ロバスト摂動法による非線形フィードバックシステムのパターン類別

宮城 雅夫*・宮城 隼夫**

Pattern Classification of Nonlinear Feedback Systems Using the Robust Perturbation Method

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

Stability of nonlinear feedback systems considerably depends on their nonlinearities. In the analysis of Luré-type nonlinear systems, it is often assumed that the nonlinearities lie on the first and third quadrants. Thus, it is important for system designers to find out such constraints for nonlinearities.

This paper gives a pattern classification method for systems with arbitrary nonlinear feedbacks. Classification is made by using the robust perturbation technique. In the technique, nonlinnearities are regarded as the nonlinear perturbation of linear stable system. Stability theorems for the pattern classification are derived, utilizing the positive realness of the transfer function and the quadratic-type Lyapunov function.

Key words; Pattern Classification, Nonlinear Feedback System, Robust Stability, Lyapunov Method

1. 緒 言

非線形素子をもつ電子回路，バネの結合による機械システム，さらに電力システムからロボットや人工衛星の運動に至るまで，現実の多くのシステムは非線形システムである。これらのシステムをコンピュータで監視・制御する際に，最も基本的事項でありながら常に問題となるのは安定性の確保である。リアプノフの安定論はこれらの非線形システムの安定性の評価に有望と言われ続けながら，未だに現実システムへの適用がほとんどなされていないのが実情である。これは，リアプノフの理論が安定判別のための十分条件しか与えないという理論的不備もさることながら，リアプノフ関数を構成する一般的手法が任意の非線形システムに対して確立されていないことに起因する。

筆者らはこれまで，このリアプノフ法の実用化をめざし，各種特定の非線形システムのリアプノフ関数を構成し報告してきた[1)~3)]が，非線形の取り扱いに多大な労力を費やしてきた経緯がある。一連の研究を通して判明したことは，安定な工学システムに現れる非線形性にはある種のパターンが存在することである。さらに，このパターンは未知の非線形摂動をもつシステムのロバスト安定条件として導出されることもわかっている。

本研究では，このロバスト摂動法によって任意の非線形制御システムのパターン類別を行ない，類別された非線形関数の性質を利用してシステムのリアプノフ関数構成を容易にすることを目的とする。まず，工学的によく知られた一般ルーリエ形非線形システムや積形非線形システムの独特な非線形を簡単な線形システムの非線形摂動としてとらえ，線形システムのロバスト安定条件から非線形関数のパターン類別を行なう。同様な手法により，工学分野で頻出するシステムの非線形性を安定性を保持するためのパターンに分類していく。なお，ロバスト安定条件の導出にはリアプノフ法を用いるが，非線形フィードバックのないシステムが線形システムになることから，状態変数の2次形式で与えられるリアプノフ関数を基盤に解析をすすめて

*機械工学科
**琉球大学工学部（〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原1）

いく。

2. 問題の設定

非線形フィードバック要素に一般性をもたせるために，次式で表されるシステムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - b\varphi \\ u &= c^T x \\ v &= d^T x \\ \varphi &= \xi(u, v) \end{aligned} \qquad (1)$$

(1)式で示されるシステムのブロック線図は図1で与えられる。

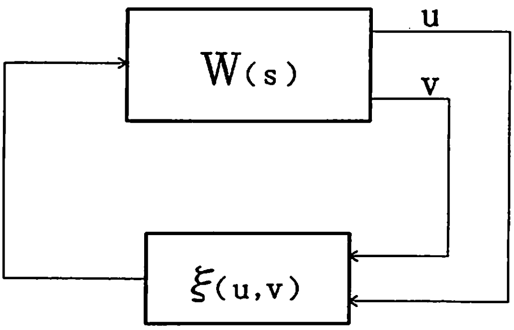

図1. 非線形フィードバックシステム)

非線形フィードバック φ を線形システムの摂動分とみなすため，(1)式を次の2つの式に変形する。

$$\dot{x} = \tilde{A}_1 x \qquad (2)$$

$$\dot{x} = \tilde{A}_2 x \qquad (3)$$

ただし，$\tilde{A}_1 = A - bc^T(\varphi/u)$，$\tilde{A}_2 = A - bd^T(\varphi/v)$ であり，φ/u，φ/v 項が非線形摂動項となる。

(2)式は u を出力とみなす場合であり，このときの $\varphi - u$ 間の伝達関数 $W_{1(s)}$ は

$$W_{1(s)} = c^T(sI - A)^{-1}b \qquad (4)$$

として与えられる。一方(3)式は v を出力とみなす場合であり，この場合 $\varphi - v$ 間の伝達関数 $W_{2(s)}$ は

$$W_{2(s)} = d^T(sI - A)^{-1}b \qquad (5)$$

となる。本論文では，$W_{1(s)}$，$W_{2(s)}$ はそれぞれ

$$W_{1(\infty)} = 0,\ W_{2(\infty)} = 0 \qquad (6)$$

を満足し，(1)式は $W_{1(s)}$，$W_{2(s)}$ の最小実現であるものとする。

本研究の目的はシステムが安定になるための $\varphi = \xi(u, v)$ の条件を見出し，非線形システムをパターン類別することである。ここでは次の6つのタイプの非線形関数を考え，システムが安定性を保つための条件を導出する。

1) $\xi(u, v) = f_{(u)}$ (7)

2) $\xi(u, v) = vg_{(u)}$ (8)

3) $\xi(u, v) = f_{(u)} + vg_{(u)}$ (9)

4) $\xi(u, v) = u^2$ (10)

5) $\xi(u, v) = uv$ (11)

6) $\xi(u, v) = h_{(v)}f_{(u)}$ (12)

3. 非線形フィードバックシステムの安定性

(1)式で与えられるシステムの安定性をリアプノフ法によって解析する場合，非線形関数 $\xi(u, v)$ の性質がある安定パターン内にあればリアプノフ関数を構成することができる。ところが，この非線形関数をあらかじめパターン類別してなければこの関数を考慮に入れたリアプノフ関数の構成は困難である。本章では，フィードバックのないシステムが線形システムになることに着目し，2次形式で与えられるリアプノフ関数を基盤にロバスト摂動法を用いてシステムが安定パターンをもつための $\xi(u, v)$ の制約条件を導出する。

まず，文献4より次の定理が得られる。

【定理1】

もし $W_{1(s)}$ が正実関数なら

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -\ell\ell^T \\ Pb &= c \end{aligned} \qquad (13)$$

を満足する実対称正定行列 P，ベクトル ℓ が存在する。■

【定理2】

もし $W_{2(s)}$ が正実関数なら

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -\ell\ell^T \\ Pb &= d \end{aligned} \qquad (14)$$

となる実対称正定行列 P とベクトル ℓ が存在する。■

ただし，関数 $W_{(s)}$ が正実関数であるとは

(i) $W_{(s)}$ が実関数（s が実数のとき $W_{(s)}$ は実数となる関数）

(ii) $W_{(s)}$ が正関数（Re s＞0 のとき正則で $\mathrm{Re}W_{(s)} > 0$ となる関数）

をさす。

そこで，各種非線形関数(7)～(12)をもつシステムに対して安定定理を導いていく。

3・1　$\xi(u, v) = f_{(u)}$ で与えられるシステム

このシステムに対しては次の安定定理を導くことができる。

【定理3】

もし，$W_{(s)}$ が正実関数であり，$uf_{(u)} > 0$ となる $f_{(u)}$

が存在すれば(1)式のシステムは安定である。 ■

〈証　明〉

定理３は次の２次形式で与えられるリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$V_{(x)} = \frac{1}{2} x^T P x \tag{15}$$

(15)式の $V_{(x)}$ の時間導関数を求め，さらに(13)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2} x^T \ell\ell^T x - uf_{(u)} \tag{16}$$

よって，$\dot{V}_{(x)}$ は $uf_{(u)} > 0$ の条件下で半負定値となり，$V_{(x)}$ は正定値なのでリアプノフの安定定理に従いシステムは安定となる。

なお，$\xi(u, v) = f_{(u)}$ の場合には $W_{2(s)}$ の正実性はうまく適合せず，$W_{2(s)}$ を用いて安定定理を導くことは困難である。

3・2　$\xi(u, v) = vg_{(u)}$ で与えられるシステム

この積形の非線形関数に対しては $W_{2(s)}$ の正実性がうまく適合し，$W_{2(s)}$ を用いた安定定理を導くことができる。

【定理４】

もし，$W_{2(s)}$ が正実関数で $g_{(u)} > 0$ となる $g_{(u)}$ が存在すれば(1)式のシステムは安定である。 ■

〈証　明〉

(15)式で与えられるような２次形式を考えるとその時間導関数 $\dot{V}_{(x)}$ は

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2} x^T \ell\ell^T x - v^2 g_{(u)} \tag{17}$$

となり，$V > 0$，$\dot{V} \leq 0$ の条件を満足するので，リアプノフ定理に伴い，(1)式は安定となる。

$\xi(u, v) = vg_{(u)}$ の場合には，３・１節とは逆に $W_{1(s)}$ の正実性はうまく安定定理と結合しない。

3・3　$\xi(u, v) = f_{(u)} + g_{(u)}$ で与えられるシステム

このシステムに対しては次の安定定理を導くことができる。

【定理５】

もし，$W_{1(s)}$ が正実関数で $\ell\ell^T + 2g_{(u)}cd^T > 0$ となる $g_{(u)}$ と $uf_{(u)} > 0$ となる $f_{(u)}$ が存在するなら(1)式のシステムは安定である。 ■

〈証　明〉

定理５は(15)式で与えられるリアプノフ関数の存在によって証明される。(15)式の時間導関数を求め，(13)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2} x^T (\ell\ell^T + 2g_{(u)}cd^T) x - uf_{(u)} \tag{18}$$

となり，$\dot{V}_{(x)}$ は半負定値となる。したがって $V_{(x)}$ はリアプノフ関数となり，リアプノフの定理に従ってシステムは安定である。

3・4　$\xi(u, v) = u^2$ で与えられるシステム

このシステムに対して次の２つの安定定理を導くことができる。

【定理６】

もし，$W_{1(s)}$ が正実関数で $\ell\ell^T + 2cc^T u > 0$ を満足する u の領域が存在すれば(1)式のシステムは安定である。 ■

【定理７】

もし，$W_{2(s)}$ が正実関数で $\ell\ell^T + 2cc^T v > 0$ 満足する v の領域が存在すれば(1)式のシステムは安定である。 ■

〈証　明〉

定理６、定理７は(15)式の２次形式で与えられるリアプノフ関数の存在によって証明される。その時間導関数は定理６に対して

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2} x^T (\ell\ell^T + 2cc^T u) x \tag{19}$$

定理７に対しては

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2} x^T (\ell\ell^T + 2cc^T v) x \tag{20}$$

となり，$\dot{V}_{(x)}$ は半負定値となる。したがって，定理６か定理７のどちらかが成り立てば(1)式のシステムは安定である。

3・5　$\xi(u, v) = uv$ で与えられるシステム

このシステムに対して次の２つの安定定理を導くことができる。

【定理８】

もし，$W_{1(s)}$ が正実関数で $\ell\ell^T + 2dd^T u > 0$ を満足する u の領域が存在すれば(1)式のシステムは安定である。 ■

【定理９】

もし，$W_{2(s)}$ が正実関数で $\ell\ell^T + 2dd^T v > 0$ を満足ず v の領域が存在すれば(1)式のシステムは安定である。

〈証　明〉

定理８，定理９は(15)式で与えられるリアプノフ関数の存在によって証明される。その時間導関数は，定理８に対して

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2}x^T(\ell\ell^T + 2dd^Tu)x \tag{21}$$

定理9に対しては

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2}x^T(\ell\ell^T + 2dd^Tv)x \tag{22}$$

となり，$\dot{V}_{(x)}$ は半負定値となる。したがって，(1)式のシステムは定理8か定理9のどちらかが成り立てば安定である。

3・6 $\xi(u, v) = h_{(v)} f_{(u)}$ で与えられるシステム

このシステムに対しては次の安定定理を導くことができる。

【定理10】

もし，$W_{1(s)}$ が正実関数で $h_{(v)} > 0$ かつ $uf_{(u)} > 0$ となる $f_{(u)}$ が存在するならば(1)式のシステムは安定である。 ■

〈証明〉

定理10は，(15)式の2次形式で与えられるリアプノフ関数の存在によって証明される。その $V_{(x)}$ の時間導関数を求め，さらに(14)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}_{(x)} = -\frac{1}{2}x^T\ell\ell^Tx - h_{(v)}uf_{(u)} \tag{23}$$

となり，$\dot{V}_{(x)}$ は定理10のもとに半負定値となる。したがって，リアプノフの定理に従いシステム(1)は安定である。

4．例題システムへの適用

ここでは，前章で導いた定理3～10による非線形関数のパターン類別を例題システムに適用し，定理の有効性を示す。

4・1 リエナール形非線形システム

次のリエナール形非線形システムを考える。

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x + f(x + \dot{x}) = 0 \tag{24}$$

上式は，(1)式の形式に書き換えると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varphi$$
$$u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \tag{25}$$
$$\varphi = f(x_1 + x_2)$$

となる。このとき，$W_{1(s)} = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ は正実関数となることが容易に確かめられるので，定理3を適用すればシステムは $uf_{(u)} > 0$ すなわち $f_{(u)}$ が第1，3象限内にあればシステムは安定となる。

ちなみに，システムのリアプノフ関数を

$$V = \frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x \tag{26}$$

とおけば，

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x - uf_{(u)} \leq 0 \tag{27}$$

となり，定理3が正しいことが示される。

4・2 積形非線形システム

積形非線形システム

$$\ddot{x} + \dot{x} + x + \dot{x}g_{(x)} = 0 \tag{28}$$

を考える。上式を(1)式の形式に書き改めると次式のようになる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varphi$$
$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{29}$$
$$v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$
$$\varphi = x_2 g_{(x_1)}$$

このとき，$W_{2(s)} = \mathbf{d}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ は正実関数であることがわかるので，この場合，定理4を適用することによりシステムは $g_{(u)} > 0$ のパターンで安定となる。

なお，本例題では，リアプノフ関数を

$$V = \frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \tag{30}$$

とおけば，

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x - v^2g_{(u)} \leq 0 \tag{31}$$

となるので明らかにシステムは安定であり，定理4が正しいことがわかる。

5．結言

本論では，工学上頻出する非線形システムを安定性の確保の立場からパターン類別し，システムが安定になるための非線形関数の条件を導出した。導出に際してはロバスト摂動法を用い，非線形関数が安定な線形システムの非線形摂動とみなして解析を行った。したがって安定性解析のためのリアプノフ関数としては線形システムのリアプノフ関数である2次形式を用いる。非線形関数の制約条件は定理の形で与えたが，この制

約条件さえわかれば任意の非線形関数をもつシステムのリアプノフ関数構成が可能となり，非線形システムの安定性の解析が容易になる。従来は，この非線形関数の条件が既に与えられたシステムのリアプノフ関数構成を目ざしてきたが，このような条件が安定パターン内にあれば、非線形項を考慮にいれたリアプノフ関数の構成がやりやすくなる。本論文の特長は各種の非線形関数を安定パターンに類別し，非線形システムの安定性の解析を容易にしてところにある。

参考文献

1) 宮城・宮城；機論（C編）56巻 529号(1990)
2) Miyagi, N. and Miyagi, H.; ASME DS, 113-3 (1991)
3) 宮城・宮城；機論（C編）58巻 548号(1973)
4) 高橋進一，有本卓；回路網とシステム理論，コロナ社(1980)，199/228