phi_{1(\sigma_1)}}\, d\sigma_1 \end{aligned} \tag{27}$$

となる。さらに，その時間導関数を求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(x)} = & -[\sqrt{(\beta-\lambda_1)\eta}\, x_2 - \sqrt{\phi_{1(\sigma_1)} f_{1(\sigma_1)}}]^2 \\ & -\mu\phi_{1(\sigma_1)}\sigma_1 \end{aligned} \tag{28}$$

5. 結言

ラグランジュ・シャルピ法によって，リエナール形非線形システムに対して導かれた拡張リアプノフ関数を参考にして，非線形フィードバックシステムに対する一つの非ルーリエ形リアプノフ関数を導いた。さらに得られた関数を基盤にして一つの安定定理も導出した。ここで用いられた非ルーリエ形のリアプノフ関数は，ルーリエ形リアプノフ関数よりも広い安定領域を与えることが文献〔4〕によって示されている。

参考文献

1) Miyagi, N. and Miyagi, H., ASME DS, 109-4 (1987) 410.
2) Miyagi, N. and Miyagi, H., ASME DS, 113-3 (1991) 531.
3) 宮城・宮城，機論，56-529，C(1990)，109.
4) 宮城・宮城・山城，第30回計自講論 (1991)，487.
5) J.B. Moore, B.D.O. Anderson, J. of Franklin Institute, 285 (1986), 488.
6) B.D.O. Anderson, J. of SIAM Control, 5-2 (1967).