Andersonの定理を基盤とした積形非線形システムの安定性

宮城雅夫*　　宮城隼夫**

Stability Studies of Product-Type Nonlinear Systems Based on the Anderson Theorem

Norio Miyagi and Hayao Miyagi

In the stability studies of nonlinear feedback systems (Luré systems), it is common to utilize the Luré-type Lyapunov function. The most general approach for deriving Lyapunov functions is the method based on the Popov criterion developed by Anderson. In the case of product-type nonlinear feedbacks, however, the Luré-type Lyapunov function is awkward. Hence, the quadratic form of state variables has been employed as a Lyapunov function.

This paper gives the method of analizing the dynamical systems with the product-type nonlinear feedbacks, combining the Anderson theorem with the quadratic form, the extended quadratic form or the generalized Lyapunov function. Stability of the system is studied by developing some stability theorems based on the various Lyapunov functions.

Key Words: Product-Type Nonlinear System, Stability, Lyapunov Method

1. 緒　言

システムの安定性の解析にリアプノフ法を適用する場合，解析の糸口を与えるリアプノフ関数を見いだすことが重要な課題となる。非線形フィードバック制御システムに対しては，非線形フィードバック要素が所定の条件を満足するという仮定のもとにルーリエ形リアプノフ関数[1]を導くAndersonの手法が一般的であり，多くの有用な結果が得られている[2),3)]。

一方，いくつかの工学の問題では，フィードバック要素が積形の非線形関数の形で与えられることがある。この場合にはルーリエ形リアプノフ関数はうまく適合せず，状態変数の２次形式をリアプノフ関数として採用することが多い。

*機械工学科

**琉球大学工学部（〒903　沖縄県中頭郡西原町字千原1）

本報告では、非線形要素が非線形関数と状態変数の積の形で与えられる積形非線形フィードバックシステムの安定性について論じる。まず，伝達関数に関する定理およびAndersonの定理を基盤とする安定定理を導く。次に，これらの定理に２次形式ならびに２次形式を拡張したリアプノフ関数を導入してシステムの安定性について考察する。

2. 積形非線形フィードバックシステム

本報告で対象とするシステムは，次式で与えられる積形非線形フィードバックシステムである[4]。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - bvf_{(u)} \\ u &= c^T x \\ v &= d^T x \end{aligned} \qquad (1)$$

ここで，Aはn×nの行列，c，dはn次のベクトルであり，$f_{(u)}$は次の条件を満足するものとする。

Ⅰ．連続で微分可能な非線形関数である。

Ⅱ．$u \neq 0$に対して$f_{(u)}>0$であり，$uF_{(u)}>0$

となる。ただし，

$$F_{(u)}=\int_0^u f_{(u)}du \tag{2}$$

図1に積形非線形フィードバックシステムのブロック線図を示す。

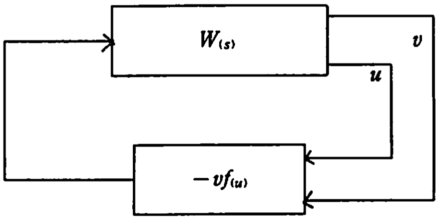

図1．ブロック線図

3．システムの安定性

(1)式で与えられるシステムにおいて v を出力とみなすと，$v-vf_{(u)}$ 間の伝達関数 $W_{d(s)}$ は次のようになる。

$$W_{d(s)}=\boldsymbol{d}^T(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3}$$

上記の伝達関数に関して，次の定理が与えられている[5]。

【定理1】

伝達関数 $W_{d(s)}$ が正実関数ならば

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{\ell}^T\\&\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}\end{aligned} \tag{4}$$

となる正定行列 $\boldsymbol{P}$ と適当なベクトル $\boldsymbol{\ell}$ が存在する。 ■

さらに，伝達関数 $Z_{(s)}$ に関して次の定理が与えられる。

【定理2】

任意定数 $n>0$，$q\geqq 0$ に対して

$$Z_{(s)}=(n+qs)W_{(s)} \tag{5}$$

が正実関数ならば

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{\ell}^T\\&\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}=n\boldsymbol{d}+q\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\ell}w_0\\&w_0^2=q(\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{d})\end{aligned} \tag{6}$$

となる正定行列 $\boldsymbol{P}$，適当なベクトル $\boldsymbol{\ell}$，スカラー w_0 が存在する。 ■

次に，前述の定理1，定理2を基盤に導出した安定定理を，それぞれ定理3，定理4に示す。

【定理3】

(1)式で表されるシステムの伝達関数

$$W_{d(s)}=\boldsymbol{d}^T(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

が正実関数ならシステムは安定である。 ■

この定理は，2次形式で与えられるリアプノフ関数

$$V=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{7}$$

の存在によって証明される。すなわち，(7)式の V の時間導関数を求めれば

$$\dot{V}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T[\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}vf_{(u)} \tag{8}$$

となり，(4)式の条件のもとに半負定値となる。したがって，リアプノフの定理に従い，システムは安定である。

【定理4】

$Z_{(s)}=(n+qs)W_{d(s)}$ が正実関数で，かつ

$$\begin{aligned}&n\boldsymbol{d}+\boldsymbol{A}^T(q\boldsymbol{d}-\alpha\boldsymbol{c})=k_1\boldsymbol{d}\\&\boldsymbol{b}^T(\alpha\boldsymbol{c}-q\boldsymbol{d})=k_2\\&\alpha\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{d}=-k_3\boldsymbol{c}\\&\alpha\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}=k_4\boldsymbol{c}\\&m\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{c}=k_5\boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{9}$$

となるような，$n>0$，$q\geqq 0$ さらに，$k_1\geqq 0$，$k_2\geqq 0$，$k_3\geqq 0$，$k_4\geqq 0$，$k_5\geqq 0$ と

$$m>\alpha^2\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{d} \tag{10}$$

となる m が存在するなら，システム(1)は安定である。 ■

この定理は2次形式を拡張した次のリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^T F_{(u)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \alpha\boldsymbol{d}\\ \alpha\boldsymbol{d}^T & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ F_{(u)}\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{d}F_{(u)}+\frac{1}{2}mF^2_{(u)}\end{aligned} \tag{11}$$

(11)式の V の時間導関数を求め，(6)式の関係を考慮すると

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{\ell}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\ell}w_0vf_{(u)}\\&-\frac{1}{2}w_0^2v^2f^2_{(u)}\\&-\boldsymbol{x}^T[n\boldsymbol{d}+q\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{d}-\alpha\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}]vf_{(u)}\\&-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{d}[(\alpha\boldsymbol{c}^T-q\boldsymbol{d}^T)\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}f^2_{(u)}\\&+\boldsymbol{x}^T[\alpha\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{d}]F_{(u)}\\&-\boldsymbol{x}^T[\alpha\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}]F_{(u)}f_{(u)}\\&-\boldsymbol{x}^T[m\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{c}]F_{(u)}f^2_{(u)}\end{aligned} \tag{12}$$

となり，(9)式のもとに

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\ell}-w_0vf_{(u)}\right]\left[\boldsymbol{\ell}^T\boldsymbol{x}-w_0vf_{(u)}\right]\\&-[k_1f_{(u)}+k_2f^2_{(u)}]v^2\\&-[k_3+k_4f_{(u)}+k_5f^2_{(u)}]uF_{(u)}\end{aligned} \tag{13}$$

となる。$f_{(u)}>0$, $uF_{(u)}>0$が原点近傍で満たされるので$\dot{V}$は半負定値となり，Vが正定値となる条件$m>\alpha^2\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{d}$のもとにVはリアプノフ関数となる。したがって，リアプノフの定理によりシステムは安定となる。

一方，システムによっては非線形関数$f_{(u)}$が原点近傍でしか条件を満たさない場合がある。この場合には，システムに漸近安定領域が存在し，この安定領域をも考慮に入れた定理を導く必要がある。本論文では(11)式のリアプノフ関数を拡張したリアプノフ関数に基づく定理を次の定理5に示す。

【定理5】

$Z_{(s)}=(n+qs)W_{(s)}$が正実関数で，かつ

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{c}=0\\
&n\boldsymbol{d}+\boldsymbol{A}^T\{q\boldsymbol{d}-(\alpha p_0 k_6)\boldsymbol{c}\}=k_1\boldsymbol{d}\\
&q\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{d}=-k_2\\
&\alpha\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{d}=-k_3\boldsymbol{c}\\
&\alpha\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}=k_4\boldsymbol{c}\\
&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}=k_6\boldsymbol{d}
\end{aligned}\tag{14}$$

となるような，$n>0$, $q\geqq 0$さらに，$k_1\geqq 0$, $k_2\geqq 0$, $k_3-q_0\geqq 0$, $k_4\geqq 0$, $k_6\geqq 0$, と

$$m>\alpha^2\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{d}$$

となるmが存在するなら，システム(1)は安定である。

■

この定理は，次式で与えられる拡張リアプノフ関数の存在によって証明される。

$$\begin{aligned}
V&=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{x}^T F_{(u)}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \alpha\boldsymbol{d}\\ \alpha\boldsymbol{d}^T & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ F_{(u)}\end{bmatrix}\\
&\quad+2\sqrt{p_0 q_0}\int_u^u\sqrt{uf_{(u)}F_{(u)}}\,du\\
&=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{d}F_{(u)}+\frac{1}{2}mF^2_{(u)}\\
&\quad+2\sqrt{p_0 q_0}\int_u^u\sqrt{uf_{(u)}F_{(u)}}\,du
\end{aligned}\tag{15}$$

上式のVの時間導関数を求め，(6)式の関係を代入し，$\boldsymbol{r}=\alpha\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}=k_6\boldsymbol{d}$と置き換え，さらに(14)式の関係を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{V}&=-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\ell}-w_0 vf_{(u)}\right]\left[\boldsymbol{\ell}^T\boldsymbol{x}-w_0 vf_{(u)}\right]\\
&\quad-k_1v^2f_{(u)}-k_2v^2f^2_{(u)}-(k_3-q_0)uF_{(u)}\\
&\quad-k_4uF_{(u)}f_{(u)}-k_5uF_{(u)}f^2_{(u)}+k_7v^2f^3_{(u)}\\
&\quad-(\sqrt{p_0}\,\dot{u}\sqrt{f_{(u)}}-\sqrt{q_0}\sqrt{uF_{(u)}})^2
\end{aligned}\tag{16}$$

(16)式において$f_{(u)}>0$, $uF_{(u)}>0$が原点近傍で満たされるので$\dot{V}$は半負定値となり，さらにVが正定値となる条件$m>\alpha^2\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{d}$を満たすmが存在するならばVはリアプノフ関数となり，リアプノフの定理に従い，システム(1)は安定である。

4．例題システムへの適用

ここでは，定理3，定理4，定理5を例題システムに適用してシステムの安定性を解析し，各定理より得られるリアプノフ関数を用いて漸近安定領域を求める。

例題として次のシステムを考える。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}vf_{(u)}\\
u&=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\
v&=[0\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{17}$$

ただし，$f_{(u)}=\cos u$

まず，定理3を適用する。システムの伝達関数$W_{d(s)}$を求めると

$$W_{d(s)}=\frac{s}{s^2+1}\tag{18}$$

となり，$W_{d(s)}$は正実関数となるので，定理3よりシステムは安定である。また，(4)式より$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{\ell}$を求めると次のようになる。

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\ell}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

得られた$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{\ell}$を(7), (8)式に代入するとリアプノフ関数V，時間導関数$\dot{V}$は次のようになる。

$$V=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2\tag{19}$$

$$\dot{V}=-x_2^2\cos x_1\tag{20}$$

次に定理4を適用する。$Z_{(s)}$の実部は

$$\mathrm{Re}Z_{(j\omega)}=\frac{q\omega^2(\omega^2-1)}{(1-\omega^2)^2}\tag{21}$$

であるから，$Z_{(s)}$が常に正実関数となるのは$q=0$のときのみである。このとき，定理2の(6)式より正定行列$\boldsymbol{P}$，ベクトル$\boldsymbol{\ell}$，スカラーw_0は次のように求まる。

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\ell}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\qquad w_0=0$$

また，$q=0$ を考慮し，定理4の(9)式より各定数を求めると次のようになる。

$k_1=n-\alpha,\quad k_2=0,\quad k_3=\alpha,\quad k_4=0$

$k_5=0,\quad m=\alpha,\quad n>\alpha$

これらを(11)，(13)式に代入するとリアプノフ関数 V および時間導関数 $\dot{V}$ は次のように求まる。

$$V=\frac{1}{2}\left[nx_1^2+nx_2^2+2\alpha x_2\sin x_1+\alpha\sin^2 x_1\right] \tag{22}$$

$$\dot{V}=-(n-\alpha)x_2^2\cos x_1-\alpha x_1\sin x_1 \tag{23}$$

次に定理5を適用する。(21)式より $q=0$ のときのみ $Z_{(s)}$ は常に正実関数であり，

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{c}=[0\quad 1]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=0$$

である。また，定理5の(14)式より各定数を求めると次のようになる。

$k_1=n-\alpha-p_0k_6,\quad k_2=0,\quad k_3=\alpha$

$k_4=0,\quad m=\alpha,\ k_6=1,\quad n>\alpha$

ここで，$p_0=n-\alpha$，$q_0=\alpha$ となる p_0，q_0 を選べば，各定数は次のように求まる。

$k_1=k_2=k_4=k_5=k_7=0$

$k_3=m=q_0=\alpha$

$k_6=1,\quad p_0=n-\alpha$

また，正定行列 $\boldsymbol{P}$，ベクトル $\boldsymbol{\ell}$，スカラー w_0 は定理4のときと同じ結果になる。これらを(15)，(16)式に代入すると，リアプノフ関数 V，時間導関数 $\dot{V}$ は次のように求まる。

$$V=\frac{1}{2}\left(nx_1^2+nx_2^2\right)+\alpha x_2\sin x_1+\frac{1}{2}\alpha\sin^2 x_1$$

$$+2\int_0^{x1}\sqrt{\alpha(n-\alpha)x_1\cos x_1\sin x_1}\,dx_1 \tag{24}$$

$$\dot{V}=-\left(\sqrt{(n-\alpha)\cos x_1}\,x_2-\sqrt{\alpha x_1\sin x_1}\right)^2 \tag{25}$$

(24)式において，$n>\alpha$ を満たすような α を選べば V は正定値となる。(25)式の $\dot{V}$ は半負定値であるので，リアプノフの定理に従いシステムは安定である。

例題システムの3つのリアプノフ関数より得られる漸近安定領域を図2，図3，図4に示す。ただし，$n=1$ とする。

(22)式，ならびに(24)式において $\alpha=0$ に設定すれば(19)式に帰着するので(22)式，(24)式の V は(19)式の V を一般化したものとみなせる。また，α の値を $0\leq\alpha\leq1$ の範囲で変化させることにより種々のリアプノフ関数が得られ，これらによって異なるいくつかの漸近安定領域を得ることができる。

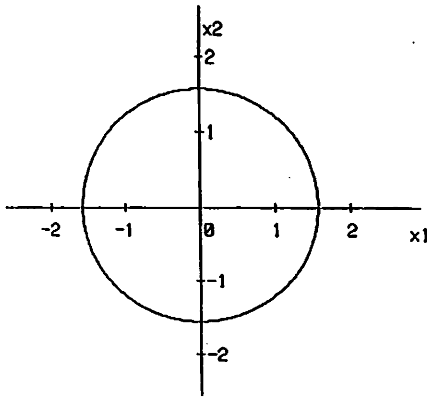

図2．漸近安定領域（定理3）

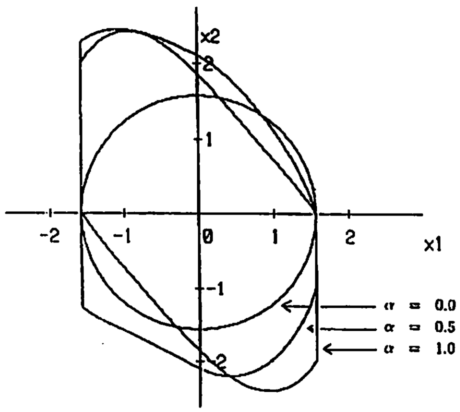

図3．漸近安定領域（定理4）

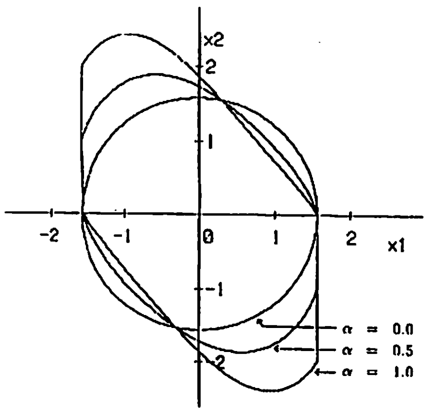

図4．漸近安定領域（定理5）

5．結　言

伝達関数に関する定理および Anderson の定理を基盤とする安定定理を導き，これらの定理に 2 次形式，ならびに 2 次形式を拡張したリアプノフ関数を導入して，システム解析のための定理をつくり，積形非線形フィードバックシステムの安定性解析を行った。

通常，システムの漸近安定領域を評価する際には，いくつかのリアプノフ関数から得られる漸近安定領域を合成して，より真に近い領域を求める。したがって種々のリアプノフ関数を導出できる(11)式，(15)式の形式のリアプノフ関数はシステムの漸近安定領域の評価に有効である。

参考文献

1）B. D. O. Anderson : J. of the Franklin Institute, 282-3, 155/460 (1966)

2）H. Miyagi and N. Miyagi : Proc. of IECON' 86 Milwaukee, 273/277 (1986)

3）N. Miyagi and H. Miyagi : ASME J. of Dynamic Systems Measurement and Control, 109, 410/413 (1987)

4）宮城・宮城：計自論 Vol. 25 No. 2, 252/254 (1989)

5）高橋進一，有本　卓：回路網とシステム理論，コロナ社