# 複合形非線形フィードバックをもつ ルーリエ形システムのロバスト安定性

宮城　雅夫*　　宮城　隼夫**

# Robust Stability of Luré–type Systems with Complex–type Nonlinear Feedbacks

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

The Robust stability of Luré-type system with a certain class of nonlinear feedbacks, which is defined here as Complex-type nonlinear feedbacks, is considered. The multivariable Popov criterion is used to guarantee the stability of the nominal system, and then the robustness of the perturbed system is investigated by using the Lyapunov function developed for the nominal system.

The proposed robust stability results are applied to an example system.

**Key Words**: Robust Stability, Complex–type Nonlinear Feedback System, Luré–type System

## 1．緒言

システムの安定性の解析にリアプノフ法を適用する場合，解析の糸口を与えるリアプノフ関数を見つけることが重要な課題となる。非線形フィードバックシステムに対するリアプノフ関数構成法としては，ポポフの条件から導かれる安定条件と等価な結果を与えるルーリエ形リアプノフ関数を導く手法が一般的であり，各方面で採用されている。一方，いくつかの工学の問題においては，フィードバック要素が状態変数の線形結合と非線形関数との積で表される積形非線形関数とルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数との和で与えられることがあり，この複合形非線形システムの安定性に関する研究がいくつか報告されている[1)2)]。本論文では，この複合形非線形フィードバックをもつシステムのロバスト安定性について考察する。ここでは積形非線形フィードバック項をルーリエ形非線形システムに生ずる非線形摂動と見なすことにより，複合形非線形システムをルーリエ形非線形システムに対する摂動システムと仮定し，安定性の解析を行なう。まずノミナルなシステムの安定性をAndersonの結果に基づき解析し，ルーリエ形リアプノフ関数の存在によりシステムの安定性を保証する。次に複合形非線形システムの安定性について，ノミナルなシステムに対して得られたリアプノフ関数を基盤とした解析を行ない，ロバスト安定条件の導出を行なう。さらに，得られた結果を例題システムに適用し，本手法の有効性も示す。

*機械工学科

**琉球大学工学部（〒903　沖縄県中頭郡西原町字千原1）

## 2．システムの設定

ノミナルなシステムは，次式により記述される自律系とする。

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - bf_{(u)} \\ u &= c^T x \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで，線形部分の伝達関数$W_{(s)}$は$W_{(\infty)}=0$を満足するものとする。さらに$f_{(u)}$は，次の条件を満足する非線形関数である。図1に(1)式のブロック線図を示す。

〈条件1〉

（Ⅰ）　$f_{(u)}$は連続で微分可能なスカラ関数である。

（Ⅱ）　$f_{(0)}=0$，かつ$u\neq 0$で$uf_{(u)}>0$

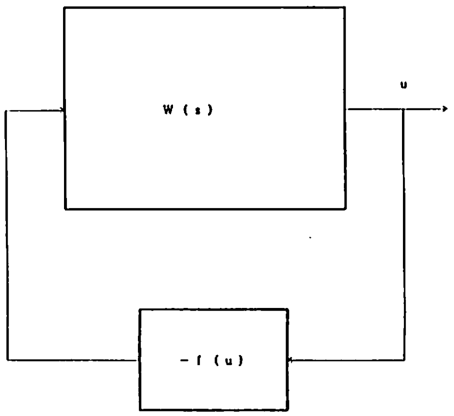


図1．　非線形システム

次に複合形非線形形フィードバックを持つシステムについて考える[1]。システムは次式によって表され，そのブロック線図を図2に示す。

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=Ax-bg_{(u)}v-bf_{(u)}\\ v&=d^Tx\\ u&=c^Tx\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ただし，$g_{(u)}$は連続で微分可能な非線形関数であり，$f_{(u)}$は条件(1)を満足するものとする。

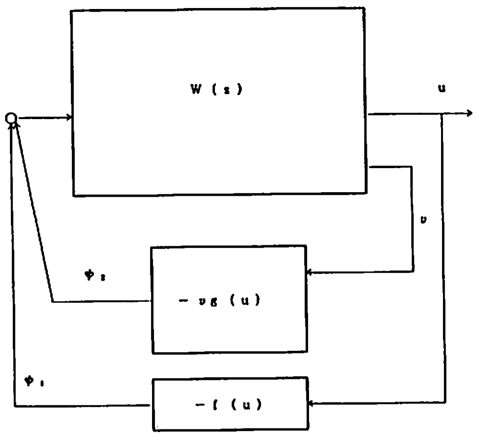


図2．　複合形非線形形システム

ここで，(2)式を次のように書き換える。

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{x}}&=[A-g_{(\bar{u})}bd^T]\bar{x}-bf_{(\bar{u})}\\ \bar{u}&=c^T\bar{x}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式のシステムは，(1)式のシステムに非線形摂動$g_{(u)}$が生じた場合のシステムを表している。ただし，(1)式および(2)式の平衡点は，それぞれ$x=0$，$\bar{x}=0$である。

## 3．ノミナルなシステムの安定性

一般にシステムのロバスト安定性を考える場合，まず，ノミナルなシステムの安定性を保証し，その保証の下で摂動システムが安定であるための条件を導く。ここでは，まずノミナルなシステムの安定性について考える。

(1)式で与えられるシステムの線形部分の伝達関数は次式で与えられる。

$$W_{(s)}=c^T(sI-A)^{-1}b\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

このとき，Andersonの結果[3]にしたがって，次の定理が導かれている[4][5]。

[定理1]

もし

$$Z_{(s)}=(n+qs)\,W_{(s)}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

で与えられる$Z_{(s)}$が正実となる定数nおよびqが存在するならば，次の行列方程式を満足する行列$P$，ベクトル$l$，スカラ$w_0$が存在する。

$$PA+A^TP=-l\,l^T\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$Pb=nc+qc+qA^Tc-lw_0\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$w_0^2=q(c^Tb+b^Tc)\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ただし，nは非負の定数であり，qは正の定数である。また，$P$は正定な対称行列であり，$S=-n/q$は$W_{(s)}$の極ではないものとする。■

$Z_{(s)}$は次の条件を満足するとき，正実である。

〈条件2〉

(Ⅰ)　$Z_{(s)}$の要素は$R_{e(s)}>0$に対して解析的である。

(Ⅱ)　$Z^*_{(s)}=Z_{(s^*)}$

(Ⅲ)　$Z_{(s)}+Z^T_{(s^*)}$は$R_{e(s)}>0$に対して半正定値となる。

ただし，*は共役を表す。

次に定理1に基づいてシステムの安定定理が得られるが，これは二次形式と非線形項の積分との和で与えられるルーリエ形リアプノフ関数の存在を基盤として導かれる。

[定理2]

もし，(5)式の伝達関数$Z_{(s)}$が正実であるならば，(1)

式のシステムの平衡点は$f_{(u)}$の条件1の下に安定である。 ■

(証　明)

定理2は次のルーリエ形リアプノフ関数の存在により証明される。

$$V_{(x)}=\frac{1}{2}x^TPx+q\int_0^u f_{(u)}du \quad \cdots\cdots(9)$$

(9)式の時間導関数をもとめ，さらに(6)~(8)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}_{(x)}=-\frac{1}{2}\left[x^Tl-w_0f_{(u)}\right]\left[l^Tx-wf_{(u)}\right]-nuf_{(u)} \quad \cdots\cdots(10)$$

となり，$\dot{V}$は半負定値となる。したがって，Vはリアプノフ関数となり，リアプノフの定理に従いシステムは安定である。

## 4．システムのロバスト安定性

ここではノミナルなシステムの安定性が保証されるときに，摂動システムが安定となるための条件について考える。すなわち，(9)式のルーリエ形リアプノフ関数が$g_{(\bar{u})}$のどのような条件のもとで(3)式のシステムのリアプノフ関数となり得るかについて考察する。そこで，次の定理を導く。

［定理3］

(5)式で与えられる$Z_{(s)}$が正実であるとする。このとき，もし，ある$g_{(\bar{u})}$に対して，次の行列方程式を満足する$L'_{(\bar{u})}$および$w_0'$が存在するならば，(3)式の平衡点は$f_{(\bar{u})}$の条件1の下に安定となる。

$$l\,l^T+g_{(\bar{u})}\left[db^TP+Pbd^T\right]=L'_{(\bar{u})}L'^T_{(\bar{u})} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$w_0\left[l-\frac{1}{2}dw_0g_{(\bar{u})}\right]=L'_{(\bar{u})}w_0' \quad \cdots\cdots(12)$$

$$w_0^2=w_0'^Tw_0' \quad \cdots\cdots(13)$$

ただし，$L'_{(\bar{u})}$，$w_0'$の間には，$L'_{(\bar{u})}$が行列であるとき$w_0'$はベクトルであり，$L'_{(\bar{u})}$がスカラになるという関係がある。 ■

(証　明)

定理3は，次式のルーリエ形リアプノフ関数の存在により証明される。

$$V_{(\bar{x})}=\frac{1}{2}\bar{x}^TP\bar{x}+q\int_0^{\bar{u}} f_{(\bar{u})}d\bar{u} \quad \cdots\cdots(14)$$

ここで，Pは(9)式のPと同一のものである。(14)式の時間導関数をもとめ，さらに(11)~(13)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}_{(\bar{x})}=-\frac{1}{2}\left[\bar{x}^TL'_{(\bar{u})}-w_0'f_{(\bar{u})}\right]\left[L'^T_{(\bar{u})}\bar{x}-w_0'^Tf_{(\bar{u})}\right]-n\bar{u}f_{(\bar{u})} \quad \cdots\cdots(15)$$

となり，$\dot{V}$は半負定値となる。したがって，リアプノフの定理に従い，摂動システムの平衡点における安定性が保証できる。

ここで，ロバスト安定条件としているのは，ある$g_{(\bar{u})}$に対して行列方程式(11)~(13)式を満足する$L'_{(\bar{u})}$，$w_0'$が存在することである。そこで，次節において，$L'_{(\bar{u})}, w_0$の存在条件を考察する。

## 5．行列方程式の解の存在条件

(11)~(13)式の連立方程式は，解$L'_{(\bar{u})}$，$w_0'$が存在するものと仮定した場合，次式で置き換えることができる。

$$E_{(\bar{u})}=Y_{(\bar{u})}Y^T_{(\bar{u})} \quad \cdots\cdots(16)$$

ここで，$E_{(\bar{u})}$，$Y_{(\bar{u})}$はそれぞれ

$$E_{(\bar{u})}=\begin{bmatrix} l \\ w_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l^T & w_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} g_{(\bar{u})}(db^TP+Pbd^T) & -\frac{1}{2}g_{(\bar{u})}w_0^2d \\ -\frac{1}{2}g_{(\bar{u})}w_0^2d & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots(17)$$

$$Y_{(\bar{u})}=\begin{bmatrix} L'_{(\bar{u})} \\ w_0'^T \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(18)$$

である。このとき，もし，ある対称行列$S$が非負定値行列であるならば，$S$はrank$(S)$=rank$(R)$を満足する行列$R$により$S=RR^T$と分解できることが知られている[7]。したがって，もし，$E_{(\bar{u})}$が非負定値行列であるならば，(16)式のように分解可能となり，行列方程式(11)~(13)式の解が存在する。

そこで，次の存在定理が導かれる。

［定理4］

もし，ある$g_{(\bar{u})}$に対し，次に示す条件3が満足されているならば，行列方程式の解$L'_{(\bar{u})}$，$w_0'$が存在する。

〈条件3〉

(Ⅰ)　$w=0$

(Ⅱ)　$S_{(\bar{u})}>0$，もしくは$S_{(\bar{u})}\geqq 0$

ここで

$$S_{(\bar{u})}=g_{(\bar{u})}(db^TP+Pbd^T)$$

■

(証　明)

非負定値行列と非負定値行列の和もまた非負定値行列になることから，定理4は証明できる。ここで，(17)式の右辺第一項は，その形式から非負定値行列である。さらに，右辺第二項は，条件3が満足されているならば非負定値行列となる。したがって，$\mathbf{E}_{(\bar{u})}$は，非負定値行列と非負定値行列の和の形で表されることから非負定値行列となる。実際，上述の条件3に従う場合$w_0'=0$となり，また$L'_{(\bar{u})}$は，$l\, l^T+S_{(\bar{u})}$を分解したものとなる。

## 6．例題システム

簡単な例として，ノミナルなシステムが

$$\ddot{x}+\nu\dot{x}+\mu x+f_{(x)}=0 \quad \cdots\cdots (19)$$

で表され，摂動システムが，次の1階の微分方程式によって記述されるシステム[8]について考える。

$$\ddot{\bar{x}}+\nu\dot{\bar{x}}+\mu\bar{x}+\dot{\bar{x}}\,g_{(\bar{x})}+f_{(\bar{x})}=0 \quad \cdots\cdots (20)$$

ここで，$g_{(\bar{x})}$が非線形摂動を表しているものとする。また，(20)式のシステムは，$\mu$，$\nu$が共に負である場合にHopf−bifurcationが起こるシステムであるが，ここでは$\mu$および$\nu$は正の定数とし，分岐は起こらないものとする。

(19)式を(1)式の形式に書き直すと

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\mu & -\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f_{(u)}\\ u&=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\cdots (21)$$

となる。また(20)式を(3)式の形式に書き直すと

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}&=\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\mu & -\nu\end{bmatrix}-g_{(\bar{u})}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right]^{*}\\ &\quad {}^{*}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f_{(u)}\\ \bar{u}&=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}\end{aligned} \quad \cdots\cdots (22)$$

となる。

(21)式に対する伝達関数$W_{(s)}$をもとめると$1/(S^2+\nu s+\mu)$となり，このとき，$Z_{(s)}$が正実となるための十分条件は，$q\nu-n\geq 0$となる。$Z_{(s)}$が正実であれば，(6)〜(8)式を満足する$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{l}$，$w_0$が存在し，これらは

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}q(\nu^2+\mu) & \nu q\\ \nu q & q\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (23)$$

$$\boldsymbol{l}=\begin{bmatrix}\sqrt{2q\nu\mu}\\ 0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (24)$$

$$w_0=0 \quad \cdots\cdots (25)$$

と求めることができる。ただし，ここでは計算の容易さから$n=q\nu$とした。

次に定理3の手法により，リアプノフ関数の構成を行なう。

まず，(11)〜(13)式から$L'_{(\bar{u})}$，$w_0'$を求める。このとき，(13)式，(25)式より$w_0^2=w_0'^T w_0'=0$となり，したがって，

$$w_0'=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (26)$$

となる。この結果より(12)式よりの関係は明らかに満足される。

次に(11)式，および(23)，(24)式より

$$L'_{(\bar{u})}L'^{T}_{(\bar{u})}=q\nu\begin{bmatrix}2\mu & g_{(\bar{u})}\\ g_{(\bar{u})} & \dfrac{2g_{(\bar{u})}}{\nu}\end{bmatrix}$$

が得られる。したがって，$L'_{(\bar{u})}$は

$$L'_{(\bar{u})}=\sqrt{q}\,\nu\begin{bmatrix}\sqrt{\dfrac{(4\mu/\nu-g_{(\bar{u})})}{2}} & \sqrt{\dfrac{g_{(\bar{u})}}{2}}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{2g_{(\bar{u})}}}{\nu}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (27)$$

となる。ただし，$q_{(\bar{u})}$は$0\leq g_{(\bar{u})}\leq 4\mu/\nu$を満足しているものとする。ここで，実際にリアプノフ関数を構成すると，

$$V_{(\bar{x})}=\frac{1}{2}q\left\{\mu\bar{x}_1^2+(\nu\bar{x}_1+\bar{x}_2)^2\right\}+q\int_0^{\bar{x}_1}f_{(\bar{x}_1)}\,d\bar{x}_1 \quad \cdots\cdots (28)$$

となる。

次に(28)式の時間導関数を求めると

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(\bar{x})}=&-\frac{1}{2}q\left\{\sqrt{\frac{\nu^2(4\mu/\nu-g_{(\bar{u})})}{2}}\,\bar{x}_1\right\}^2\\ &-\frac{1}{2}q\left\{\nu\sqrt{\frac{g_{(\bar{u})}}{2}}\,\bar{x}_1+\sqrt{2g_{(\bar{u})}}\,\bar{x}_2\right\}^2\\ &-q\nu\bar{x}_1 f_{(\bar{x}_1)}\end{aligned} \quad \cdots\cdots (29)$$

となる。以上のことにより，本手法を用いて(22)式のシステムに対するリアプノフ関数を構成することが可能となり，システムの原点近傍における安定性が保証できる。また，$g(\bar{u})$の条件として

$$0 \leqq g(\bar{u}) \leqq 4\mu/\nu$$

を与えたが，文献6におけるシステムでは$g(\bar{u})=\bar{x}_1^2$と与えられていることから，原点近傍において，上記の条件は十分満足されているものと考えられる。一方，このシステムに対して定理4を適用すると$g(\bar{u})$の条件は

$$g(\bar{u}) = 0$$

となり，厳しいものとなる。これは，定理4が定理3の解が存在するための十分条件しか与えないことによる。しかしながら，本例題のように容易に，定理3にあげた行列方程式を解くことができる場合はよいが，一般的には解を得ることは難しいものと考えられる。したがって，そのような場合には行列方程式の解を直接求めずに比較的容易に条件の導出が行なえる定理4が有効となる。

## 7．結言

フィードバック要素が一次元の複合形線形システムにおけるロバスト安定性について論じた。

本論文に述べた手法を用いることにより，ある条件のもとでは，複合形非線形システムの安定性を直接解析するかわりに，ルーリエ形非線形システムの安定性を解析することにより，複合形非線形システムの原点近傍の安定性が保証できることを示した。

## 参考文献


1）宮城・宮城，機講論，No.898−2(1989)，49

2）H. Miyagi, J. Vanualailai, K. Yamashita, 電気関係学会連合講演論集，No.845, 51　7

3）B. D. O. Anderson, J. Franklin Inst., Vol. 282, No.3 (1966), 155

4）N. Miyagi, H. Miyagi, ASME DS, 109−4 (1987), 410

5）H. Miyagi, K. Yamashita, IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC−31 No.10(1986), 970

6）宮城・山川・宮城，計自講論，No.122(1990)，49

7）児玉・須田・計自学会（1978）

8）Jhon L. Casti, Academic Press Inc. Austria(1985)