

周波数領域における多変数モデル・フォロイング制御系の一構成法

出川 喬庸*

A Frequency Domain Synthesis of Multivariable Model Following Control System

Tadayasu DEGAWA

This paper describes a procedure of designing a model following control system for multivariable systems in the frequency domain. The procedure is a direct extension of a result obtained for scalar systems.

Like for scalar systems, an algorithm is developed so that transfer matrix between reference inputs and plant outputs coincide with model transfer matrix. Also, this algorithm is easily programmable in a digital computer since only numerical computation using coefficient matrices are required.

The procedure is illustrated with simplified numerical example.

Keywords: model following, multivariable control system, control system synthesis

1 まえがき

モデル・フォロイング制御系の設計はプラントの出力が規範モデルの出力を忠実に追従するように制御則を決定することから成り、航空機に望ましい運動をさせるような制御を行うためには有望な手法である。

本研究では既に報告した周波数領域における多入力単出力線形時間固定係数系のモデル・フォロイング制御系の設計法を多入力多出力系に拡張し、多入力単出力系に対するものと同様、規範入力とプラントの出力間の伝達マトリクスを規範モデルの伝達マトリクスに一致させる制御系の構成を求めるアルゴリズムを開発している。この方法では、伝達マトリクスの係数から構成される定数マトリクス間の計算だけで制御系の構成が求められる。

モデル・フォロイング制御系を設計するためには望ましい動特性を与える規範モデルの伝達マトリクスとプラントの伝達マトリクスが与えられ、入力と出力のみが測定できればよく、状態量の測定は不要である。入出力内部の伝達マトリクスもすべて安定になるよう

に設計され、伝達マトリクスが一致しているので、プラントと規範モデル間の出力の初期誤差は零に漸近する。

最後に、その有効性を数値例によって検討している。

2 問題の記述

制御されるプラントは p 入力 q 出力 n 次線形固定係数系であり、つぎの微分方程式で記述される。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (1-1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$, $y(t) \in R^q$

A , B , C はそれぞれ $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ の定数マトリクス、系は完全可制御・可観測、 $p \geq q$ 、状態 $x(t)$ は未知であり、入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ のみが測定可能とする。(1-1) 式からプラントの伝達マトリクスは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}W_p(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{Z_m s^m + Z_{m-1} s^{m-1} + \dots + Z_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_0} \\ &= \frac{Z(s)}{\alpha(s)}\end{aligned}\quad (1-2)$$

ここで、

*航空工学科

$$\begin{aligned} Z(s) &= Z_m s^m + Z_{m-1} s^{m-1} + \dots + Z_0 \\ \alpha(s) &= s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_0 \\ m &\leq n-1 \\ \text{rank} Z(s) &= q \end{aligned}$$

$Z(s)$ は m 次以下の多項式を要素とする $q \times p$ 多項式マトリクス, $\alpha(s)$ は n 次モニック多項式, $Z_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ は $q \times p$ 定数マトリクス, $|Z(s)G|$ がフルビッツ多項式となるような $q \times p$ 定数マトリクス G が存在し, 多項式 $\alpha(s)$ と多項式マトリクス $Z(s)G$ の少なくとも1つの要素多項式が互いに素であると仮定する。

本研究の多変数系のモデル・フォロイング制御系の構成問題は, \bar{p} 個の基準入力 $r(t)$ とプラントの出力 $y(t)$ 間に微分器を含まない制御器を配置して得られる制御系の伝達マトリクスを次のような安定な規範モデルの伝達マトリクス $W_M(s)$ に一致させることである。

$$\begin{aligned} W_M(s) &= \frac{\bar{Z}_m s^{\bar{m}} + \bar{Z}_{m-1} s^{\bar{m}-1} + \dots + \bar{Z}_0}{s^{\bar{n}} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-1} s^{\bar{n}-1} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-2} s^{\bar{n}-2} + \dots + \bar{\alpha}_0} \\ &= \frac{\bar{Z}(s)}{\bar{\alpha}(s)} \end{aligned} \quad (1-3)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \bar{Z}(s) &= \bar{z}_m s^{\bar{m}} + \bar{z}_{m-1} s^{\bar{m}-1} + \dots + \bar{z}_0 \\ \bar{\alpha}(s) &= s^{\bar{n}} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-1} s^{\bar{n}-1} + \bar{\alpha}_{\bar{n}-2} s^{\bar{n}-2} + \dots + \bar{\alpha}_0 \\ \bar{m} &\leq \bar{n}-1 \end{aligned}$$

$$\bar{n} - \partial_r[\bar{Z}(s)] \geq \bar{n} - \partial_r[\bar{\alpha}(s)]$$

$\bar{Z}(s)$ は \bar{m} 次以下の多項式を要素とする $q \times \bar{p}$ 多項式マトリクス, $\bar{\alpha}(s)$ は \bar{n} 次モニック・フルビッツ多項式, $\bar{Z}_i (i = 0, 1, 2, \dots, \bar{m})$ は $q \times \bar{p}$ 定数マトリクスであると仮定する。ただし, 記号 ∂_r は行次数を表す。

したがって, 望ましい $r(s)$ と $y(s)$ の関係式は次のように表される。

$$y(s) = W_M(s)r(s) \quad (1-4)$$

3 制御系の構成

制御系の構成についての複雑さはプラントの伝達マトリクスの構造, 特に $Z(s)$ の構造に依存している。したがって, 以下において, 構成が簡単なものから複雑なものへと次のような場合について考察する。

- i) $p = q = \bar{p} \geq 2$ のとき
- (1) $|Z_m| \neq 0$ のとき
- (2) $|Z_m| = 0, |\Gamma_r[Z(s)]| \neq 0$ のとき
- (3) $|Z_m| = 0, |\Gamma_r[Z(s)]| = 0$ のとき

ii) $p = q \geq 2, \bar{p} > p = q$ のとき

iii) $q \geq 2, p > q, \bar{p} \geq q$ のとき

ただし, 記号 $\Gamma_r[Z(s)]$ は $Z(s)$ の各行の最高次数の係数から構成される定数マトリクスを表す。

i) $p = q = \bar{p} \geq 2$ のとき

(1) $|Z_m| \neq 0$ のとき

これは, $Z(s)$ が $p \times q$ 正方マトリクスであることを除いて, 既に報告した多入力単出力系の場合と同様に取り扱うことができ, $u(s)$ と $y(s)$ の関係は次のように表すことができる。

$$f(s)y(s) = \sum_{i=1}^n (-a_i v_i + B_i w_i(s)) \quad (2-1)$$

ここで,

$$f(s) = s^{n-m} + f_{n-m-1} s^{n-m-1} + \dots + f_0$$

$a_i, B_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$, $\alpha_j (j = 0, 1, \dots, n-1)$, $Z_k (k = 0, 1, \dots, m)$ および $f_\ell (\ell = 0, 1, \dots, n-m-1)$ によって決定される定数であり, λ_i, f_ℓ は設計パラメータであり, $\lambda_i > 0, \lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$ および $f(s)$ がフルビッツ多項式になるように選定される。

$$v_i(s) = y(s)/(s + \lambda_i), w_i(s) = u(s)/(s + \lambda_i)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$v_n(s) = y(s), w_n(s) = u(s)$$

$v_i(s), w_i(s); (i = 1, 2, \dots, n-1), v_n(s), w_n(s)$ は p ベクトル, B_i は $p \times p$ 定数マトリクスである。

(2-1) 式における a_i, B_i は入力 $u(s)$ から $y(s)$ の各出力まで伝達マトリクスを多入力単出力系と考えることによって, 次のようにして求めることができる。

新たな多項式の定義を

$$g(s) = s^{n-1} + g_{n-2} s^{n-2} + \dots + g_0$$

$$= (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_{n-1})$$

とし, α, f, g をそれぞれ $\alpha(s), f(s), g(s)$ の係数から作られるベクトル, すなわち

$$\alpha^T = [1, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0]$$

$$f^T = [1, f_{n-m-1}, f_{n-m-2}, \dots, f_0]$$

$$g^T = [1, g_{n-2}, g_{n-3}, \dots, g_0]$$

とすると

$$\phi = T_{a1}^{-1} T_{f1} g \quad (2-2)$$

$$d = T_{a2} \phi - T_{f2} g \quad (2-3)$$

$$H = T_\alpha W \quad (2-4)$$

$$a = T^{-1}(\lambda) d \quad (2-5)$$

$$D = T^{-1}(\lambda) H \quad (2-6)$$

ここで、 T_{a1} , T_{a2} , T_{f1} および T_{f2} はそれぞれ $(n-m) \times (n-m)$, $n \times (n-m)$, $(n-m) \times n$, $n \times n$ マトリクスである。

$$T_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \alpha_{m+1} & \alpha_{m+2} & \cdot & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{a2} = \begin{bmatrix} \alpha_m & \alpha_{m+1} & \cdot & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \alpha_0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \alpha_0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \alpha_0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$T_{f1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdots & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ f_{n-m-1} & 1 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & f_{n-m-1} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ f_1 & f_2 & \cdot & f_{n-m-1} & 1 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{f2} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdot & f_{n-m-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & \cdot & \cdot & f_{n-m-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & f_0 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_0 & \cdot & f_{n-m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & f_0 \end{bmatrix}$$

$$T_\phi = \left. \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \phi & \cdot & \cdot \\ \phi & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \phi \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\} n$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c(A/\lambda_1) & c(A/\lambda_2) & \cdots & \cdots & \cdots & c(A/\lambda_{n-1}) \end{array} \right] c(A)$$

$$a^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\phi^T = [1, \phi_{n-m-2}, \phi_{n-m-3}, \dots, \phi_0]$$

$$W = \left. \begin{bmatrix} \text{Vec} Z_m \\ \text{Vec} Z_{m-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Vec} Z_0 \end{bmatrix} \right\} m+1, \quad D = \left. \begin{bmatrix} \text{Vec} B_1 \\ \text{Vec} B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Vec} B_n \end{bmatrix} \right\} n$$

$p \times p$

$p \times p$

記号 Vec は $p \times p$ マトリクス M の第 i 行ベクトルを M_i で表すとき、 $\text{Vec} M = [M_1, M_2, \dots, M_p]$ で

定義される $1 \times p \cdot p$ ベクトルを表す。

H は $p \cdot p \times n$ マトリクスである。

(2-4)(2-6)式より $T_\phi W = T(\lambda) D$ 即ち

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \phi & \cdot & \cdot \\ \phi & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \phi \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Vec} Z_m \\ \text{Vec} Z_{m-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Vec} Z_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline c(A/\lambda_1) & c(A/\lambda_2) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & c(A/\lambda_{n-1}) & \cdots & c(A) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \text{Vec} B_1 \\ \text{Vec} B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Vec} B_n \end{bmatrix}$$

の関係式が成り立ち $B_n = Z_m$ であり、仮定から $|B_n| = |Z_m| \neq 0$ となることがわかる。規範モデルの関係式は次のように書き換えることができる。

$$f(s)y(s) = f(s)W_M(s)r(s) \quad (2-7)$$

ここで、 $n - \partial_r [Z(s)] \leq n - \partial_r [\bar{Z}(s)]$ の仮定から

$f(s)W_M(s)$ はプロパーな伝達マトリクスである。

(2-1)式と(2-7)式を比較すると、左辺は等しく $f(s)$ はフルピッツ多項式であるから、次式が成り立つような制御ベクトル $u(s)$ が存在すれば、 $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクスは規範モデルの伝達マトリクスに一致する。

$$f(s)W_M(s)r(s) = \sum_{i=1}^n \{ -a_i v_i(s) + B_i w_i(s) \} \quad (2-8)$$

上式から入力ベクトル $u(s)$ は次のように求められる。

$$u(s) = B_n^{-1} (f(s)W_M(s)r(s) + \sum_{i=1}^n a_i v_i(s) - \sum_{i=1}^{n-1} B_i w_i(s)) \quad (2-9)$$

例1 プラントと規範モデルの伝達マトリクスがそれぞれ次式で与えられる場合を考える。

$$W_p(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{s+1}{s^3+2s^2+s+3} & \frac{s+3}{s^3+2s^2+s+3} \\ \frac{2s+4}{s^3+2s^2+s+3} & \frac{s+4}{s^3+2s^2+s+3} \end{array} \right]$$

$$W_M(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s+1}{s^3+6s^2+11s+6} \end{array} \right]$$

$W_p(s)$ の表示を次のようにする。

$$W_p(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}{s^3 + 2s^2 + s + 3}$$

$n = 3, m = 1$ であるから、プラントを (2-1) 式のように表示するために、 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, f(s) = s^2 + 2s + 1$ と選定すると、 $T_{f1}, T_{f2}, T_{a1}, T_{a2}, T(\lambda), g$ から、 $\phi^T = [1 \ 3]$,

$$d^T = [-2 \ -1 \ 7], \quad a^T = [6 \ -1 \ -2]$$

となる。また、

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad T_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

であるから (2-4) (2-6) 式を用いて

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & 7 \\ 3 & 6 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & 7 \\ 3 & 6 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Vec} B_1 \\ \text{Vec} B_2 \\ \text{Vec} B_3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

が計算される。したがって、プラントの入出力関係は次のように表すことができる。

$$(s^2 + 2s + 1)y(s) = \frac{-6y(s)}{(s+1)} + \frac{y(s)}{s+2} + 2y(s) \\ + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}{s+1} u(s) + \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{s+2} u(s) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u(s)$$

一方、規範モデルについては (2-7) 式より次のように表すことができる。

$$(s^2 + 2s + 1)y(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)} \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} r(s) \\ - \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \frac{(s+1)^2}{(s+2)(s+3)} r(s)$$

以上から、制御入力ベクトル $u(s)$ は (2-9) 式を用いて次のように決定される。

$$u(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ -\frac{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}{s+1} \frac{u(s)}{s+1} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{s+2} \frac{u(s)}{s+2} \right.$$

$$\left. + \frac{6y(s)}{s+1} - \frac{y(s)}{s+2} - 2y(s) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} r(s) \right\}$$

制御系の構成は図1に示す。

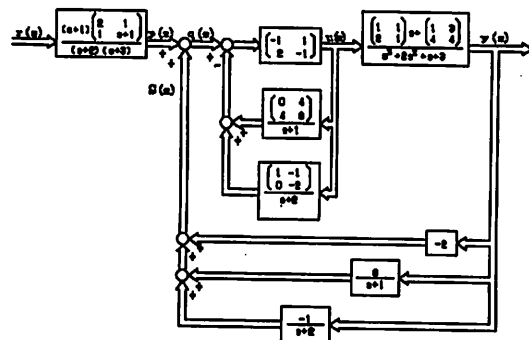


図1 例1の制御系の構成

この制御系の伝達マトリクスが規範モデルの伝達マトリクスに一致していることを確認するために図1より $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクスを求める。

1) $q(s)$ と $u(s)$ 間の伝達マトリクス

$$u(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ q(s) - \frac{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}{s+1} \frac{u(s)}{s+1} \right. \\ \left. - \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{s+2} \frac{u(s)}{s+2} \right\} \text{より}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} (s+1)(s+2) + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}{s+2} (s+2) \right.$$

$$\left. \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{s+1} (s+1) \right\} u(s) = (s+1)(s+2)q(s)$$

$$\begin{bmatrix} s^2 + 4s + 3 & s^2 + 6s + 9 \\ 2(s^2 + 5s + 6) & s^2 + 7s + 12 \end{bmatrix} u(s)$$

$$= (s+3) \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ 2(s+2) & s+4 \end{bmatrix} u(s) = (s+1)(s+2)q(s)$$

$$u(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ 2(s+2) & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)} q(s)$$

$$= \frac{-(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+5s+8)} \begin{bmatrix} s+4 & -(s+3) \\ -2(s+2) & s+1 \end{bmatrix} q(s)$$

2) $q(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \frac{-(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+5s+8)(s^3+s^2+s+3)}$$

$$\times \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ 2(s+2) & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & -(s+3) \\ -2(s+2) & s+1 \end{bmatrix} q(s)$$

$$= \frac{-(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+5s+8)(s^3+s^2+s+3)} q(s)$$

3) $y(s)$ と $S(s)$ 間の伝達マトリクス

$$S(s) = \frac{-2(s+1)(s+2)+6(s+2)-(s+1)}{(s+1)(s+2)} y(s) \\ = \frac{-(2s^2+s-7)}{(s+1)(s+2)} y(s)$$

4) $p(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$q(s) = S(s) + p(s) \\ y(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^3+s^2+s+3)} q(s) \\ = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^3+s^2+s+3)} (S(s) + p(s)) \\ = \frac{-(2s^2+s-7)}{(s+3)(s^3+s^2+s+3)} y(s) \\ + \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^3+s^2+s+3)} p(s) \\ \{(s+3)(s^3+s^2+s+3)(2s^2+s-7)\} y(s) \\ = (s^4+5s^3+9s^2+7s+2)y(s) \\ = (s+1)^3(s+2)y(s) \\ = (s+1)(s+2)p(s)$$

$$y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} p(s)$$

5) $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} r(s)$$

(2) $Z_m \neq [0]$, $|Z_m| = 0$, かつ

$|G_r(Z(s))| \neq 0$ のとき

$G_r(Z(s))$ は $Z(s)$ の各行の最高次数の係数から構成される定数マトリクスである。いま、 $Z(s)$ の各行の最高次数を m_1, m_2, \dots, m_p で表す。 $u(s)$ と $y(s)$ の関係は次のように表すことができる。

$$F(s)y(s) = \sum_{i=1}^n (-A_i v_i(s) + B_i w_i(s)) \quad (2-10)$$

ここで、

$$F(s) = \begin{bmatrix} f^1(s) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & f^2(s) & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & f^p(s) \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i^1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_i^2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_i^p \end{bmatrix}$$

$$f^j(s) = s^{n-m_j} + f_{n-m_j-1} s^{n-m_j-1} + \dots + f_0$$

$$j = 1, 2, \dots, p$$

$$v_i(s) = y(s) / (s + \lambda_i), \quad w_i(s) = u(s) / (s + \lambda_i) \\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$v_n(s) = y(s), \quad w_n(s) = u(s)$$

$f^j(s)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) は設計者が選定する任意のフルブツツ多項式 a_i^j ($j = 1, 2, \dots, p$) はスカラ、 B_i は $p \times p$ 定数マトリクス、 $v_i(s), w_i(s)$; ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $v_n(s) = y(s), w_n(s) = u$ は p ベクトルである。

(2-10) 式は、入出力関係式 $y(s) = W_p(s)u(s)$ の各行毎に次のような変換を行えば導出することができる。

いま、 $Z(s)$ の第 j 行を $Z^j(s)$ で表すと第 j 行の入出力関係は次式で得られる。 $y(s)$ の第 j 行を $y^j(s)$ で表す。

$$y^j(s) = \frac{Z^j(s)}{\alpha(s)} u(s) \\ = \frac{Z^j_m s^{m_j} + Z^j_{m_j-1} s^{m_j-1} + \dots + Z^j_0}{s^p + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} u(s) \quad (2-11)$$

ここで、 Z^j_k ($k = 0, 1, \dots, m_j$) は $1 \times p$ ベクトルである。

さらに、 B_i の第 j 行を B^j_i で表すと、(2-10) 式における a_i^j, B^j_i は次の関係式を用いて求めることができる。

$$\phi^j = (T^j_{a1})^{-1} (T^j_{11}) g \quad (2-12)$$

$$d^j = (T^j_{a2}) \phi^j - (T^j_{12}) g \quad (2-13)$$

$$H^j = (T^j_{1p}) W^j \quad (2-14)$$

$$a^j = T^{-1}(\lambda) d^j \quad (2-15)$$

$$D^j = T^{-1}(\lambda) H^j \quad (2-16)$$

ここで、

$$(\phi^j)^T = [1 \quad \phi^j_{n-m_j-2} \quad \phi^j_{n-m_j-3} \quad \dots \quad \phi^j_0]$$

$$T^j_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_{n-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \alpha_{m_j+1} & \alpha_{m_j+2} & \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

T^j_{a1} は $(n - m_j) \times (n - m_j)$ マトリクス、

$$T^j_{a2} = \begin{bmatrix} \alpha_{m_j} & \alpha_{m_j-1} & \cdot & \cdot & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \alpha_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

T^j_{a2} は $n \times (n - m_j)$ マトリクス、

$$T_{11}^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ f_{n-mj-1}^j & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & f_{n-mj-1}^j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^j & f_2^j & \cdot & f_{n-mj-1}^j & 1 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

T_{11}^j は $(n - m_j) \times n$ マトリクス,

$$T_{12}^j = \begin{bmatrix} f_0^j & f_1^j & \cdot & f_{n-mj-1}^j & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & f_0^j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{n-mj-1}^j & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_0^j & \cdot \end{bmatrix}$$

T_{12}^j は $n \times n$ マトリクス,

$$T_{1\phi}^j = \left. \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \phi^j & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \phi^j & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \right\} n$$

$m_j + 1$

$$W^j = \left. \begin{bmatrix} Z_{m_j}^j \\ Z_{m_j-1}^j \\ \cdot \\ Z_0^j \end{bmatrix} \right\} m_j + 1 \quad D^j = \left. \begin{bmatrix} B_1^j \\ B_2^j \\ \cdot \\ B_n^j \end{bmatrix} \right\} n$$

H^j は $n \times p$ マトリクスであり, g の定義は i) の場合と同様である。

規範モデルの関係式は次のように書き換えることができる。

$$F(s)y(s) = F(s)W_M(s)r(s) \quad (2-17)$$

ここで, $n - \partial_r[Z(s)] \leq n - \partial_r[\bar{Z}(s)]$ の仮定から $F(s)W_M(s)$ はプロパーな伝達マトリクスである。

(2-10) 式と (2-17) 式を比較すると, 左辺は等しく, $F(s)$ は安定な多項式マトリクスであるから, 次式が成立つような制御入力ベクトルが存在すれば, $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクスは規範モデルの伝達マトリクスに一致する。

$$\sum_{i=1}^n (-A_i v_i(s) + B_i w_i(s))$$

$$= F(s)W_M(s)r(s) \quad (2-18)$$

(2-12) (2-14) (2-15) 式から, $Z_{m_j}^j$ と B_n^j の関

係を調べると

$$B_n = \begin{bmatrix} B_n^1 \\ B_n^2 \\ \cdot \\ B_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{m_1}^1 \\ Z_{m_2}^2 \\ \cdot \\ Z_{m_p}^p \end{bmatrix} = \Gamma_r[Z(s)] \quad (2-19)$$

となり, B_n は正則であるから, 制御ベクトル $u(s)$ は次のように与えられる。

$$u(s) = B_n^{-1} \{F(s)W_M(s)r(s)$$

$$\sum_{i=1}^n A_i v_i(s) - \sum_{i=1}^{n-1} B_i w_i(s)\} \quad (2-20)$$

例2 プラントと規範モデルの伝達マトリクスがそれぞれ次式で与えられる場合を考える。

$$W_p(s) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{s+1}{s^2-2s+1} & \frac{s+2}{s^2-2s+1} \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$W_M(s) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{s+2}{s^2+3s+2} & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right]$$

$W_p(s)$ の表示を次のように書き換える。

$$W_p(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}{s^2 - 2s + 1}$$

このプラントについて, $n = 3$, $m = 1$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = -2$, $\alpha_0 = 1$, $Z_1 \neq [0]$, $|Z_1| = 0$ であり,

$$\Gamma_r[Z(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad |\Gamma_r[Z(s)]| = -1 \neq 0,$$

$m_1 = 1$, $m_2 = 0$ である。このプラントの入出力関係を (2-10) 式のように表すため, $\lambda_1 = 1$, $f^1(s) = s + 1$, $f^2(s) = s^2 + 2s + 1$ と選定すると,

$$g^T = [1 \ 1], \quad T_{a1}^1 = 1, \quad T_{11}^1 = [1 \ 0]$$

$$W^2 = [2 \ 1]$$

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{a2}^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{a1}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{a2}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{12}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{21}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{12}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となるから、 $\phi^1, \phi^2, T^1_\phi, T^2_\phi, T(\lambda)$ は

$$\phi^1 = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$T^1_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^2_\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と求められる。さらに、 A_1, B_1 は次のように求められる。

$$d^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$H^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} [2 \ 1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$D^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

したがって、プラントの入出力関係は次のように表示される。

$$F(s)y(s) = -A_1 \frac{y(s)}{s+1} - A_2 y(s)$$

$$+ B_1 \frac{u(s)}{s+1} + B_2 u(s)$$

ここで、

$$F(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s^2+2s+11 \end{bmatrix}$$

また、規範モデルについては次のように表すことができる。

$$F(s)y(s) = F(s)W_M(s)r(s)$$

ここで、

$$F(s)W_M(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s+1}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

以上から、制御入力ベクトル $u(s)$ は次のように決定される。

$$\begin{aligned} u(s) &= B_2^{-1} \left\{ -B_1 \frac{u(s)}{s+1} + A_1 \frac{y(s)}{s+1} \right. \\ &\quad \left. + A_2 y(s) + F(s)W_M(s)r(s) \right\} \end{aligned}$$

制御系の構成は図2に示す。

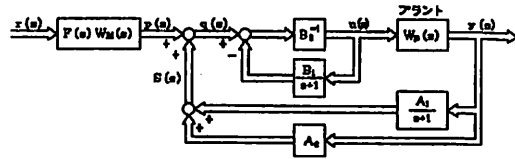


図2 例2の制御系の構成

この制御系の伝達マトリクスを求める。

1) $q(s)$ と $u(s)$ 間の伝達マトリクス

$$u(s) = B_2^{-1} \left\{ q(s) - B_1 \frac{u(s)}{s+1} \right\}$$

$$(B_2(s+1) + B_1) u(s) = (s+1)q(s)$$

$$u(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+1 \\ 2(s+5) & -(s+1) \end{bmatrix}^{-1} (s+1) q(s)$$

$$= \begin{bmatrix} -(s+5) & s+2 \\ 2(s+5) & -(s+1) \end{bmatrix}^{-1} \frac{s+1}{(s+3)(s+5)} q(s)$$

2) $q(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(s+5) & s+2 \\ 2(s+2) & -(s+1) \end{bmatrix}$$

$$\times \frac{s+1}{(s-1)^2(s+3)(s+5)} q(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2(s+5)} q(s)$$

3) $y(s)$ と $S(s)$ 間の伝達マトリクス

$$S(s) = A_1 \frac{y(s)}{s+1} + A_2 y(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 3s-1 \end{bmatrix} \frac{-4}{s+1} y(s)$$

4) $p(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$q(s) = p(s) + S(s)$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{s+1}{(s-1)^2(s+5)} p(s) \\ + \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 3s-1 \end{bmatrix} \frac{-4}{(s-1)^2(s+5)} y(s)$$

$$\begin{bmatrix} (s+1)^2(s+5) & 0 \\ 0 & (s+1)^3 \end{bmatrix} y(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (s+1)p(s)$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} p(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} p(s)$$

5) $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{bmatrix} \frac{r(s)}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$= \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{r(s)}{(s+1)(s+2)}$$

(3) $Z_m \neq 0$, $|Z_m| = 0$, かつ

$|\Gamma_r(Z(s))| = 0$ のとき

ここでは、 $Z(s)$ の各行の最高次数の係数から構成される定数マトリクスの行列式が零であることが(2)の場合と異なる。

(ア) $U_c Z(s)$ が行プロパーとなるような正則な $p \times p$ 定数マトリクス U_c が存在するとき

$U_c Z(s)$ が行プロパーであるとは $\Gamma_r(U_c Z(s))$ が full rank を持つことであり、 $U_c Z(s)$ が正方マトリクスであるから、 $|\Gamma_r(U_c Z(s))| \neq 0$ である。このとき、 $y(s) = W_p(s)u(s)$ の両辺に U_c を掛けると次式が得られる。

$$\eta(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} u(s) = W'_p(s)u(s) \quad (2-21)$$

ここで、 $\eta(s) = U_c y(s)$, $\beta(s) = U_c Z(s)$, $W'_p(s) = \beta(s) / \alpha(s)$

また、規範モデルについても、 $y(s) = W_M(s)r(s)$ の両辺に U_c を掛ける。

$$\eta(s) = \frac{\bar{\beta}(s)}{\bar{\alpha}(s)} r(s) = W'_M(s)r(s) \quad (2-22)$$

ここで、 $\bar{\beta}(s) = U_c \bar{Z}(s)$, $W'_M(s) = \bar{\beta}(s) / \bar{\alpha}(s)$

もし、(2-21)式において、 $r(s)$ と $\eta(s)$ 間の伝達マトリクスが(2-22)式で与えられる伝達マトリクス $\bar{\beta}(s) / \bar{\alpha}(s)$ に一致するような制御入力 $u(s)$ を決定することができれば、 $y(s) = U_c^{-1} \eta(s)$ であるから、(2-22)式から逆に

$$y(s) = U_c^{-1} \eta(s) = U_c^{-1} \frac{\bar{\beta}(s)}{\bar{\alpha}(s)} r(s)$$

$$= \frac{U_c^{-1} U_c \bar{Z}(s)}{\bar{\alpha}(s)} r(s) = \frac{\bar{Z}(s)}{\bar{\alpha}(s)} r(s)$$

$$= W_M(s)r(s) \quad (2-23)$$

となり、 $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクスは $W_M(s)$ に一致する。したがって、問題は $r(s)$ と $\eta(s)$ 間の伝達マトリクスが $W'_M(s)$ に一致するような制御ベクトル $u(s)$ を決定することになる。ただし、 $n - \partial_r[\beta(s)] \leq \bar{n} - \partial_r[\bar{\beta}(s)]$ の仮定が必要になる。このとき(2)の方法を適用することができる。

いま、 $\beta(s) = \beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0$, $\bar{\beta}(s) = \bar{\beta}_m s^m + \bar{\beta}_{m-1} s^{m-1} + \dots + \bar{\beta}_0$ と定義すると、(2)で述べた方法を適用するためには、 $y(s)$ の代わりに $\eta(s)$ を Z_i の代わりに β_i を使用しなければならない。

例3 プラントと規範モデルの伝達マトリクスがそれぞれ次式で与えられる場合を考える。

$$W_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2-2s+1} & \frac{s+2}{s^2-2s+1} \\ \frac{s+3}{s^2-2s+1} & \frac{s+3}{s^2-2s+1} \end{bmatrix}$$

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{3}{s^2+2s+1} \\ \frac{2}{s^2+2s+1} & \frac{4}{s^2+2s+1} \end{bmatrix}$$

$W_p(s)$ の表示を次のように書き換える。

$$W_p(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}{s^2-2s+1}$$

このプラントについて、 $n = 2$, $m = 1$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = -2$, $\alpha_0 = 1$, $Z_1 \neq [0]$, $|Z_1| = 0$ であり、

$$\Gamma_r[Z(s)] = Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$|\Gamma_r[Z(s)]| = 0$ であるから、(2)の方法は使えない。

そこで、 $U_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ を $Z(s)$ に掛けると

$$\beta(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta_0(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_r[\beta(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, |\Gamma_r[\beta(s)]| = -1$$

となり、 $y(s)$ の代わりに $\eta(s)$, $Z(s)$ の代わりに $\beta(s)$ を用いて(2)の方法を適用することができる。ここで得られた β_1 , β_0 は例2の Z_1 , Z_0 と同じ定数マトリクスであり、 $\alpha(s)$ も同一であるから、 $u(s)$ と $\eta(s)$ の関係を(2-10)式のように表すために、 $\lambda_1 = 1$, $f^1(s) = s + 1$, $f^2(s) = s^2 + 2s + 1$ と選定すると次式が得られる。

$$F(s)\eta(s) = -A_1 \frac{\eta(s)}{s+1} - A_2 \eta(s) + B_1 \frac{u(s)}{s+1} + B_2 u(s)$$

ここで、

$$F(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s^2+2s+1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

また、規範モデルについては次のように表すことができる。

$$F(s)\eta(s) = F(s)U_c W_M(s)r(s) = F(s)W'_M(s)r(s)$$

ここで、

$$F(s)W'_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{3}{s+2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

以上から、制御入力ベクトル $u(s)$ は次のように決定される。

$$u(s) = B_2^{-1} \left\{ -B_1 \frac{u(s)}{s+1} + A_1 \frac{\eta(s)}{s+1} + A_2 \eta(s) + F(s)W'_M(s)r(s) \right\}$$

$$= B_2^{-1} \left\{ -B_1 \frac{u(s)}{s+1} + \left(A_1 \frac{1}{s+1} + A_2 \right) U_c y(s) + F(s)W'_M(s)r(s) \right\}$$

制御系の構成は図3に示す。

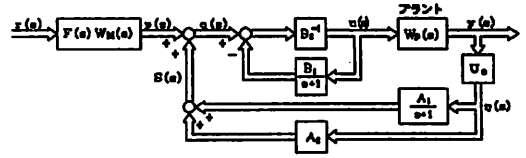


図3 例3の制御系の構成

この制御系の伝達マトリクスを求める。

- 1) $q(s)$ と $u(s)$ 間の伝達マトリクス (例2と同じ)

$$u(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+1 \\ 2(s+5) & s+1 \end{bmatrix}^{-1} (s+1)q(s)$$

$$u(s) = \begin{bmatrix} -(s+5) & s+2 \\ 2(s+5) & -(s+1) \end{bmatrix} \frac{s+1}{(s+3)(s+5)} q(s)$$

- 2) $q(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(s+5) & s+2 \\ 2(s+2) & -(s+1) \end{bmatrix} \times \frac{s+1}{(s-1)^2(s+3)(s+5)} q(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ s+5 & 1 \end{bmatrix} \frac{s+1}{(s-1)^2(s+5)} q(s)$$

- 3) $y(s)$ と $S(s)$ 間の伝達マトリクス (例2に類似)

$$S(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 3s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{-4}{s+1} y(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s & 0 \\ -(3s-1) & 3s-1 \end{bmatrix} \frac{-4}{s+1} y(s)$$

- 4) $p(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$p(s) = q(s) + S(s)$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ s+5 & 1 \end{bmatrix} \frac{s+1}{(s-1)^2(s+5)} p(s)$$

$$+ \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ s+5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ -(3s-1) & 3s-1 \end{bmatrix} \frac{-4}{(s-1)^2(s+5)} y(s)$$

$$\begin{bmatrix} (s+1)^2(s+5) & 0 \\ 4(s+1)^2 & (s+1)^3 \end{bmatrix} y(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ s+5 & 1 \end{bmatrix} (s+1)p(s)$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 4 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ s+5 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} p(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} p(s)$$

5) $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ s+1 & s+1 \end{bmatrix} \frac{r(s)}{(s+1)^3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{r(s)}{(s+1)^2}$$

(4) $U_L(s)Z(s)$ が行プロパーとなるようなユニモジュラー・マトリクス, $U_L(s)$ 存在するとき

$\text{rank}Z(s) = p$ の仮定により, このようなユニモジュラー・マトリクス, $U_L(s)$ が存在する。

いま, $U_L(s)$ の最高次数を持つ要素の次数を L とするとき, $U_L(s)$ を

$$\theta(s) = (s + \rho_1)(s + \rho_2) \cdots (s + \rho_L)$$

$$= s^L + \theta_{L-1}s^{L-1} + \cdots + \theta_0$$

ここで, $\rho_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, L$)

なる多項式で割ったマトリクス $U_\theta(s)$ を定義する。

$U_\theta(s) = U_L(s) / \theta(s)$ 。このとき, $y(s) = W_p(s)u(s)$ の両辺に $U_\theta(s)$ を掛けると次式が得られる。

$$\eta'(s) = \frac{\beta'(s)}{\alpha'(s)} u(s) = \tilde{W}_p(s)u(s) \quad (2-24)$$

ここで, $\beta'(s) = U_L(s)Z(s)$, $\alpha'(s) = \theta(s)\alpha(s)$,

$\tilde{W}_p(s) = \beta'(s) / \alpha'(s)$, $\eta'(s) = U_\theta(s)y(s)$

一方, 規範モデルについても, $p(s) = W_M(s)r(s)$ の両辺に $U_\theta(s)$ を掛ける。

$$\eta'(s) = \frac{\bar{\beta}'(s)}{\bar{\alpha}'(s)} r(s) = \tilde{W}_M(s)r(s) \quad (2-25)$$

ここで, $\bar{\beta}'(s) = U_L(s)\bar{Z}(s)$, $\bar{\alpha}'(s) = \theta(s)\bar{\alpha}(s)$,

$\tilde{W}_M(s) = \bar{\beta}'(s) / \bar{\alpha}'(s)$,

もし, (2-24)式において, $r(s)$ と $\eta'(s)$ 間の伝達マトリクスが(2-25)式で与えられる伝達マトリクス $\tilde{W}_M(s)$ に一致するような制御入力 $u(s)$ を決定することができれば, $y(s) = U^{-1}_\theta(s)\eta'(s)$ であるから, (2-24)式から逆に

$$y(s) = U^{-1}_\theta(s)\eta'(s) = U^{-1}_\theta(s)\tilde{W}_M(s)r(s)$$

$$= U^{-1}_\theta(s)U_\theta(s)W_M(s)r(s) = W_M(s)r(s) \quad (2-26)$$

となり, $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクスは $W_M(s)$ に一致する。したがって, 問題は $r(s)$ と $\eta'(s)$ 間の伝達マトリクスが $\tilde{W}_M(s)$ に一致するような制御ベクトル $u(s)$ を決定することになる。ただし, $n + L - \partial_r[\beta'(s)] \leq \bar{n} + L - \partial_r[\bar{\beta}'(s)]$ の仮定が必要になる。このとき(2)の方法を適用することができる。

いま, $\beta'(s) = \beta'_m s^m + \beta'_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \beta'_0$, $\alpha'(s) = s^{n+L} + \alpha'_{n+L-1} s^{n+L-1} + \cdots + \alpha'_0$ と定義すると,

(1)(2)で述べた方法を適用するためには, $y(s)$ の代わりに $\eta'(s)$ を Z_1 の代わりに β'_1 を使用しなければならない。このとき, 制御入力 $u(s)$ を用いて発生しなければならないが, $\eta'(s)$ はまた $y(s)$ より $U_\theta(s)y(s)$ として発生させる。 $U_\theta(s)$ はプロパーな伝達マトリクスになっているから微分器を用いなくて実現可能である。また, $\alpha(s)$ の代わりに $\alpha'(s)$ を使用する。

例4 プラントと規範モデルの伝達マトリクスがそれぞれ次式で与えられる場合を考える。

$$W_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2-2s+1} & \frac{s+1}{s^2-2s+1} \\ \frac{1}{s^2-2s+1} & \frac{1}{s^2-2s+1} \end{bmatrix}$$

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2+2s+1} & \frac{2s+3}{s^2+2s+1} \\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{2}{s^2+2s+1} \end{bmatrix}$$

$W_p(s)$ を見ると, $n = 2, m = 1$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Z_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = -2, \alpha_0 = 1, Z_1 \neq [0], |Z_1| = 0$ であり,

$$\Gamma_r[Z(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$|\Gamma_r[Z(s)]| = 0$ であるから, (2)の方法は使えない。

そこで, $U_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を左から掛け, $(s+1)$

で割ると

$$\tilde{W}_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^3-s^2-s+1} & \frac{1}{s^3-s^2-s+1} \\ \frac{1}{s^3-s^2-s+1} & \frac{1}{s^3-s^2-s+1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha'_2 = -1 \\ \alpha'_1 = -1 \\ \alpha'_0 = 1 \end{matrix}$$

$$\beta'_0(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial_{r1}[\bar{\beta}'(s)] = 0 \\ \partial_{r2}[\bar{\beta}'(s)] = 0 \end{matrix}$$

$$\Gamma_r[\beta'(s)] = \beta'_0, |\Gamma_r[\beta'(s)]| = 1$$

となる。また, $U_\theta(s) = U_L(s) / (s+1)$ を $W_M(s)$ に掛けると

$$\tilde{W}_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{(s+1)^3} & \frac{3}{(s+1)^3} \\ \frac{1}{(s+1)^3} & \frac{2}{(s+1)^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial_{r1}[\bar{\beta}'(s)] = 0 \\ \partial_{r2}[\bar{\beta}'(s)] = 0 \\ L = 1 \end{matrix}$$

となり, 仮定より $n + L - \partial_r[\beta'(s)] \leq \bar{n} + L - \partial_r[\bar{\beta}'(s)]$ であるから, $y(s)$ の代わりに $\eta'(s)$, $Z(s)$ の代

わりに $\beta'(s)$, $\alpha(s)$ の代わりに $\alpha'(s)$ を用いれば(1)の方法を適用することができる。 $u(s)$ と $\eta'(s)$ の入出力関係を(2-1)式のように表すために、

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, f(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ と選定すると

$$T_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, T_{a2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, T^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$g^T = [1 \ 3 \ 2], W = [2 \ 1 \ 1 \ 1]$ となるから、

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$T^T_{\phi} = [1 \ 7 \ 22]$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -28 \\ -15 \\ 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 \\ -24 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 22 \end{bmatrix} [2 \ 1 \ 1 \ 1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 14 & 7 & 7 & 7 \\ 44 & 22 & 22 & 22 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -44 \\ -24 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 108 \\ -44 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 14 & 7 & 7 & 7 \\ 44 & 22 & 22 & 22 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 16 & 16 & 16 \\ -24 & -12 & -12 & -12 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 0, a_2 = 108, a_3 = -44$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 32 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -24 & -12 \\ -12 & -12 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と計算され、 $u(s)$ と $\eta'(s)$ の関係は次のように表示される。

$$f(s)\eta'(s) = -a_1 \frac{\eta'(s)}{s+1} - a_2 \frac{\eta'(s)}{s+2} - a_3 \eta'(s) + B_1 \frac{u(s)}{s+1} + B_2 \frac{u(s)}{s+2} - B_3 u(s)$$

また、規範モデルについては次のように表すことができる。

$$f(s)\eta'(s) = f(s)\bar{W}_M(s)r(s)$$

以上から、制御入力ベクトル $u(s)$ は次のように決定される。

$$u(s) = B_3^{-1} \left\{ -B_1 \frac{u(s)}{s+1} - B_2 \frac{u(s)}{s+2} + a_1 \frac{\eta'(s)}{s+1} + a_2 \frac{\eta'(s)}{s+2} + a_3 \eta'(s) + f(s)\bar{W}_M(s)r(s) \right\}$$

$$= B_3^{-1} \left\{ -B_1 \frac{u(s)}{s+1} - B_2 \frac{u(s)}{s+2} + \left(\frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} + a_3 \right) U_{\theta}(s)y(s) + f(s)\bar{W}_M(s)r(s) \right\}$$

制御系の構成は図4に示す。

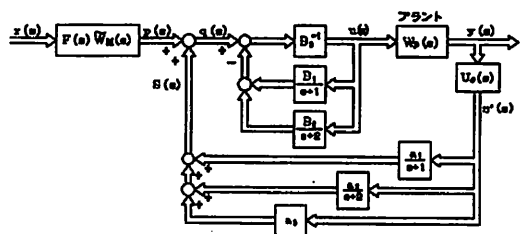


図4 例4の制御系の構成

この制御系の伝達マトリクスを求める。

1) $q(s)$ と $u(s)$ 間の伝達マトリクス

$$u(s) = B_3^{-1} \left\{ -B_1 \frac{u(s)}{s+1} + B_2 \frac{u(s)}{s+2} + q(s) \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2(s^2+6s+14) & s^2+6s+14 \\ s^2+6s+14 & s^2+6s+14 \end{bmatrix} u(s) = (s+1)(s+2)q(s)$$

$$u(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{(s+1)(s+2)}{s^2+6s+14} q(s)$$

2) $q(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \times \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)^2(s^2+6s+14)} q(s) \\ = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)^2(s^2+6s+14)} q(s)$$

3) $\eta'(s)$ と $S(s)$ 間の伝達マトリクス

$$S(s) = \left(\frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} + a_3 \right) \eta'(s) \\ = \frac{-35s^2-18s+12}{(s+1)(s+2)} \eta'(s)$$

4) $y(s)$ と $S(s)$ 間の伝達マトリクス

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{-35s^2-18s+12}{(s+1)^2(s+2)} y(s)$$

5) $p(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$q(s) = p(s) + S(s) \\ y(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)^2(s^2+6s+14)} p(s) \\ + \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{-35s^2-18s+12}{(s-1)^2(s^2+6s+14)(s-1)^2} y(s) \\ y(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} p(s)$$

6) $r(s)$ と $y(s)$ 間の伝達マトリクス

$$y(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} W_M(s) r(s) \\ = W_M(s) r(s)$$

ii) $p = q \geq 2$, $\bar{p} > p = q$ のとき

i) と異なるのは基準入力の数が増え、プラントの入出力関係は i) で述べたように表示される。規範モデルの入出力関係も、次数差の仮定が満足されていれば同様に表され、微分器を用いずに制御系を実現することができる。

iii) $q \equiv 2$, $p > q$, $\bar{p} \geq q$ のとき

ii) と異なるのは基準入力の数が増え、プラントの入出力関係より多いということであり、 $|Z(s)G|$ がフルピツ多項式となるような $p \times q$ 定数マトリクス G が存在すれば i) ii) を用いて制御系を実現できることは明らかである。

4 応答の数値計算

提案した制御系の構成によってプラントの出力がモデルの出力の追従するかどうか確かめるために、例1～例4で示した各場合について、数値計算を行って望ましい規範モデルの応答とプラントの応答 y を比較した。なお、規範モデルの2つの出力を y_{m1} , y_{m2} とし、プラントの2つの出力を y_1 , y_2 とする。また、規範モデルの初期値はいずれの場合も零としている。

図5は例1の場合の数値計算結果を示したものである。規範入力とプラントの出力の初期値は次のように設定した。

$$r(t) = [2.8 \sin t \quad 6.8 \sin 2t]^T \\ y(o) = [0.2 \quad 0.5]^T$$

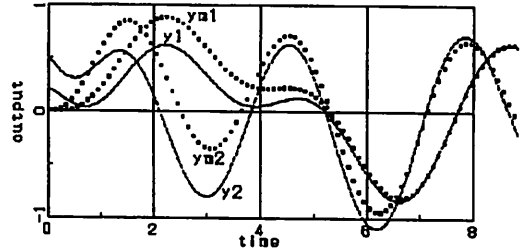


図5 例1の規範モデルとプラントの応答の比較
(点：規範モデル 線：プラント)

図6は例2の場合の数値計算結果を示したものである。規範入力とプラントの出力の初期値は次のように設定した。

$$r(t) = [0.8 \sin t \quad 1.5 \sin 2t]^T \\ y(o) = [0.1 \quad 0.3]^T$$

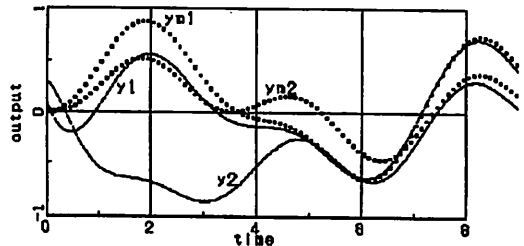


図6 例2の規範モデルとプラントの応答の比較
(点：規範モデル 線：プラント)

図7は例3の場合の数値計算結果を示したものである。規範入力とプラントの出力の初期値は次のように設定した。

$$r(t) = [0.3 \sin t \quad 0.6 \sin 2t]^T$$

$$y(o) = [0.1 \quad 0.4]^T$$

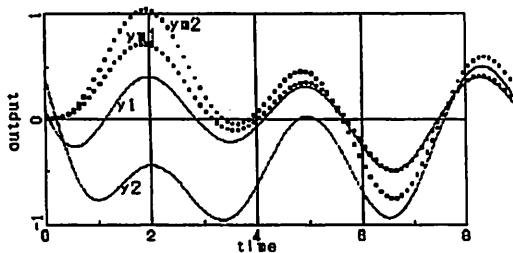


図7 例3の規範モデルとプラントの応答の比較
(点：規範モデル 線：プラント)

図8は例4の場合の数値計算結果を示したものである。規範入力とプラントの出力の初期値は次のように設定した。

$$r(t) = [0.1 \sin t \quad 0.4 \sin 2t]^T$$

$$y(o) = [0.1 \quad 0]^T$$

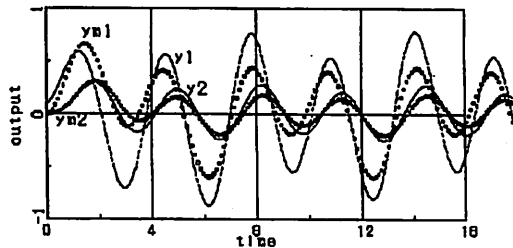


図8 例4の規範モデルとプラントの応答の比較
(点：規範モデル 線：プラント)

いずれの場合も初期値の違いにかかわらず、追従状況は概ね良好であるが、プラントが特殊なものになるにしたがって、同様の設計パラメータを使っても収束の速度は遅くなっている。ただし、収束の速度は設計パラメータ λ_i , f_e を選定することによって調節することができる。

5 あとがき

本研究では既に報告した周波数領域における多入力単出力線形時間固定係数系のモデル・フォロイング制御系の設計法を多入力多出力系に拡張し、多入力単出力系に対するものと同様、規範入力とプラントの出力間の伝達マトリクスを規範モデルの伝達マトリクスに一致させる制御系の構成を周波数領域で直接求めるアルゴリズムを開発している。この制御系を構成したり実

行するのにプラントやモデルの入出力関係を時間領域の状態方程式で表示したり、状態量を測定することは必要ではない。制御則を求めるのに必要なものは伝達マトリクスの係数と簡単なマトリクスの演算だけであり、制御を実行するのに必要なものは基準入力とプラントの入出力信号だけであり、モデルの動特性を制御系に含む必要はない。

基準入力からプラントの出力までの伝達マトリクスが規範モデルの伝達マトリクスに一致するような制御入力求められるが、仮定から不安定な極と零点の相殺は起こらないので制御系の安定性は保証される。

制御系の構成についての複雑さはプラントの伝達マトリクスの構造に依存する。

最後に、その有効性を数値例によって検討し、プラントと規範モデル間の出力の初期誤差は零に漸近することが確認された。

本設計法では不安定零点をもつプラントやパラメータ変動に対する考察については考察していないので、これらについては今後の課題である。

参考文献

- 1) W. A. Wolovich : Linear Multivariable Systems. New York : Springer Verlag, 1974
- 2) 出川, 金井, 内門 : 多変数モデル・フォロイング制御系の一構成法, 計測自動制御学会論文集, 第18巻, 第12号, 1982年, pp1132 ~ 1139
- 3) 出川 : 周波数領域におけるモデル・フォロイング制御系の一構成法, 第一工業大学研究報告, 第6号, 平成6年3月, pp67 ~ 73