

突発噴流と衝撃波の干渉に関する数値計算

灘光 陽*・本田 隆志*

Numerical Analysis of Interaction Between Shock Wave and Jet

You NADAMITSU and Takashi HONDA

A numerical analysis based on TVD scheme was applied to simulate a problem of interaction between shock wave and jet with different gas (nitrogen or hydrogen).

Using the different gas consideration based on other authors, interaction between a incident shock wave and a jet in shock tube were simulated. In this paper, we show the numerical results using a manner of graphical technique in order to observe the behavior of jet and reflected shock wave.

Key Words : Compressible Flow, Unsteady Flow, Shock wave, Jet, Interaction, Different gas, TVD Scheme

1. 緒 言

衝撃波の反射、屈折、回折、干渉等の解明や衝撃波管類似問題（例えば圧縮性のある場合の管オリフィスの圧力損失¹⁾、高温・高圧状態の空気中に燃料（気体）を噴射した場合の気体の混合過程²⁾³⁾、衝撃波過給機⁴⁾等）の実験的研究に衝撃波管が用いられている。また、これらの衝撃波を伴う物理現象の理論的解析の大半は、流れを支配する基礎方程式が非線形なため解析的に厳密解を求めるることは困難で、モデル化や数値解析による近似解によっている。衝撃波を伴う物理現象に対し、数値計算の手段として Lax-Wendroff 法や Richtmyer 二次精度差分法を用いると、衝撃波不連続面の解の振動を抑制する人工粘性項の取り扱いがむづかしく、鮮明な衝撃波を捉えることが困難である。しかしながら Harton による二次精度 TVD 差分法^{5),6)}は数値粘性が小さく、衝撃波、接触不連続面をより安定に鮮明に捉えることができ、最近衝撃波の反射過程⁷⁾、衝撃波の伝ば⁸⁾等の数値計算に応用されている。本報では文献(2), (3)の衝撃波が噴流と干渉する問題に、文

献(9)の異種気体混合系の処理を加えた二次精度 TVD 差分法を適用し、入射衝撃波が噴射直後の噴流と干渉する場合の計算結果を図形処理で示す。

記 号

- ρ_A : 空気の密度
 ρ_D : 異種気体の密度
 ρ : 総密度
 u : x 方向速度成分
 v : y 方向速度成分
 E : 単位体積当たりの全エネルギー
 P : 圧力
 γ_A : 空気の比熱比
 γ_D : 異種気体の比熱比
 M_A : 空気の分子量
 M_D : 異種気体の分子量
 Q : 数値粘性
 g : 制限関数
 ν : CFL制限に類似
count : 計算回数

*機械工学科

• ヤコビアン

$$\frac{\partial F}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_D}{\rho^2}m & -\frac{\rho_A}{\rho^2}m & \frac{\rho_A}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_D}{\rho^2}m & \frac{\rho_A}{\rho^2}m & \frac{\rho_D}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} - (E - \frac{m^2+n^2}{2\rho})kc \cdot \rho_D & -\frac{m^2}{\rho^2} + (E - \frac{m^2+n^2}{2\rho})kc \cdot \rho_A & \frac{(3-\gamma)}{\rho}m & -\frac{(\gamma-1)}{\rho}n & \gamma-1 \\ +\frac{(\gamma-1)}{2\rho^2}(m^2+n^2) & +\frac{(\gamma-1)}{2\rho}(m^2+n^2) & & & \\ -\frac{mn}{\rho^2} & -\frac{mn}{\rho^2} & \frac{n}{\rho} & \frac{m}{\rho} & 0 \\ -|\gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2\rho}(m^2+n^2)| \frac{m}{\rho^2} & -|\gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2\rho}(m^2+n^2)| \frac{m}{\rho^2} & |\gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2\rho}(m^2+n^2)| / \rho & -\frac{(\gamma-1)}{\rho^2}mn & \frac{\gamma m}{\rho} \\ +\frac{m}{\rho}[-|E - \frac{(m^2+n^2)}{2\rho}| kc \cdot \rho_D & +\frac{m}{\rho}[|E - \frac{(m^2+n^2)}{2\rho}| kc \cdot \rho_A & -\frac{(\gamma-1)}{\rho^2}m^2 & & \\ +\frac{(\gamma-1)}{2\rho^2}(m^2+n^2)] & +\frac{(\gamma-1)}{2\rho^2}(m^2+n^2)] & & & \end{pmatrix}$$

ここに $K_C = (\frac{1}{\gamma_A - 1} - \frac{1}{\gamma_D - 1}) / [M_A \cdot M_D \{ \frac{\rho_A}{M_A(\gamma_A - 1)} + \frac{\rho_D}{M_D(\gamma_D - 1)} \}^2]$, $m = \rho U$, $n = \rho V$

$$\frac{\partial G}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_D}{\rho^2}n & -\frac{\rho_A}{\rho^2}n & 0 & \frac{\rho_A}{\rho} & 0 \\ -\frac{\rho_D}{\rho^2}n & \frac{\rho_A}{\rho^2}n & 0 & \frac{\rho_D}{\rho} & 0 \\ -\frac{mn}{\rho^2} & -\frac{mn}{\rho^2} & \frac{n}{\rho} & \frac{m}{\rho} & 0 \\ -\frac{n^2}{\rho^2} - |E - \frac{m^2+n^2}{2\rho}| \cdot \rho_D \cdot kc & -\frac{n^2}{\rho^2} + (E - \frac{m^2+n^2}{2\rho}) \rho_A \cdot kc & -\frac{(\gamma-1)}{\rho}m & -\frac{(3-\gamma)}{\rho}n & \gamma-1 \\ +\frac{(\gamma-1)}{2\rho^2}(m^2+n^2) & +\frac{(\gamma-1)}{2\rho^2}(m^2+n^2) & & & \\ -\frac{n}{\rho^2}|\gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2\rho}(m^2+n^2)| & -\frac{n}{\rho^2}|\gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2\rho}(m^2+n^2)| & |\gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2\rho}(m^2+n^2)| & & \\ +\frac{n}{\rho}[-|E - \frac{(m^2+n^2)}{2\rho}| \rho_D \cdot kc & +\frac{n}{\rho}[|E - \frac{(m^2+n^2)}{2\rho}| \rho_A \cdot kc & -\frac{(\gamma-1)}{\rho^2}mn & / \rho - \frac{(\gamma-1)}{\rho^2}n^2 & \frac{\gamma n}{\rho} \\ +\frac{(\gamma-1)}{2\rho^2}(m^2+n^2)] & +\frac{(\gamma-1)}{2\rho^2}(m^2+n^2)] & & & \end{pmatrix}$$

• 固有値

$a^m_x = [u+c, u, u, u-c, u]$, $a^m_y = [v+c, v, v, v-c, v]$ である。

・固有ベクトル

$$R_x = \begin{pmatrix} \frac{\rho_A}{\rho} & 1 & 0 & \frac{\rho_A}{\rho} & 0 \\ \frac{\rho_D}{\rho} & 0 & 1 & \frac{\rho_D}{\rho} & 0 \\ u-c & u & u & u+c & 0 \\ v & v & v & v & 1 \\ H-UC & k_D + \frac{1}{2}q^2 & \frac{1}{2}q^2 - k_A & H+UC & v \end{pmatrix}$$

ここに $q^2 = u^2 + v^2$, $K_D = K_C \cdot \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)^2} \cdot \rho_D \cdot \rho$, $K_A = K_C \cdot \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)^2} \cdot \rho_A \cdot \rho$, $H = \frac{c^2}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2}q^2$

$$R_y = \begin{pmatrix} \frac{\rho_A}{\rho} & 1 & 0 & \frac{\rho_A}{\rho} & 0 \\ \frac{\rho_D}{\rho} & 0 & 1 & \frac{\rho_D}{\rho} & 0 \\ u & u & u & u & 1 \\ v-c & v & v & v+c & 0 \\ H-VC & \frac{1}{2}q^2 + k_D & \frac{1}{2}q^2 - k_A & H+VC & u \end{pmatrix}$$

逆行列 R^{-1}_x , R^{-1}_y は次のようになる。

$$R^{-1}_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k_1 - k_2 \cdot k_D + \frac{u}{c}) & \frac{1}{2}(k_1 + k_2 k_A + \frac{u}{c}) & -\frac{1}{2}(k_2 U + \frac{1}{c}) & -\frac{1}{2}k_2 V & \frac{1}{2}k_2 \\ 1 - \frac{\rho_A}{\rho} (k_1 - k_2 k_D) & -\frac{\rho_A}{\rho} (k_1 + k_2 k_A) & \frac{\rho_A}{\rho} k_2 U & \frac{\rho_A}{\rho} k_2 V & -\frac{\rho_A}{\rho} k_2 \\ -\frac{\rho_D}{\rho} (k_1 - k_2 k_D) & 1 - \frac{\rho_D}{\rho} (k_1 + k_2 k_A) & \frac{\rho_D}{\rho} k_2 U & \frac{\rho_D}{\rho} k_2 V & -\frac{\rho_D}{\rho} k_2 \\ \frac{1}{2}(k_1 - k_2 k_D - \frac{u}{c}) & \frac{1}{2}(k_1 + k_2 k_A - \frac{u}{c}) & \frac{1}{2}(-k_2 U + \frac{1}{c}) & -\frac{1}{2}k_2 V & \frac{1}{2}k_2 \\ -v & -v & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここに $k_2 = \frac{\gamma-1}{C^2}$, $k_1 = k_2 \frac{q^2}{2}$

$$R^{-1}_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k_1 - k_2 \cdot k_D + \frac{v}{c}) & \frac{1}{2}(k_1 + k_2 k_A + \frac{v}{c}) & -\frac{1}{2}k_2 U & -\frac{1}{2}(k_2 V + \frac{1}{C}) & \frac{1}{2}k_2 \\ 1 - \frac{\rho_A}{\rho} (k_1 - k_2 \cdot k_D) & -\frac{\rho_A}{\rho} (k_1 + k_2 \cdot k_A) & \frac{\rho_A}{\rho} k_2 U & \frac{\rho_A}{\rho} k_2 V & -\frac{\rho_A}{\rho} k_2 \\ -\frac{\rho_D}{\rho} (k_1 - k_2 \cdot k_D) & 1 - \frac{\rho_D}{\rho} (k_1 + k_2 \cdot k_A) & \frac{\rho_D}{\rho} k_2 U & \frac{\rho_D}{\rho} k_2 V & -\frac{\rho_D}{\rho} k_2 \\ \frac{1}{2}(k_1 - k_2 \cdot k_D - \frac{v}{c}) & \frac{1}{2}(k_1 + k_2 \cdot k_A - \frac{v}{c}) & -\frac{1}{2}k_2 U & \frac{1}{2}(-k_2 V + \frac{1}{C}) & \frac{1}{2}k_2 \\ -u & -u & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また α は次のように表わされる。

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} (AX - BX) / 2 \\ \Delta \rho_A - \frac{\rho_A}{\rho} AX \\ \Delta \rho_D - \frac{\rho_D}{\rho} AX \\ (AX + BX) / 2 \\ \Delta n - v \Delta \rho \end{bmatrix}$$

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} (AY - BY) / 2 \\ \Delta \rho_A - \frac{\rho_A}{\rho} AY \\ \Delta \rho_D - \frac{\rho_D}{\rho} AY \\ (AY + BY) / 2 \\ \Delta m - u \Delta \rho \end{bmatrix}$$

ここに

$$AX = k_2 \left[\left(\frac{q^2}{2} - k_D \right) \Delta \rho_A + \left(\frac{q^2}{2} + k_A \right) \Delta \rho_D \right. \\ \left. - u \Delta m - v \Delta n + \Delta E \right]$$

$$BX = (\Delta m - u \Delta \rho) / c$$

$$AY = AX$$

$$BY = (\Delta n - v \Delta \rho) / c$$

2・3 初期条件および境界条件

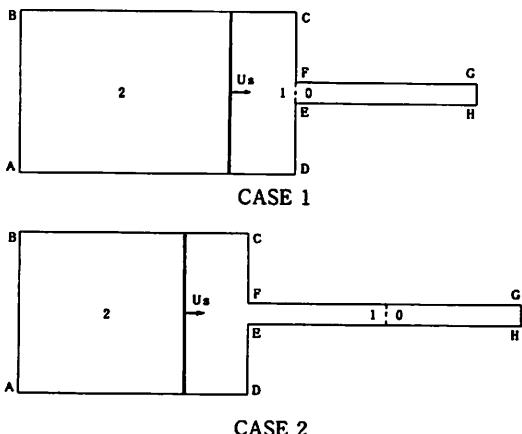


図1 初期条件

計算は水素がケース1、窒素がケース1、2の初期条件で行なった。図1の矩形ABCDは衝撃波管、EFGHは水素あるいは窒素気体噴射管の計算領域を示す。図1内の領域0は水素(0.5MPa)あるいは窒素(1MPa)の貯気槽圧で、領域1を衝撃波前方の低圧側空気(533Pa)とし、気体は静止しているとした。領域2の諸物理量は、衝撲波管の高圧部を0.5MPaとした場合の理論入射衝撲波マッハ数に対し、Rankine-Hugoniotの関係式から求めた。図1のEFは噴射管出口で、破線は異種気体の境界を示す。計算格子数はケース1が衝撲波管内60×39、噴射管内40×5である。ま

た衝撲波の位置は噴射管出口から上流側5格子と6格子の間に設定した。一方ケース2の計算格子数は衝撲波管内50×39、噴射管内200×5とし、異種気体の境界は噴射出口から上流側100格子と101格子の間とした。また衝撲波は計算開始後、噴射気体が噴射管出口近傍に近づいた後、噴射気体の影響を受けていない衝撲波管内に設定した。次に境界条件は、衝撲波管の上流側ABと噴射管の上流側GHは0次外挿、壁面AD、BC、CF、DE、FC、EHは反射の条件を用いた。なお計算は単精度で行なった。

3. 計算結果

図2はケース1の噴射気体窒素の速度ベクトル図である。速度ベクトル図からの衝撲波は入射衝撲波背後の一様流と速度変化の境界に位置する。(a)は入射衝撲波が反射壁(CF, DE)にほぼ到達した状態で、噴流が噴射管出口から噴出している様子がわかる。(b)～(h)は反射衝撲波が上流側に伝播している状態で、反射衝撲波背後の噴流の影響を受けていないところでは速度が0であることがわかる。また噴流の影響による衝撲波の弯曲は、反射衝撲波が上流側に伝播するにしたがってcount=40近傍までは増加するが、その後は減少する。また噴流の影響による渦の発生も見られる。次に図3は図2に対する等密度線図を示す。図中の実線、破線はそれぞれ空気、窒素を表わす。なお等密度線は入射衝撲波背後一様流の密度で無次元化した値である。同図より反射衝撲波弯曲部分の時間的変化が定

性的に観察される。また密度比10~200では窒素噴流のみが観察される。この噴流は時間とともに壁面に到達(約count=60)し、壁面で反射して図6(c)に見られるように壁面近傍で圧力の上昇が観察される。図4は等温度線図で、実線が最も温度が高く、明確ではないが破線のピッチが大きくなるにしたがって低い温度を示している。なお温度は $T = P / (\rho_A R_A + \rho_D R_D)$ により算出し、等温度線は入射衝撃波背後一様流の温度で無次元化している。また R_A, R_D は各気体の気体定数である。同図より窒素噴流が壁面に到達するまでは反射衝撃波湾曲部背後に最高温度領域が存在し(例えば(e))時間とともに広がって行くが、窒素噴流が壁面に到達すると壁面近傍の温度が上昇し((f)),さらに時間が経過すると反射衝撃波背後壁面近傍の領域に最大温度が観察される。次に図5は管軸の温度変化を示す。反射衝撃波背後の最高温度は計算回数の増加に対し最初急激に増加、その後本計算内ではわずかに減少する。この傾向は文献(2)の実験結果(急激に増加後大きく減少する)と異なり、またピーク値も実験値(約1900K)より高い。そして(b)に見られるように、この高温領域のすぐ後に圧力がほぼ等しく温度が急激に低い領域(冷気体領域)が存在する。図6は圧力分布図で、衝撲波管低圧側の圧力で無次元化した値に倍率を乗じて示している。入射衝撃波が反射壁に到達すると噴流影響を受けていない場所では圧力が均一に増加し、ほぼ一定値となっている。一方管軸近傍は衝撲波と噴流が干渉し、噴流の影響がない領域よりも局的に圧力が高くなっている。また噴流が壁面に干渉した後、壁面近傍の圧力上昇領域が広がっている様子がわかる((c), (d))。

次にケース2の結果を示す。図7は窒素気体が噴射管出口から噴射する前の噴射管軸での圧力、温度変化図である。貯氣槽圧1MPaから減少した圧力は圧力変化的先頭で約7KPaで圧力一定の領域を示している。この値は理論衝撲波管の単純理論¹⁰による圧力7KPaと一致する。また衝撲波背後の温度が高い領域(熱気体領域)と温度が低い領域(冷気体領域)の値も理論値とほぼ一致する(理論による熱気体領域927K、冷気体領域71K)。図8は管軸圧力の計算回数による変化を示す。(a)は入射衝撲波と噴流が、噴射管出口で干渉した状態で、噴射管出口近傍で圧力の上昇が見られる。そしてこの領域は計算回数が増すにしたがって広がり、その背後に第2の圧力上昇部分が見られる。干渉後の反射衝撲波背後の温度・圧力(本計算の入射

衝撲波マッハ数に対する反射衝撲波背後の温度、圧力の理論値はそれぞれ $T_s=1500K, P_s=30.9KPa$ のピーク値の変化は計算回数に対し、図9に見られるようにケース1と傾向はほぼ等しい。なお図中横軸の()内の数値は図5(a)の計算回数に対応している。初期の温度、圧力の上昇はケース1に比較して遅い。次に図10の速度ベクトル図から、噴流の噴射の様子はケース1と異なり、また噴流の影響による衝撲波湾曲のふくらみはケース1に比較して小さい。この衝撲波の位置の変化を図11に示す。図中のXR, XJはそれぞれ反射壁から反射衝撲波、反射壁から衝撲波湾曲部先端までの距離を示す。計算値による湾曲のふくらみはいずれの場合も実験値(代表的な値)より小さい。そしてケース1とケース2はわずかに傾向が異なる。この場合の図中の実験値は噴射時期が0~1msであり、噴流の影響により入射衝撲波マッハ数Msは2.53となっている。本計算ではMs=3.13を用いて反射壁近くに入射衝撲波を設定しているので図中の実験条件とは異なっている。今後噴射管内の粘性等を考慮して、噴流の影響を受けた場合の入射衝撲波の変化、入射衝撲波が反射壁に到達した時の噴射管内の圧力・温度などの変化を検討していく予定である。次に図12の等密度線図から噴流の形状がケース1と異なり((i)~(k))、噴流の影響が壁面に到達する位置も異なることがわかる(図3(e)と図12(d)の比較)。そして図13の等温度線図から、本計算内の最高温度領域は反射衝撲波背後管軸に存在する。また図14の圧力分布図から前述の反射衝撲波背後第2の圧力上昇部分の形成過程が見られ、時間の経過とともに(f), (g)に見られるように噴射管出口近傍にわずかに高い圧力領域が存在し、その他はほぼ一定の圧力に移行していることがわかる。図15~18は噴射気体が水素でケース1の計算結果の代表的な図形処理を示している。定量的な解析は次報で行う予定である。

4. 結 言

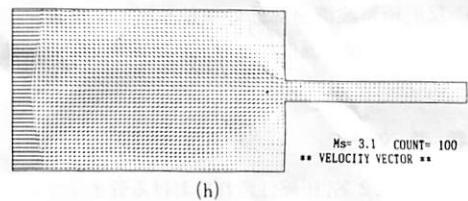
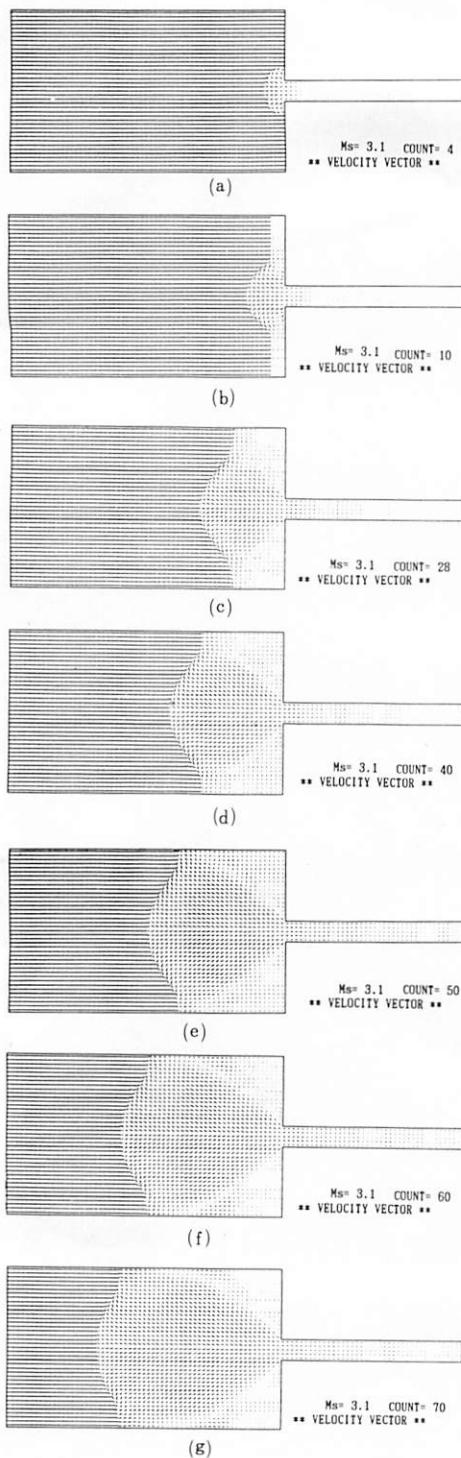
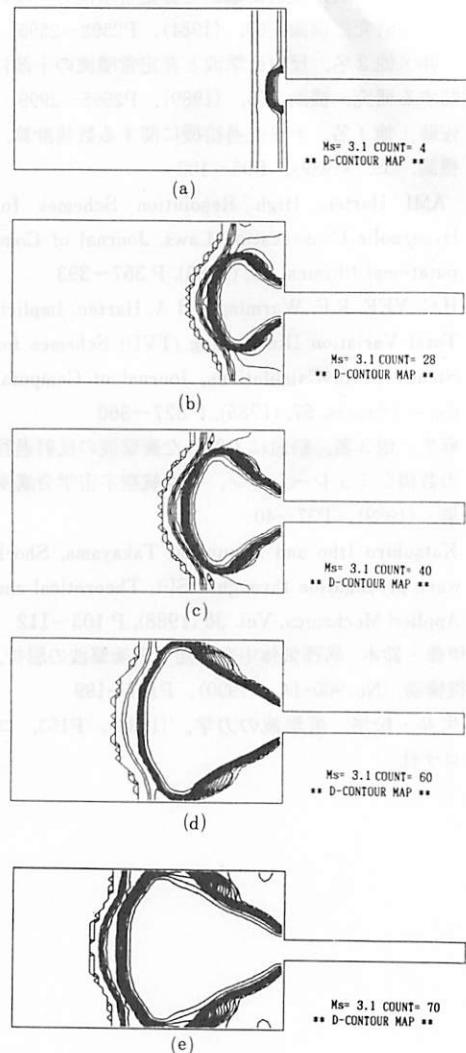
衝撲波が噴流と干渉する問題に、異種気体混合系の処理を加えた非粘性の数値計算により次の結果を得た。

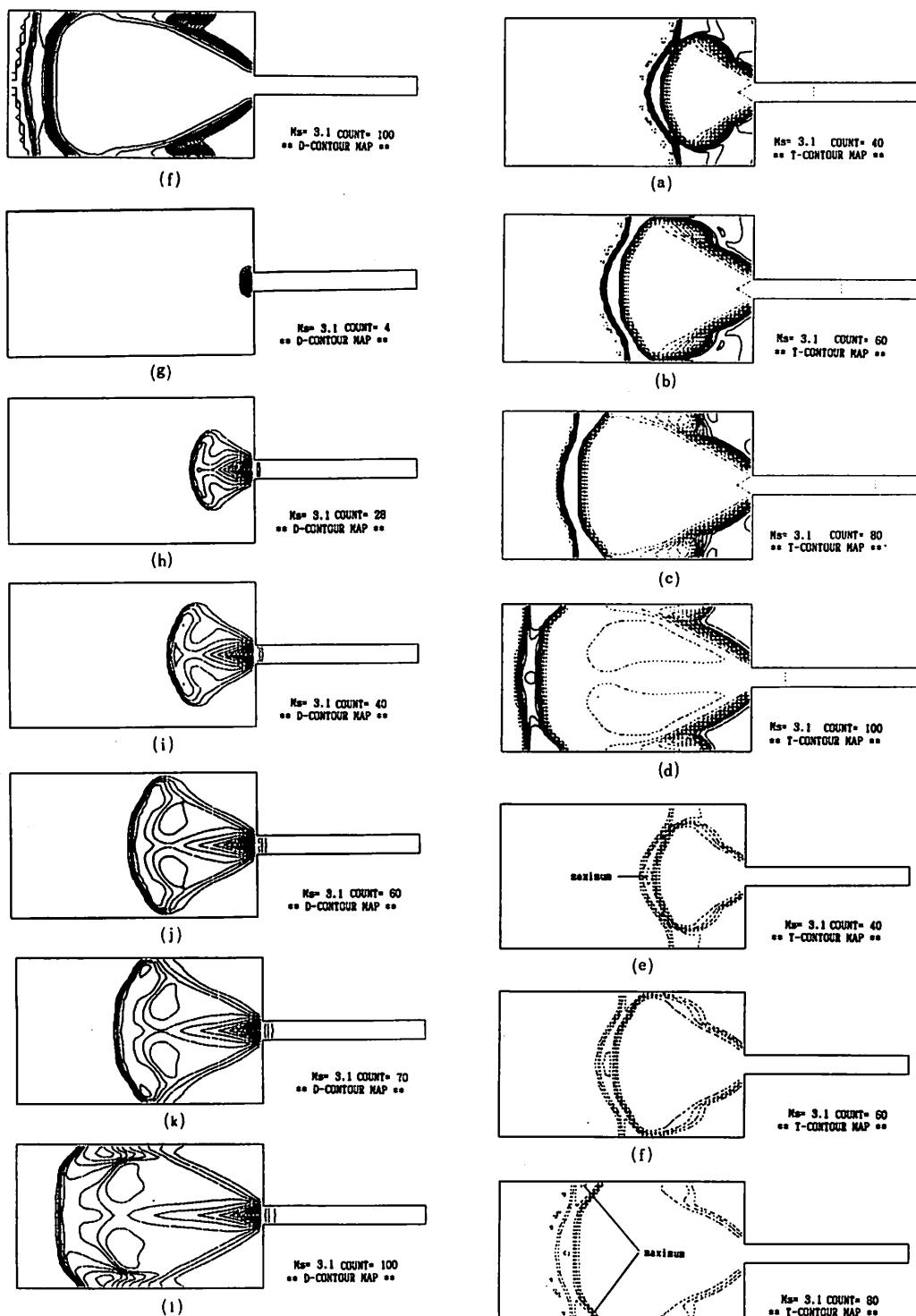
- (1) 衝撲波と噴流が干渉する非定常過程を速度、密度、温度、圧力の図形処理で定性的に観察できた。
- (2) 噴射気体の噴流の形状は異種気体境界の位置により異なる結果を得た。また異種気体境界を噴射管上流側に設定した場合、反射衝撲波背後に第2の圧力上昇部分の形成過程が見られた。

- (3) 反射衝撃波弯曲部分の挙動や反射衝撃波背後管軸、壁面近傍の温度、圧力上昇は参考文献の結果と定性的に一致する。

参考文献

- 1) 烏住・他 2 名, 圧縮性流れにおける管オリフィス・ノズルの損失予測法, 機論, 48, (1982), P1008~1015
- 2) 石井・他 2 名, 反射衝撃波と非定常噴流の干渉に関する研究, 機論, 50, (1984), P2592~2595
- 3) 石井・他 2 名, 反射衝撃波と非定常噴流の干渉に関する研究, 機論, 55, (1989), P2995~2999
- 4) 佐藤・他 4 名, 衝撃波過給機に関する数値計算, 機論, 55, (1989), P95~100
- 5) AMI Harten, High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics, 49, (1983), P 357~393
- 6) H.C. YEE, R.F. Warming and A. Harten, Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady State Calculations, Journal of Computational Physics, 57, (1985), P 327~360
- 7) 麻生・他 3 名, 斜面に入射した衝撃波の反射過程の数値シミュレーション, 日本航空宇宙学会講演集, (1989), P37~40
- 8) Katsuhiko Itoh and Kazuyoshi Takayama, Shock wave propagation through a Slit, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 36 (1988), P 103~112
- 9) 伊藤・鈴木, 異種気体中を伝播する衝撃波の屈折, 機構論, No.900-14, (1990), P197~199
- 10) 生井・松尾, 衝撃波の力学, (1983), P153, コロナ社

図2 速度ベクトル図 (N_2)図3 等密度線図 (N_2)



(a)~(f) P_A / P_2 , $P_D / P_2 = 0.5$ キザミ
(g)~(l) P_A / P_2 , $P_D / P_2 = 10$ キザミ

図3 等密度線図 (N_2)

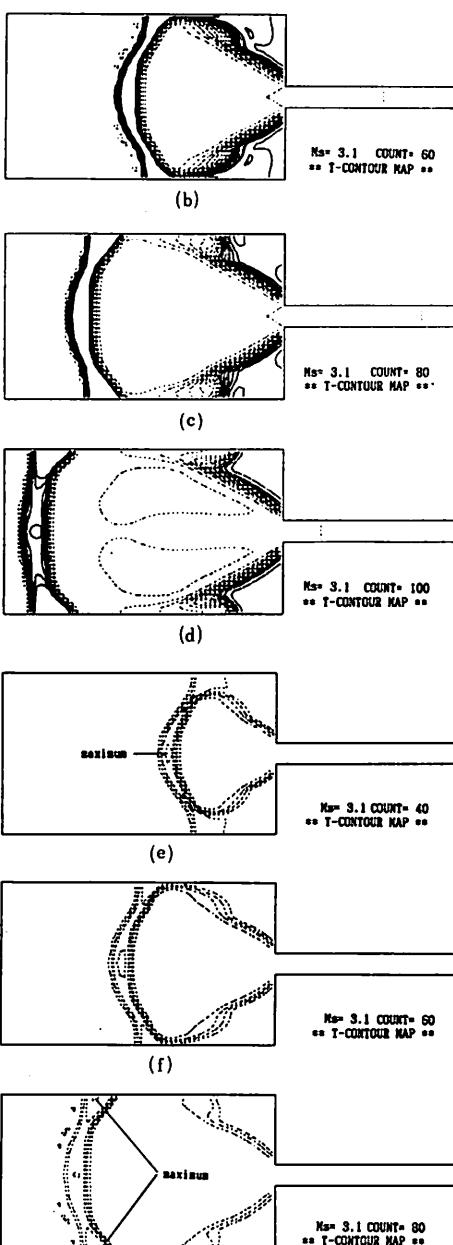
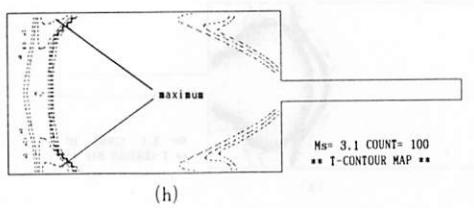


図4 等温度線図 (N_2)



(a)～(d) $T / T_2 = 0.1$ キザミ, (e) $T / T_2 = 0.4$ キザミ
(f)～(h) $T / T_2 = 0.5$ キザミ

図4 等温度線図 (N_2)

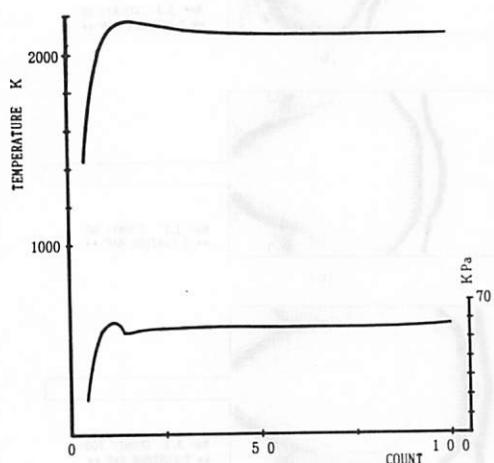


図5(a) 最高温度、最高温度点圧力の計算回数による変化 (N_2)

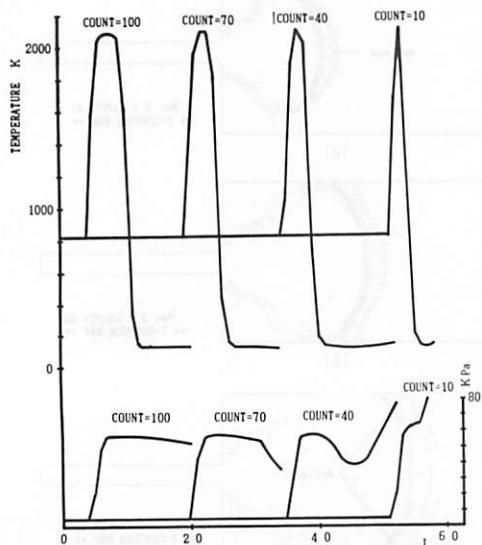


図5(b) 温度・圧力変化図 (N_2)

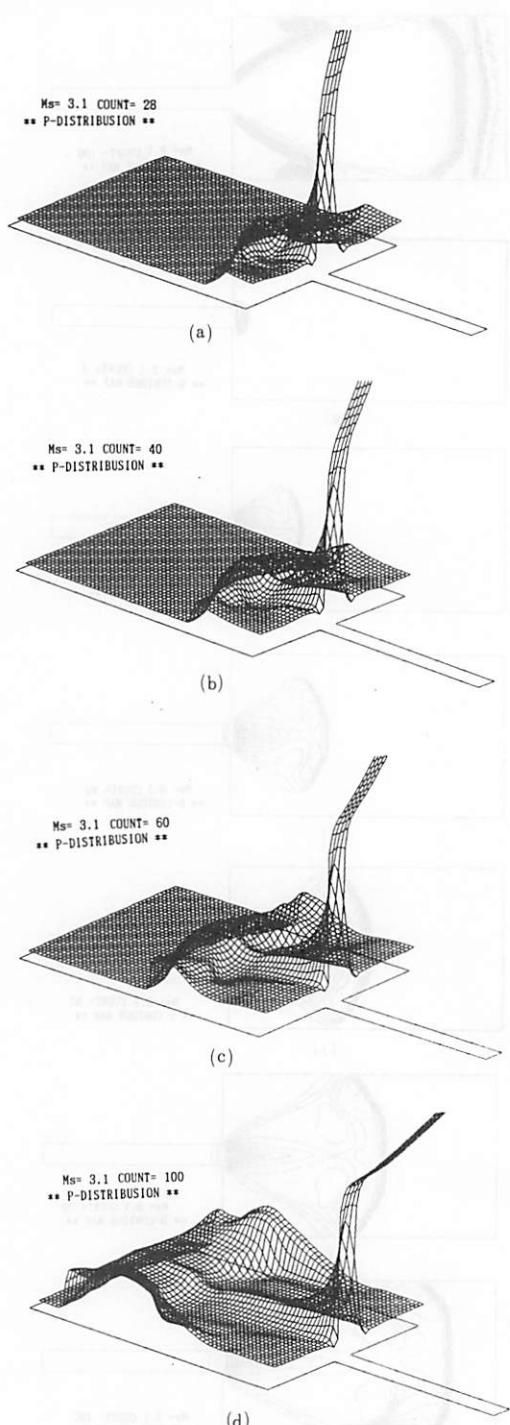
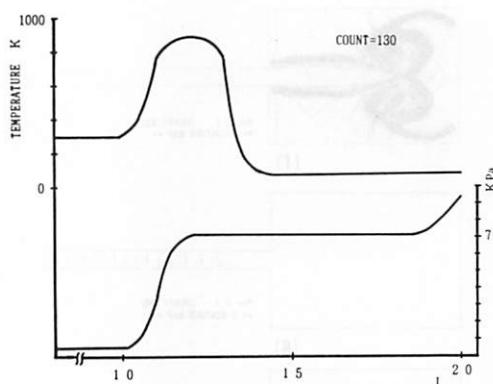
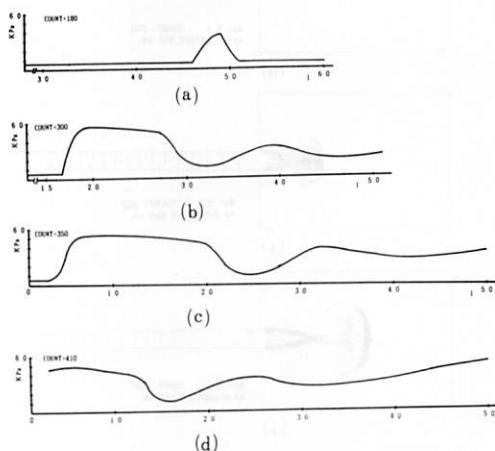
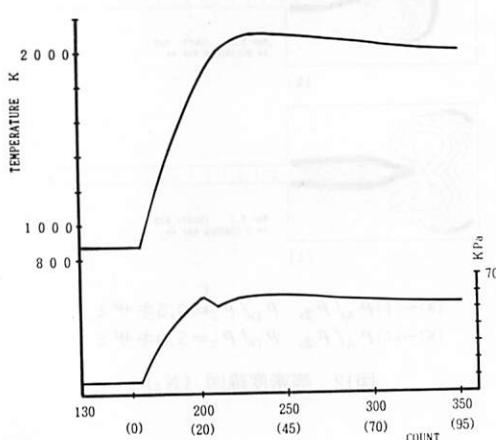
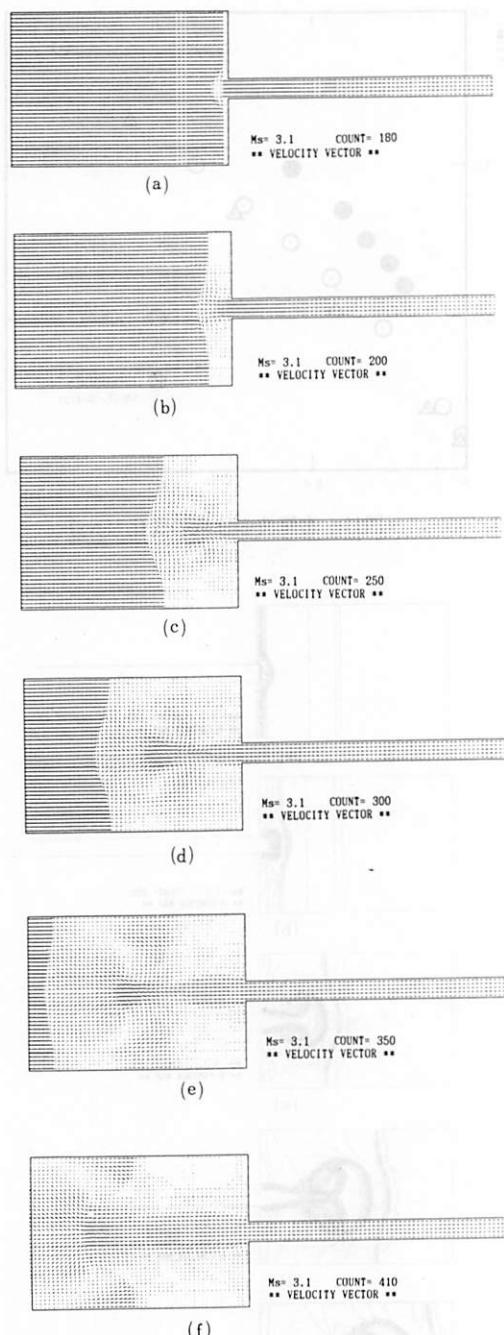
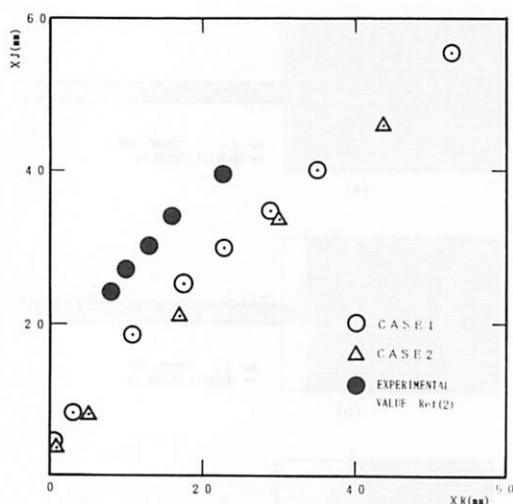
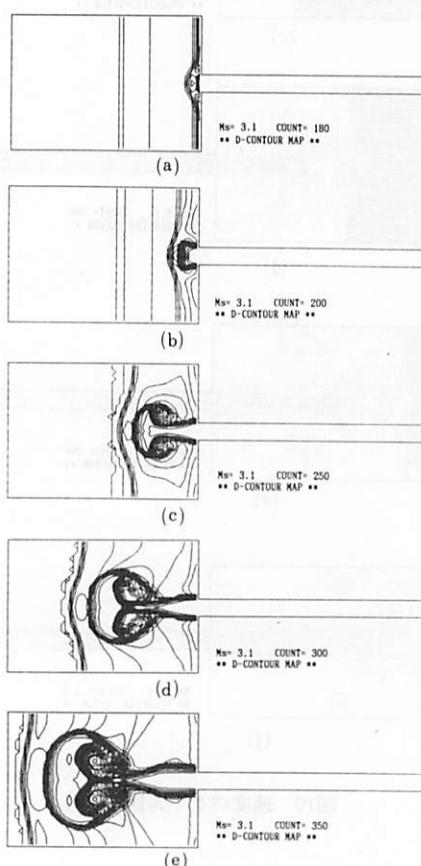
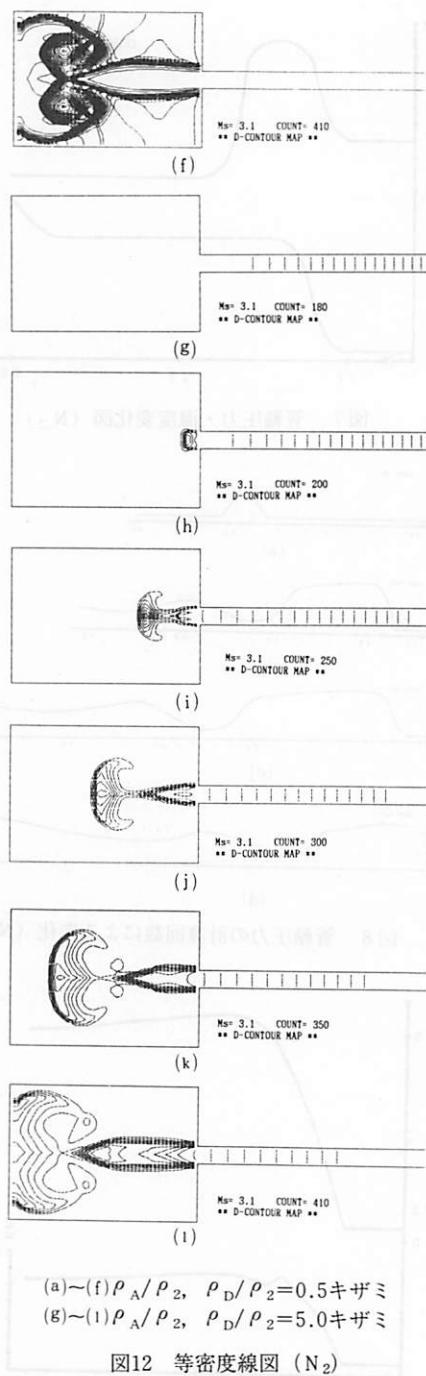


図6 圧力分布図 (N_2)

図7 管軸圧力・温度変化図 (N_2)図8 管軸圧力の計算回数による変化 (N_2)図9 最高温度・最高温度点圧力の計算回数による変化 (N_2)図10 速度ベクトル図 (N_2)

図11 衝撃波の位置の変化 (N_2)図12 等密度線図 (N_2)(a)~(f) $\rho_A / \rho_2 = 0.5$ (g)~(l) $\rho_A / \rho_2 = 5.0$ 図12 等密度線図 (N_2)

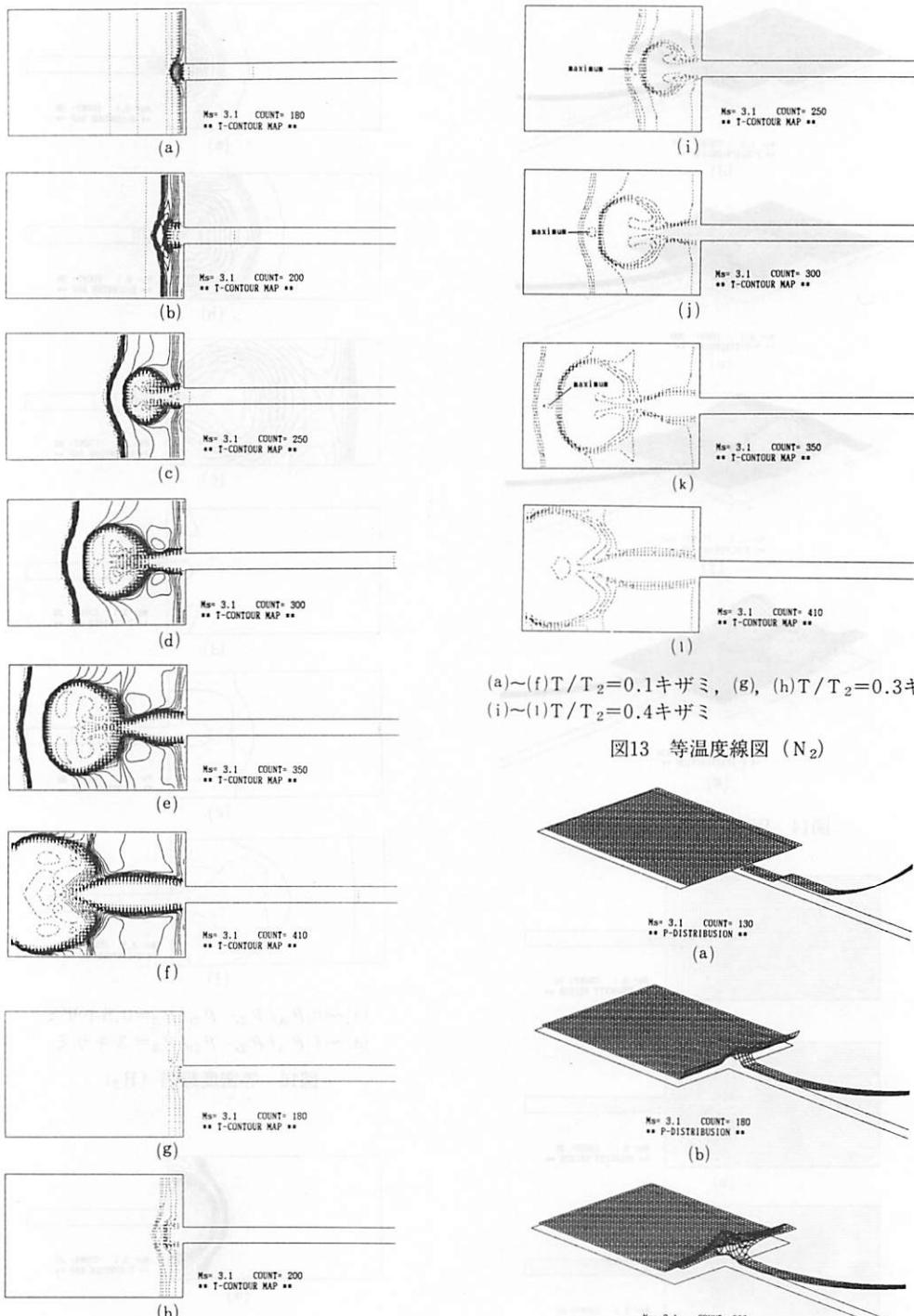
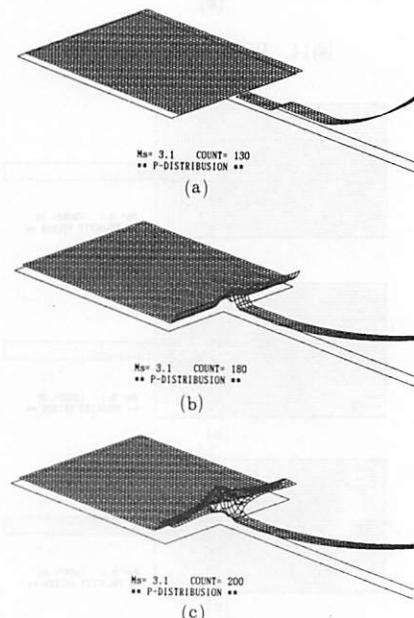
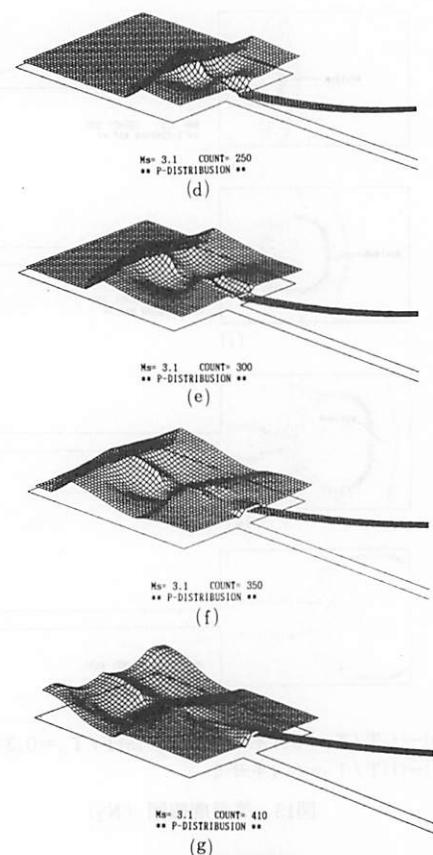
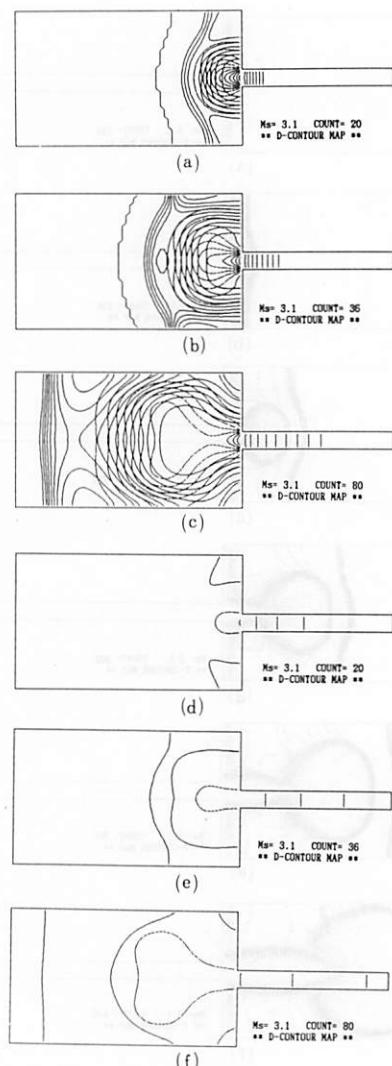
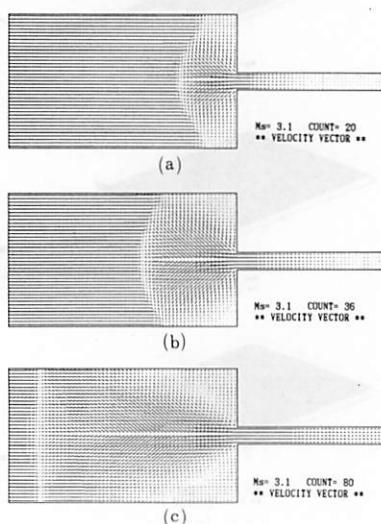
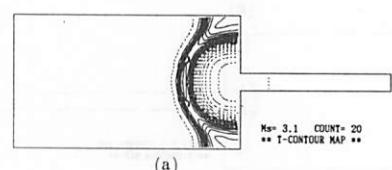
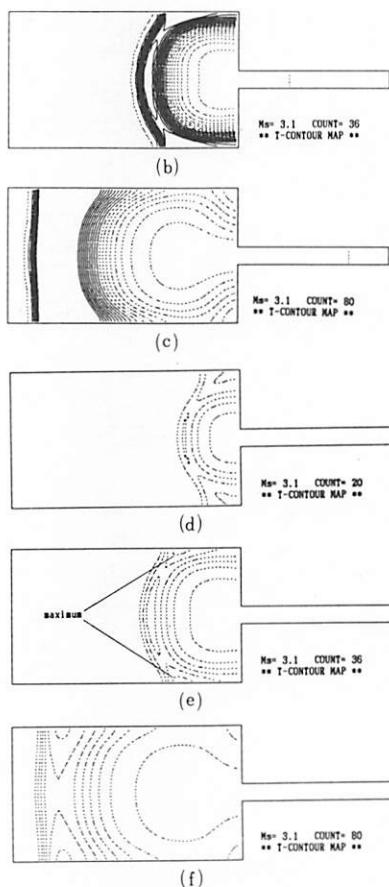
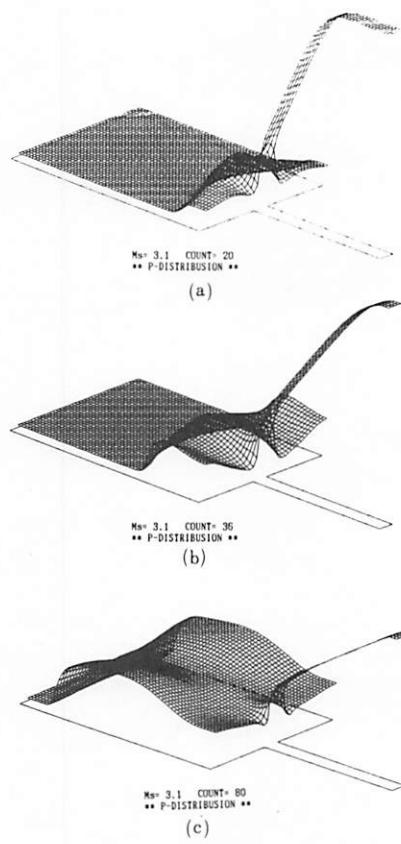


図13 等温度線図

図13 等温度線図 (N_2)図14 圧力分布図 (N_2)

図14 壓力分布図 (N_2)図15 速度ベクトル図 (H_2)(a)～(c) $\rho_A/\rho_2, \rho_D/\rho_2 = 0.5$ キザ
(d)～(f) $\rho_A/\rho_2, \rho_D/\rho_2 = 3$ キザ図16 等密度線図 (H_2)

開発途上機 1/10

(a)～(c) $T / T_2 = 0.1$ キザミ, (d)～(f) $T / T_2 = 0.4$ キザミ図17 等温度線図 (H_2)図18 圧力分布図 (H_2)