

# ラグランジュの状態関数法による Liénard 形 非線形システムのリアプノフ関数構成

宮城 雅夫\*・宮城 隼夫\*\*

## CONSTRUCTION OF LYAPUNOV FUNCTION FOR LIÉNARD-TYPE NONLINEAR SYSTEMS USING LAGRANGE'S STATE FUNCTION TECHNIQUE

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

A systematic method of constructing Lyapunov function is studied, which is based on the construction technique of Lagrange's state function resulting from a system given by 2nd-order ordinary-differential equations. Because of considering the variable damping, the system is regarded as a Liénard-type nonlinear system. The proposed procedure for constructing Lyapunov functions is applied to a synchronous machine system, taking into account the effects of variable damping, field flux decay, automatic voltage regulator and velocity governor. The Lyapunov function obtained in this paper is used to estimate the stability boundary of the system. Then, it is discussed how a Lyapunov function indicates the relative effects of control-system parameters on the stability characteristic of a synchronous generator.

Key words ; Lyapunov Function, Liénard-Type Nonlinear System, Lagrange's State Function

### 1. 緒 言

Liénard の方程式は LRC 回路で表現される電気システムや回転機、バネの機械システムなどその適用範囲が広く、工学上重要な方程式の一つである。安定性の解析法としてはリアプノフ法がよく用いられているが、リアプノフ法の利点は平衡点の安定条件のみならずシステムの漸近安定領域まで論じることができる点にある。本報告では、Liénard の方程式を一般化した  $n$  個の 2 階微分方程式で記述される Liénard 形非線形システム<sup>1)</sup>のリアプノフ関数を、ラグランジュの状態関数法<sup>2)3)</sup>によって構成する。状態関数を構成するために、 $n$  次の正則な定数マトリクス  $S$  を乗じた一つの

相似なシステムを想定する。変換マトリクス  $S$  を相似システムの一般化運動量ベクトルおよび一般化ポテンシャル力がうずなしの条件を満足するように選定すれば、状態関数が積分路に無関係に一意的に決定され、一般化エネルギー関数が得られる。さらに、システムの散逸関数が非負値になるような条件を  $S$  に付加すれば、一般化運動エネルギーと一般化ポテンシャルエネルギーの和で一つのリアプノフ関数が得られ、散逸関数に負符号をつけたものがリアプノフ関数の時間微分値になる。本報告では以上の構成法について述べるとともに、具体的な発電機システムへの適用例も示す。

### 2. リアプノフ関数構成

本論で取り扱う Liénard 形非線形システムは、 $n$  個の 2 階の微分方程式

$$\ddot{x} + G(x)\dot{x} + f(x) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

で与えられる。ここで、 $x$ ,  $f$  はそれぞれ  $n$  次元ベク

\* 機械工学科

\*\* 琉球大学工学部 (〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原 1)

トル,  $n$ 次元ベクトル関数で,  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  は  $n$  次のマトリクスである.

(1)式において一般化運動量, 一般化ポテンシャル力を定義することもできるが, これらが必ずしもうずなしの条件を満足するとは限らない. したがって(1)式の両辺に  $n$  次の正則なマトリクス  $\mathbf{S}$  を掛け, 次の相似システムを得る.

$$\mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots(2)$$

(2)式のシステムに対する一般化運動量  $\mathbf{P}(\dot{\mathbf{x}})$  と一般化ポテンシャル力  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\dot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{S}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる. また, レイリーの散逸関数  $D(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  は

$$D(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる.

ここでも, もし正則マトリクス  $\mathbf{S}$  が(3)式の  $\mathbf{P}(\dot{\mathbf{x}})$  と  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  に対し,

$$\frac{\partial P_i(\dot{x}_i)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial P_j(\dot{x}_j)}{\partial \dot{x}_j}, \quad \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial F_j(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots(5)$$

を満足し, さらに

$$D(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \geq 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

となるように選定することができれば, 一般化運動エネルギー  $\mathcal{T}(\dot{\mathbf{x}})$  と一般化ポテンシャルエネルギー  $\mathcal{U}(\mathbf{x})$  は積分路に無関係に次式で求められる.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\dot{\mathbf{x}}) &= \int_0^{\dot{\mathbf{x}}} [\mathbf{P}(\dot{\mathbf{x}})]^T d\dot{\mathbf{x}} \\ \mathcal{U}(\mathbf{x}) &= \int_0^{\mathbf{x}} [\mathbf{F}(\mathbf{x})]^T d\mathbf{x} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(7)$$

(4)式におけるマトリクス  $\mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x})$  は常に対称とは限らないが, これを対称マトリクス  $\mathbf{R}_S(\mathbf{x})$  と交代マトリクス  $\mathbf{R}_{Sk}(\mathbf{x})$  の和

$$\mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_S(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_{Sk}(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_S(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [\mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x}) + (\mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x}))^T] \\ \mathbf{R}_{Sk}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [\mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x}) - (\mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x}))^T] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(9)$$

で示すと

$$D(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_S(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad \dots\dots\dots(10)$$

となるので,  $\mathbf{S}\mathbf{G}(\mathbf{x})$  の定値性は, その対称, 非対称を問わず対称成分  $\mathbf{R}_S(\mathbf{x})$  の定値性で知ることができる.

そこで, 一つのリアプノフ関数の候補としてシステムエネルギー

$$V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathcal{T}(\dot{\mathbf{x}}) + \mathcal{U}(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots(11)$$

を考えれば, これが, ある定数  $C$  について  $V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) < C$  でつくられる有界な領域内  $\Omega$  で, 次の条件を満足すればリアプノフ関数となり, システムは漸近安定となる.

- i)  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$  に関して連続な 1 階偏導関数をもつ連続な実数値スカラ関数
- ii)  $V_{(0,0)} = 0$
- iii)  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$  に対し  $V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) > 0$
- iv)  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$  に対し  $\dot{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leq 0$
- v) 原点以外のシステムの任意の解軌道上で  $\dot{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  は恒等的に 0 でない.

(7), (11)式の関係を用いれば最終的にリアプノフ関数  $V$  の形は

$$V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} + \int_0^{\mathbf{x}} [\mathbf{F}(\mathbf{x})]^T d\mathbf{x} \quad \dots\dots\dots(12)$$

となり, その時間導関数は

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_S(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる.

### 3. 例題システムへの適用

発電機の鎖交磁束変化, 自動電圧調整器 (AVR), 速度調整器 (GOV) の効果を考慮した同期発電機システムは文献 3), 4) より次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \frac{g(x_1)}{M} x_1 + \frac{K_1}{M} (x_2 + e) \sin(x_1 + \delta^*) \\ - \frac{K_2}{M} \sin 2(x_1 + \delta^*) - \frac{1}{M} (x_4 + P_0) = 0 \\ \dot{x}_2 + \eta_1 x_2 - \eta_3 x_3 + \eta_2 [\cos \delta^* - \cos(x_1 + \delta^*)] = 0 \\ \dot{x}_3 + \eta_5 x_2 + \eta_4 x_3 - \eta_6 [\cos \delta^* - \cos(x_1 + \delta^*)] = 0 \\ \eta_8 \dot{x}_1 + \dot{x}_4 + \eta_7 x_4 = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで

$$\begin{aligned} g(x_1) &= a_1 \cos^2(x_1 + \delta^*) - a_2 \sin^2(x_1 + \delta^*) \\ a_1 &= \frac{(x_{q'} - x_{q''}) T_{qo''}}{(x_{q'} + x_{12})^2} E_B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{(x_{d'} - x_{d'})T_{do'}}{(x_{d'} + x_{12})^2} E_B^2 \\
 K_1 &= \frac{E_B}{x_{12} + x_{d'}}, \quad K_2 = \frac{x_q - x_{d'}}{2(x_{12} + x_{d'})(x_{12} + x_q)} E_B^2 \\
 \eta_1 &= \frac{x_d + x_{12}}{T_{do'}(x_{12} + x_{d'})}, \quad \eta_2 = \frac{(x_d - x_{d'})E_B}{T_{do'}(x_{12} + x_{d'})} \\
 \eta_3 &= \frac{1}{T_{do'}}, \quad \eta_4 = \frac{1}{T_e} \\
 \eta_5 &= \frac{\mu k x_{12}}{T_e(x_{12} + x_{d'})}, \quad \eta_6 = \frac{\mu k x_{d'} E_B}{T_e(x_{12} + x_{d'})} \\
 \eta_7 &= \frac{1}{T_g}, \quad \eta_8 = \frac{K_g}{T_g \omega_o}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

であり、また本文で使用する諸記号は表 1 に示す。

表 1 諸記号

|            |  |
|------------|--|
| $x_d$      | : 発電機直軸同期リアクタンス (p.u.)                       |
| $x_q$      | : 発電機横軸同期リアクタンス (p.u.)                       |
| $x_{d'}$   | : 発電機直軸過渡リアクタンス (p.u.)                       |
| $x_{12}$   | : 発電機端子と無限大母線間の全リアクタンス (p.u.)                |
| $T_{do'}$  | : 発電機の開路時定数 (s)                              |
| $T_e$      | : AVR 系の時定数 (s)                              |
| $T_g$      | : GOV 系の時定数 (s)                              |
| $\mu$      | : AVR 系のゲイン                                  |
| $K_g$      | : GOV 系のゲイン                                  |
| $\omega_o$ | : $2\pi f_o$ ( $f_o = 60\text{Hz}$ )         |
| $k$        | : 定数 (本文では $\frac{V_{to}}{V_{tqo}}$ を採用)     |
| $V_{to}$   | : 端子電圧の目標設定値                                 |
| $V_{tqo}$  | : $V_{to}$ の $q$ 軸成分電圧                       |
| $M$        | : (単位慣性定数) / $\omega_o$ ( $s^2/\text{rad}$ ) |
| $E_B$      | : 無限大母線電圧                                    |
| $E_{q'}$   | : 界磁鎖交磁束数に比例した電圧 (p.u.)                      |
| $e$        | : 故障前の平常運転時の $E_{q'}$                        |
| $\delta$   | : $E_B$ と $E_{q'}$ 間の位相角 (rad)               |
| $\delta^o$ | : 故障前の平常運転時の $\delta$                        |

上式において  $x_1, x_2, x_3, x_4$  がそれぞれ発電機の位相角, 発電機の鎖交磁束, 発電機の界磁電圧, 発電機の機械的入力の変化分を表しており,  $x_3, x_4$  の変化がそれぞれ自動電圧調整器, 速度調整器の効果を示す。

(14)式を(1)式の Liénard 形システムの形式で表すと,

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g(x_1)}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \eta_8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \frac{K_1}{M}(x_2 + e)\sin(x_1 + \delta^o) - \frac{K_2}{M}\sin 2(x_1 + \delta^o) - \frac{1}{M}(x_4 + P_0) \\ \eta_1 x_2 - \eta_3 x_3 + \eta_2 |\cos \delta^o - \cos(x_1 + \delta^o)| \\ \eta_5 x_2 + \eta_4 x_3 - \eta_6 |\cos \delta^o - \cos(x_1 + \delta^o)| \\ \eta_7 x_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

次に変換マトリクス  $S$  を

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (17)$$

と定義して, (2)式のような相似システムを考える。この  $S$  を用いて(3)式で与えられるような一般化運動量  $P(x)$  と一般化ポテンシャル力  $F(x)$  を求め, これらに(5)式のうずなしの条件を適用すれば, 次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 s_{22} &= \frac{K_1}{M} \left( \frac{\eta_4}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} \right) s_{11} + \frac{\eta_6(\eta_1 \eta_6 + \eta_2 \eta_5)}{\eta_2(\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6)} s_{33} \\
 s_{23} &= \frac{K_1}{M} \left( \frac{\eta_3}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} \right) s_{11} + \frac{\eta_1 \eta_6 + \eta_2 \eta_5}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} s_{33} \\
 s_{32} &= \frac{\eta_6}{\eta_2} s_{23}, \quad s_{14} = \frac{1}{\eta_7 M} s_{11} \\
 s_{24} &= \frac{\eta_1 \eta_6 + \eta_2 \eta_5}{\eta_2 \eta_7} s_{43}, \quad s_{34} = \frac{\eta_2 \delta^o - \eta_5 \eta_6}{\eta_2 \eta_7} s_{43} \\
 s_{42} &= \frac{\eta_6}{\eta_2} s_{43} \\
 s_{12} &= s_{13} = s_{21} = s_{31} = s_{41} = 0
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

計算を簡単にするために  $s_{43} = 0$  とおけば,  $s_{24} = s_{34} = s_{42} = 0$  となり, 散逸関数が非負となる条件より次の関係式が導かれる。

$$s_{22} s_{33} - \frac{1}{4} (s_{23} + s_{32})^2 \geq \dots\dots\dots(19)$$

$$\left(\frac{g(x_1)}{M} s_{11} + \eta_8 s_{14}\right) s_{44} - \frac{1}{4} (s_{14} + \eta_8 s_{44})^2 \geq \dots\dots\dots(20)$$

(18), (19), (20)式の関係より全てのsを決定し, (1)式の関係よりVを求めれば, 最終的に次式を得る.

$$V = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + K_1 (x_2 + e) |\cos \delta^s - \cos (x_1 + \delta^s)| - \frac{K_2}{2} |\cos 2 \delta^s - \cos 2 (x_1 + \delta^s)| - P_0 x_1 + \frac{K_1}{2} \left( \frac{\eta_1 \eta_4 + \eta_3 \eta_5}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} \right) x_2^2 + \frac{1}{2} K_1 H \left[ \frac{\eta_1 \eta_6 + \eta_2 \eta_5}{\sqrt{\eta_2 (\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6)}} x_2 + \frac{\sqrt{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6}}{\eta_2} x_3 \right]^2 + \frac{\eta_7}{2} \left[ \frac{2g(x_1) + \frac{\eta_8}{\eta_7} - 2\sqrt{g(x_1) \left[ g(x_1) + \frac{\eta_8}{\eta_7} \right]}}{\eta_8^2} \right] x_4^2 \dots\dots\dots(21)$$

ただし,

$$H = \frac{h_2 - \sqrt{h_2^2 - 4h_1^2 h_3^2}}{2h_1}$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_6}{\eta_2} - \frac{\eta_1 \eta_6 + \eta_2 \eta_5}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} \right)$$

$$h_2 = \frac{\eta_4}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} - \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_3}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} \right) * \left( \frac{\eta_6}{\eta_2} + \frac{\eta_1 \eta_6 + \eta_2 \eta_5}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} \right)$$

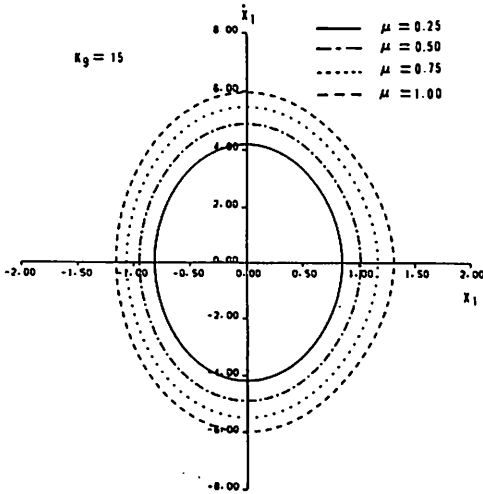


図1 安定領域の断面図 ( $x_2=x_3=x_4=0$ )

$$h_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_3}{\eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_6} \right) \dots\dots\dots(22)$$

表2. パラメータ

|                |                |                    |
|----------------|----------------|--------------------|
| $x_d = 1.15$   | $x_q = 0.75$   | $x_d' = 0.37$      |
| $x_d'' = 0.24$ | $x_q'' = 0.34$ | $T_{do}' = 5.0$    |
| $M = 0.0318$   | $x_{12} = 0.5$ | $T_{do}'' = 0.035$ |
| $T_e = 1.0$    | $e = 1.03$     | $T_{qo}'' = 0.035$ |
| $T_q = 1.0$    | $x_q = x_q'$   |                    |

上式において, Hが実数になるための条件が自動電圧調整器のゲインと時定数の制約を与える.

図1~4は発電機の鎖交磁束変化, 自動電圧調整器, 速度調整器, および可変制動の4つの効果を考慮した発電機システムのリアプノフ関数から得られる漸近安定領域を描いたものである. 図1, 2は  $K_g = 15$  として AVR 系のゲイン  $\mu$  を 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 と変化させて  $x_1 - i_1$  断面および  $x_1 - x_2$  断面の安定領域を描いたものであり, 図3, 4は  $\mu = 1.0$  として GOV 系のゲイン  $K_g$  を 1, 5, 10, 15 と変化させたときの  $x_1 - x_4$  断面および  $i_1 - x_4$  断面の安定領域を示す. これらの図からゲインが大きくなるほど, 安定領域が広がっていることがわかる. なお, (21)式のVにおいて  $\delta^s = 40^\circ$ ,  $P_0 = K_1 \sin \delta^s - K_2 \sin 2 \delta^s$  であり, その他のパラメータは表2に示す.

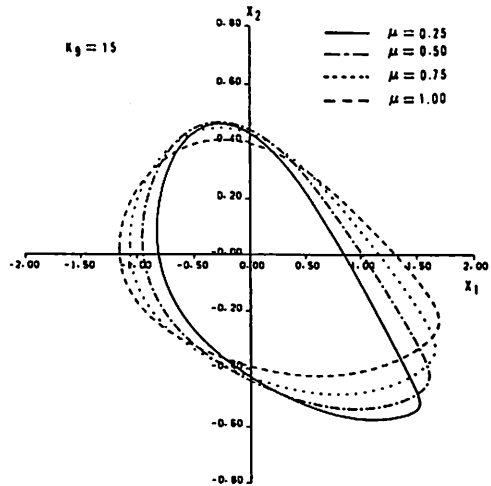


図2 安定領域の断面図 ( $i_1=x_3=x_4=0$ )

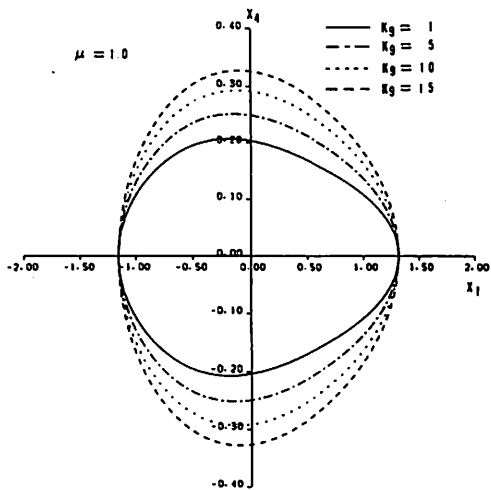


図3 安定領域の断面図 ( $\dot{x}_1 = x_2 = x_3 = 0$ )

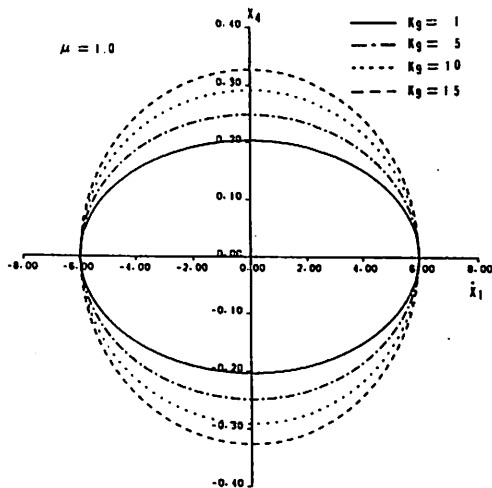


図4 安定領域の断面図 ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ )

#### 4. 結 言

Liénard 形非線形システムのリアプノフ関数をラグランジュの状態関数法を用いて構成する手法について提案した。本手法によれば比較的簡単にリアプノフ関数を構成できるが、関数構成の成否は変換マトリクス  $S$  がうまく決定されるかどうかによる。

#### 文 献

1) 宮城・他 2 名, 計自論, 24-4 (昭63), 22.

2) Schulz, D. G., and Melsa, J. L., *State Functions and Linear-Control Systems*, (1967), McGraw-Hill.

3) Miyagi, H. and Taniguchi, T., *PIEE*, 124 - 12 + (1977), 1197.

4) Miyagi, H., *IEEE, AC - 29 - 12* (1984), 1120.