Liénard 形非線形システムのリアプノフ関数に関する一考察

宮城雅夫*　宮城隼夫**

A study on Lyapunov functions for Liénard-type nonlinear systems

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

In this paper, a generalized Lyapunov function Liénard-type nonlinear system which is important as a representative system expressing LRC electric circuits and mechanical spring systems etc., has been constructed using the Lagrange-Charpit method. The function includes particular nonlinear terms as arbitrary functions, by which the quadratic term appeared in the Luré-type Lyapunov function can be extended. The result yields all conventionl Lyapunov functions as special cases, changing the forms of the arbitrary functions. To investigate the relation between the arbitrary function in the Lyapunov function and the stabilty region obtained, the stabilty boundaries for various types of the arbitrary functions are illustrated in the application to the simple system. In addition, numerical values of time derivative of the Lyapunov function along the stability boundary are carlculated to study the relation between the stability region and the values of time derivative.

key words : Lienrd-type nonlinear systems, Lagrange-Charpit method, Stability, Lyapunov function

1. 緒　言

非線形システムのリアプノフ関数構成法にはポポフの条件から導かれる安定条件と等価な結果を与えるルーリエ形リアプノフ関数を得るポポフの方法[1]や級数近似によらない一般化された Zubov 法[2]などがある。しかしながら，ポポフの方法は適用システムがいわゆる非線形フィードバック制御システムに限られ，独特な非線形項を有する Liénard 形システムにただちに応用することはできない。また，一般化された Zubov 法では Zubov の偏微分方程式に現われるスカラー関数を求めるための変換式を見い出すのは容易ではない。一方，文献3の可変勾配法は，リアプノフ関数の勾配 $\partial V/\partial \mathbf{x}$ を最初に選定し，リアプノフ関数を構成する方法であるが，選定された勾配の各成分の係数を決めた後，リアプノフ関数の時間導関数や得られたリアプノフ関数の安定条件を繰り返し調べる必要がある。

1個の簡単な Liénard 形非線形システムいわゆる Liénard の方程式[4]に対しては，これまで幾つかのリアプノフ関数[1),2),5),6)]が報告されているが，本論文では，はじめに，それらのリアプノフ関数をすべて包含する任意関数を含む一般化リアプノフ関数[1]を文献6で提案されたグランジュ・シャルピ法を用いて構成

* 機械工学科
College of Technology, Dai-Ichi University
**琉球大学工学部（〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町字千原1）
Faculty of Engineering Ryukyu University

する。この手法によれば，リアプノフ関数の時間導関数を任意に選べる利点がある。その任意関数の傾きがある値より小さくなるように選ぶことによって，これまで報告されているリアプノフ関数をすべて得ることができる。また，選ばれたそれぞれの任意関数に対するリアプノフ関数が保証する漸近安定領域は異なるので，その任意関数とリアプノフ関数が保証する漸近安定領域の関係を考察する。さらに，得られた漸近安定領域とその境界上におけるリアプノフ関数の時間微分値の関係も考察する。そして，おのおののリアプノフ関数が与える漸近安定領域とリアプノフ関数のしきい値との関係も考察する。

2．Liénard 形非線形システム

Liénard の方程式を一般化した Liénard 形非線形システムは，次式で与えられる。

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \tag{1}$$

ただし，$\mathbf{y}$ は n 次元ベクトルであり，$\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})$，$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{B}^T\mathbf{y}$，$\mathbf{f}^T(\boldsymbol{\sigma}) = [f_1(\sigma_1),\ f_2(\sigma_2),\ \cdots,\ f_m(\sigma_m)]$，$\mathbf{G}(\mathbf{y})$（$>0$）はある行列 $\mathbf{D}(n\times m)$，$\mathbf{B}(n\times m)$ を用いて，

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{D}\begin{bmatrix} g_1(\sigma_1) & & & \\ & g_2(\sigma_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_m(\sigma_m) \end{bmatrix}\mathbf{B}^T$$

$$= \mathbf{D}\,\{\mathrm{diag}[g_i(\sigma_i)]\}\,\mathbf{B}^T$$

と書けるものとする。

また，非線形関数 $g_i(\sigma_i)$，$f_i(\sigma_i)$ は連続で微分可能な関数であり，次の性質を満足するものとする。

Ⅰ．$\sigma_i \neq 0$ に対し，$g_i(\sigma_i) > 0$

Ⅱ．$\sigma_i \neq 0$ に対し，$\sigma_i f_i(\sigma_i) > 0$

Ⅲ．$|\sigma_i| \to \infty$ のとき $|\phi_i(\sigma_i)| \to \infty$

ただし

$$\phi_i(\sigma_i) = \int_0^{\sigma_i} g_i(\sigma_i)\,d\sigma_i$$

次に，$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1$，$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x}_2$ と置き換えて(1)式を次式の連立方程式に変形する。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{h}(0) = 0) \tag{2}$$

ここで，$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{\mathbf{x}}_1^T, \dot{\mathbf{x}}_2^T]$，$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T]^T$ とする。ただし

$$\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}]^T$$
$$\mathbf{h}_i = [h_{i1}, h_{i2}, \cdots, h_{in}]^T$$

3．ラグランジュ・シャルピ法

ラグランジュ・シャルピ法によれば，リアプノフ関数 V は偏微分方程式

$$F(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}) = \mathbf{P}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{3}$$

を解くことによって求められる。ここで，$\mathbf{P} = \partial V/\partial \mathbf{x} = [\mathbf{P}_1^T, \mathbf{P}_2^T]^T$，$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T]^T$，$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ であり，$\psi(=-\dot{V})$ は任意の非負値関数である。また $\mathbf{P}_i = [P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{in}]^T$ である。

(3)式を解くことは困難なので，解き易くするため次の特性微分方程式を考える。

$$\frac{dx_{11}}{\frac{\partial F}{\partial P_{11}}} = \cdots = \frac{dx_{1n}}{\frac{\partial F}{\partial P_{1n}}} = \frac{dx_{21}}{\frac{\partial F}{\partial P_{21}}} = \cdots = \frac{dx_{2n}}{\frac{\partial F}{\partial P_{2n}}}$$
$$\frac{-dP_{11}}{\frac{\partial F}{\partial x_{11}} + P_{11}\frac{\partial F}{\partial V}} = \cdots = \frac{-dP_{1n}}{\frac{\partial F}{\partial x_{1n}} + P_{1n}\frac{\partial F}{\partial V}}$$
$$\frac{-dP_{21}}{\frac{\partial F}{\partial x_{21}} + P_{21}\frac{\partial F}{\partial V}} = \cdots = \frac{-dP_{2n}}{\frac{\partial F}{\partial x_{2n}} + P_{2n}\frac{\partial F}{\partial V}} \tag{4}$$

このとき $\partial F/\partial x_{11}$，$\partial F/\partial x_{12}$，$\cdots$，$\partial F/\partial x_{2n}$ はそれぞれ $\partial\psi/\partial x_{11}$，$\partial\psi/\partial x_{12}$，$\cdots$，$\partial\psi/\partial x_{2n}$ を含む。

もし(4)式により少なくとも $\mathbf{P}$ の一つの成分を含む $2n-1$ 個の式

$$\left.\begin{aligned} &Z_1(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}, \partial\psi/\partial\mathbf{x}) = 0 \\ &Z_2(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}, \partial\psi/\partial\mathbf{x}) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Z_{2n-1}(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}, \partial\psi/\partial\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

が導出されるならば，未知関数 $\partial\psi/\partial\mathbf{x}$，$\psi$ は次のヤコビの括弧式が零になる条件を満足し，かつ ψ が非負値関数となるよう決定される。

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=1}^{2}\left(\left[\frac{dZ_i}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial Z_m}{\partial \mathbf{P}_k} - \left[\frac{dZ_i}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{P}_k}\right) = 0$$
$$[Z_i, F] = \sum_{k=1}^{2}\left(\left[\frac{dZ_i}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}_k} - \left[\frac{dF}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{P}_k}\right) = 0 \tag{6}$$

ここで，$i, j, = 1, 2, \cdots, 2n-1, i\neq j$ であり

$$\frac{dZ_i}{d\mathbf{x}_k} = \frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{x}_k} + \mathbf{P}_k\frac{\partial Z_i}{\partial V} \tag{7}$$

である。

ψ が決定されたあと，もし(3), (5)式から

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, V) \tag{8}$$

として求められるならば

$$P^T dx = (\nabla V)^T dx \tag{9}$$

は積分可能であり，リアプノフ関数Vとその時間微分 dV/dt は

$$V(x) = \int_0^x P^T dx \tag{10}$$

$$\dot{V}(x) = -\psi(x)$$

として与えられる。この時点でVはリアプノフの条件を満たしているものとする。

4．Liénard 方程式の一般化リアプノフ関数

(1)式の簡単な例として，次の Liénard の方程式を考える。

$$\ddot{y} + g(y)\dot{y} + f(y) = 0 \tag{11}$$

上式を $y = x_1$，$\dot{y} = x_2$ と置き換えて(2)式の形に書き直せば

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g(x_1)x_2 - f(x_1) \end{bmatrix} \tag{12}$$

となる。

そこで，リアプノフ関数の構成法の一つであるラグランジュ・シャルピ法を用い，一般化リアプノフ関数Vを(3)式の偏微分方程式を用いて求める。このとき(4)式の特性微分方程式は $\partial F/\partial V = 0$ となるので

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{x_2} &= \frac{dx_2}{-g(x_1)x_2 - f(x_1)} \\ &= \frac{dP_1}{\{g'(x_1)x_2 + f'(x_1)\}P_2 - \partial\psi/\partial x_1} \\ &= \frac{dP_2}{g(x_1)P_2 - P_1 - \partial\psi/\partial x_2} \end{aligned} \tag{13}$$

となる。ただし，$f'(x_1) = df(x_1)/dx_1$, $g'(x_1) = dg(x_1)/dx_1$ である。(13)式より2個の偏微分方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &Z_1 = \alpha\phi(x_1) + \beta x_2 - P_2 = 0 \\ &Z_2 = \alpha\phi'(x_1)x_2 - \beta\{g(x_1)x_2 + Pf(x_1)\} \\ &\qquad -g(x_1)P_2 + P_1 + \partial\psi/\partial x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ここで，α，β は任意定数，$\phi(x_1)$ は任意関数，$\phi'(x_1) = d\phi(x_1)/dx_1$ である。これまで，$\phi(x_1)$ は x_1 の一次関数で表わされていたが，ここでは $\phi(x_1)$ を任意関数と置くことにより，x_1 の一次関数以外の形もとることができる。

次に，F と Z_1, Z_2 に対して(6)式を適用すれば，

$$[Z_1, Z_2] = 2\{\beta g(x_1) - d\phi'(x_1)\} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2} = 0 \tag{15-a}$$

$$[Z_2, F] = \{\alpha\phi''(x_1) - \beta g'(x_1)\}x_2^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}x_2 - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \alpha\{\phi(x_1)f'(x_1) + \phi'(x_1)f(x_1)\} = 0 \tag{15-b}$$

が導かれる。ただし $f'(x_1) = df(x_1)/dx_1$, $\phi''(x_1) = d\phi'(x_1)/dx_1$ である。

上式より ψ を決定すれば

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 2\{\beta g(x_1) - \alpha\phi'(x_1)\}x_2 + \Phi(x_1) \\ &\psi = \{\beta g(x_1) - \alpha\phi'(x_1)\}x_2^2 + \Phi(x_1)x_2 \\ &\qquad + \alpha\phi(x_1)f(x_1) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

となる。ここで $\Phi(x_1)$は任意関数であるり，

$$\beta g(x_1) - \alpha\phi'(x_1) > 0,\ \alpha f(x_1)\phi(x_1) > 0 \tag{17}$$

を満足するものとする。

そこで，ψ を平方形にするように $\Phi(x_1)$を

$$\Phi(x_1) = -2\sqrt{K(x_1)\alpha\phi(x_1)f(x_1)} \tag{18}$$

ただし，$K(x_1) = \beta g(x_1) - \alpha - \phi'(x_1)$

に選べば，ψ は次式のようになる。

$$\psi = [\sqrt{(x_1)K}x_2 - \sqrt{\alpha\phi(x_1)f(x_1)}]^2 \tag{19}$$

ここで，$K(x_1) = \beta g(x_1) - \alpha\phi'(x_1)$。

また，(14)，(15)式の関数を用いて

$$\left.\begin{aligned} &P_1 = \alpha g(x_1)\phi(x_1) + \alpha\phi'(x_1) + \beta f(x_1) \\ &\quad + 2\sqrt{K(x_1)\alpha\phi(x_1)f(x_1)} \\ &P_2 = \alpha\phi(x_1) + \beta x_2 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

を得る。ここで，得られるリアプノフ関数の形を整えるため，$\alpha = 1, \beta = 1$ と置き換え，上式に(10)式を適用して，次の一般化リアプノフ関数Vを得る。

$$\begin{aligned} V = &\frac{1}{2}\{x_2 + \phi(x_1)\}^2 + \int_0^{x_1} f(x_1)dx_1 \\ &+ \int_0^{x_1}\phi(x_1)K(x_1)dx_1 \\ &+ 2\int_0^{x_1}\sqrt{\phi(x_1)K(x_1)f(x_1)}dx_1 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\dot{V} = -\psi = -[\sqrt{K(x_1)}x_2 - \sqrt{\phi(x_1)f(x_1)}]^2 \tag{22}$$

ここで，(17)式より $\phi(x_1)$と $K(x_1)$は条件

$$\left.\begin{aligned} &f(x_1)\phi(x_1) > 0 \qquad (x_1 \neq 0) \\ &K(x_1) = g(x_1) - \phi'(x_1) \geqq 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

を満足するものとする。

つぎに V の正定値性について証明する。(21)式の V における右辺第2項以下の項の和を V_0 とおけば，

$$V_0 = \int_0^{x_1} H(x_1)dx_1 \tag{24}$$

ただし

$$H(x_1) = \phi(x_1)K(x_1) + f(x_1) + 2\sqrt{\phi(x_1)K(x_1)f(x_1)} \tag{25}$$

と書くことができ，さらに(25)式は

$$H(x_1) = \begin{cases} [\sqrt{\phi(x_1)K(x_1)} + \sqrt{f(x_1)}]^2 & (x_1 \geqq 0) \\ [\sqrt{-\phi(x_1)K(x_1)} - \sqrt{-f(x_1)}]^2 & (x_1 < 0) \end{cases} \tag{26}$$

の形で変形できるので，$x_1H(x_1) \geqq 0$ が成り立つ領域内において V_0 は正の値をとる。従って V は正定数となる。また，(21)式のリアプノフ関数 V がこれまで報告されているリアプノフ関数の一般形となっていることを示すため，任意関数 $\phi(x_1)$ を次のように選ぶ。すなわち，$\phi_1 = 0$ とおくとよく知られた次式のエネルギー関数となる。

$$V = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f(x_1)dx_1 \equiv V_1 \tag{27}$$

次に

$$\phi = \int_0^{x_1} g(x_1)dx_1 \equiv \Gamma(x_1) \quad (\equiv \phi_2)$$

とおくと

$$V = \frac{1}{2}\{x_2 + \Gamma(x_1)\}^2 + \int_0^{x_1} f(x_1)dx_1 \equiv V_2 \tag{28}$$

となり Zubov 法の方法によって得られる結果[2]と一致する。また，$\phi = \eta\Gamma(x_1)(\equiv \phi_3)$（$\eta$：定数，$0 \leqq \eta \leqq 1$）とおくと

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\{x_2 + \eta\Gamma(x_1)\}^2 + \int_0^{x_1} f(x_1)dx_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta(1-\eta)\Gamma^2(x_1) \\ &\quad + 2\sqrt{\eta(1-\eta)}\int_0^{x_1}\sqrt{g(x_1)\Gamma(x_1)f(x_1)}\,dx_1 \\ &\equiv V_3 \end{aligned} \tag{29}$$

となり，宮城・谷口[6]らの結果と一致する。さらに，$\phi = \lambda(x_1)\Gamma(x_1)(\equiv \phi_4)$（$\lambda(x_1) \geqq 0$ が条件(23)式を満足するような関数）とおけば

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\{x_2 + \lambda(x_1)\Gamma(x_1)\}^2 + \int_0^{x_1} f(x_1)dx_1 \\ &\quad + \int_0^{x_1} \lambda(x_1)\Gamma(x_1)K(x_1)dx_1 \\ &\quad + 2\int_0^{x_1}\sqrt{\lambda(x_1)\Gamma(x_1)K(x_1)f(x_1)}\,dx_1 \\ &\equiv V_4 \end{aligned} \tag{30}$$

となり，川本らの結果[5]と一致する。

そして，(27)〜(29)式における $\phi_i(i=1\sim4)$ は(23)式の条件を満足するように選んだものであり，その形以外の例として任意関数 ϕ_i を次のように選ぶ。すなわち，$\phi = g(x_1)\tanh(x_1)(\equiv \phi_5)$。このように(21)式の V がこれまで報告されているリアプノフ関数の一般形となっていることがわかる。

5．任意関数と漸近安定領域

(23)式の条件を満足するように選ばれた任意関数 ϕ_i に対するリアプノフ関数 V_i が与える漸近安定領域はそれぞれ異なる。そこで，異なる任意関数 ϕ_i とリアプノフ関数 V_i が与える漸近安定領域との関係を考察するために，任意関数 ϕ_i $(i = 1, 2, \cdots, 5)$ を Fig. 1 に示し，その ϕ_i に対する V_i が与える漸近安定領域を Fig. 2 に示す。このとき，(11)式のシステムにおいて $g(x_1) = D$ とおき，$D = 0.3$, $f(x_1) = \sin(x_1 + \delta) - \sin\delta(\delta = 0.412)$ とした。さらに，おのおのの V_i が保証する漸近安定領域の境界上における時間導関数 $\dot{V}_i$ の値を求めた結果を Fig. 3 に示した。

Fig. 1 と Fig. 2 からわかるように，第一，第三象限に存在する任意関数 ϕ の選び方によって漸近安定領域は変化し，直線である ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が与えるリアプノフ関数よりも，むしろひずんだ ϕ_4, ϕ_5 が与えるそれぞれのリアプノフ関数の保証する漸近安定領域が広い

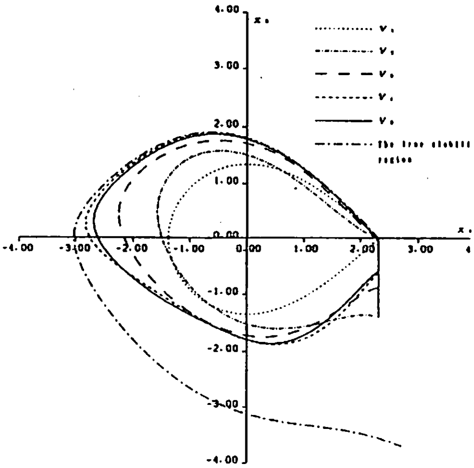

Fig. 1 Asymptotic stability regions

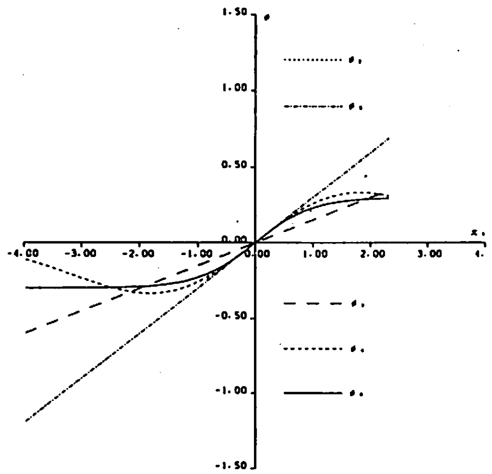

Fig. 2 Arbitrary functions $\phi(x_1)$

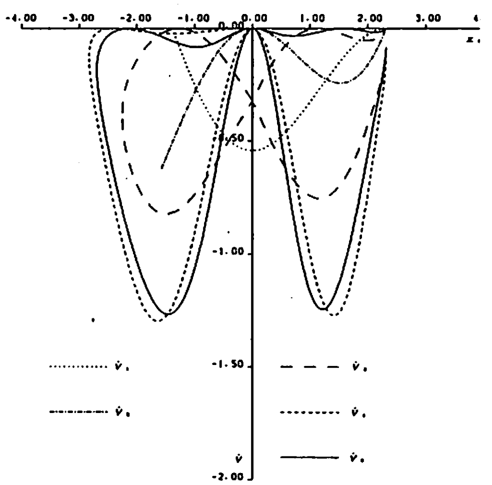

Fig. 3 Values of $\dot{V}$ on the asymptotic stability regions

ことがわかる。また，Fig. 3 から，漸近安定領域の境界が真の安定領域の境界に近接するほど，リアプノフ関数の時間微分値が 0 に近いことがわかる。これは，真の安定境界がシステムの解曲線の一つであり，$\dot{V}(x) = 0$ となるリアプノフ関数 V がシステムの解と密接な関係にあると思われるからである。したがって，広い漸近安定領域を得るためには，リアプノフ関数の時間微分値が 0 になるように任意関数 ϕ を選ぶようにするとよい。

6. Liénard 形非線形システムのリアプノフ関数

ここでは，4 節と同様な手法を用い，それらを包含する一般化リアプノフ関数 V を(3)式を用いて求める。このとき(4)式の特性方程式は$\partial F/\partial V = 0$ となるので

$$\begin{aligned}\frac{dx_{11}}{h_{11}(x)} = \cdots = \frac{dx_{1n}}{h_{1n}(x)} = \frac{dx_{21}}{h_{21}(x)} = \cdots = \frac{dx_{2n}}{h_{2n}(x)}\\ = \frac{-dP_{11}}{\partial F/\partial x_{11}} = \cdots = \frac{-dP_{1n}}{\partial F/\partial x_{1n}}\\ = \frac{-dP_{21}}{\partial F/\partial x_{21}} = \cdots = \frac{-dP_{2n}}{\partial F/\partial x_{2n}}\end{aligned} \tag{31}$$

となり，これより 2n 個の偏微分方程式

$$\left.\begin{aligned}&Z^1 = \alpha\mathbf{D}\{\mathrm{diag}[\phi_i(\sigma_i)]\}\,\mathbf{1} + \beta\mathbf{x}_2 - \mathbf{P}_2 = 0\\ &Z^2 = \alpha\boldsymbol{\Phi}'(\sigma)\mathbf{x}_2 - \beta\{\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 + \mathbf{Bf}(\sigma)\}\\ &\qquad + \mathbf{P}_1 - \mathbf{G}(\mathbf{x}_1)\mathbf{P}_2 + \partial\psi/\partial\mathbf{x}_2 = 0\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

を得る。ここで，$Z^1 = [Z_1, Z_2, \cdots, Z_n]^T$, $Z^2 = [Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots, Z_{2n}]^T$, α, β は任意定数，$\mathbf{1}$ はすべての要素を 1 とする列ベクトルであり，

$$\boldsymbol{\Phi}'(\sigma) = \mathbf{D}\{\mathrm{diag}[\phi_i'(\sigma_i)]\}\mathbf{B}^T$$
$$\phi_i'(\sigma_i) = d\phi_i(\sigma_i)/d\sigma_i$$

である。次に，F と Z^1, Z^2 に対して(6)式を適用すれば

$$[Z^1, Z^2] = 2\{\beta\mathbf{G}(\mathbf{x}_1) - \alpha\boldsymbol{\Phi}'(\sigma)\} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{x}_2^2} = 0$$

$$\begin{aligned}[Z^2, F] = &\begin{bmatrix}\mathbf{x}_2^T\left[\alpha\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}'(\sigma)}{\partial x_{11}} - \beta\dfrac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)}{\partial x_{11}}\right]\mathbf{x}_2\\ \mathbf{x}_2^T\left[\alpha\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}'(\sigma)}{\partial x_{12}} - \beta\dfrac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)}{\partial x_{12}}\right]\mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_2^T\left[\alpha\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}'(\sigma)}{\partial x_{1n}} - \beta\dfrac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)}{\partial x_{1n}}\right]\mathbf{x}_2\end{bmatrix}\\ &+ \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{x}_1\partial\mathbf{x}_2}\mathbf{x}_2 - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}_1}\\ &+ \alpha\frac{\partial[\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)]}{\partial\mathbf{x}_1} = 0\end{aligned} \tag{33}$$

が導かれる。ただし，$[Z^1, Z^2]$，$[Z^2, F]$ は次のように表せるものとする。

$$\left.\begin{aligned}&[Z^1, Z^2] \equiv \begin{bmatrix}Z_{n+1}, Z_1 & \cdots & Z_{n+1}, Z_n\\ \vdots & & \\ Z_{2n}, Z_1 & \cdots & Z_{2n}, Z_n\end{bmatrix}\\ &[Z^2, F] \equiv \begin{bmatrix}[Z_{n+1}, F]\\ \vdots\\ [Z_{2n+1}, F]\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

上式より ψ を決定すれば

$$\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{x}_2}2\{\beta\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)-\alpha\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{\sigma})\}\mathbf{x}_2+\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_1)$$

$$\begin{aligned}\psi &= \mathbf{x}_2^T\{\beta\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)-\alpha\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{\sigma})\}\mathbf{x}_2+\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}^T\mathbf{x}_2\\ &\quad+\alpha\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)\\ &=\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T\{\mathrm{diag}[\beta g_i(\sigma_i)-\alpha\phi_i'(\sigma_i)]\}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\\ &\quad+\boldsymbol{\Omega}^T(\mathbf{x}_1)\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\alpha\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)\end{aligned} \tag{35}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_1)$ は任意ベクトル関数であり，

$$\beta g_i(\sigma_i)-\alpha\phi_i'(\sigma_i)>0,\ \alpha\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)>0 \tag{36}$$

を満足するものとする。

そこで，ψ を平方形にするように $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_1)$ を

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_1)=\begin{bmatrix}-2\sqrt{K_1(\sigma_1)\alpha\lambda_1\phi_1(\sigma_1)f_1(\sigma_1)}\\ -2\sqrt{K_2(\sigma_2)\alpha\lambda_2\phi_2(\sigma_2)f_2(\sigma_2)}\\ \vdots\\ -2\sqrt{K_m(\sigma_m)\alpha\lambda_m\phi_m(\sigma_m)f_m(\sigma_m)}\end{bmatrix} \tag{37}$$

ただし，$K_i(\sigma_i)=\beta g_i(\sigma_i)-\alpha\phi_i(\sigma_i)$

に選定すれば，ψ は次式のようになる。

$$\psi=\sum_{i=1}^{m}\left[\sqrt{K_i(\sigma_i)}\,\dot{\sigma}_i-\sqrt{\alpha\lambda_i\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)}\right]^2 \tag{38}$$

また，(32)，(33)式の関係を用いて

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1&=\alpha\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)\mathbf{D}\{\mathrm{diag}[\phi_i(\sigma_i)]\}\,1+\alpha\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{x}_2\\ &\quad+\beta\mathbf{B}\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})-\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{P}_2&=\alpha\mathbf{D}\{\mathrm{diag}[\phi_i(\sigma_i)]\}\,1+\beta\mathbf{x}_2\end{aligned} \tag{39}$$

を得る。ここで，得られるリアプノフ関数の形を整えるため $\alpha=1,\beta=1$ と置き換え，上式の(10)式を適用して次式の一般化リアプノフ関数Vを得る。

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}\{\mathbf{x}_2+\mathbf{D}\{\mathrm{diag}[\phi_i(\sigma_i)]\}\,1\}^T\{\mathbf{x}_2+\mathbf{D}\{\mathrm{diag}[\phi_i(\sigma_i)]\}\,1\}\\ &\quad+\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i}\lambda_iK_i(\sigma_i)\phi_i(\sigma_i)d\sigma_i+\int_0^{\sigma}\mathbf{f}^T(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma}\\ &\quad+2\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i}\sqrt{\lambda_iK_i(\sigma_i)\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)}\,d\sigma_i\end{aligned} \tag{40}$$

また，その時間導関数は

$$\dot{V}=-\sum_{i=1}^{m}[\sqrt{K_i(\sigma_i)}\,\dot{\sigma}_i-\sqrt{\lambda_i\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)}]^2 \tag{41}$$

となる。ここで，$\phi_i(\sigma_i)$ は任意関数，(36)式より $\phi_i(\sigma_i)$ と $K_i(\sigma_i)$ は条件

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_i\phi_i(\sigma_i)>0\quad(\sigma_i\neq 0)\\ &K_i(\sigma_i)=g_i(\sigma_i)-d\phi_i(\sigma_i)/d\sigma_i\geqq 0\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

を満足するものとする。

次に，Vの正定値性について証明する。(40)式のVにおける右辺第2項以下の項の和を V_0 と置けば

$$V_0=\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i}H_i(\sigma_i)d(\sigma_i) \tag{43}$$

と書くことができる。ここで

$$\begin{aligned}H_i(\sigma_i)&=\lambda_iK_i(\sigma_i)\phi_i(\sigma_i)+f_i(\sigma_i)\\ &\quad+\sqrt{\lambda_iK_i(\sigma_i)\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)}\end{aligned} \tag{44}$$

である。さらに $H_i(\sigma_i)$ は

$$H_i(\sigma_i)=\begin{cases}[\sqrt{\lambda_i\phi_i(\sigma_i)K_i(\sigma_i)}+\sqrt{f_i(\sigma_i)}]^2 & (\sigma_i\geqq 0)\\ -[\sqrt{-\lambda_i\phi_i(\sigma_i)K_i(\sigma_i)}-\sqrt{-f_i(\sigma_i)}]^2 & (\sigma_i<0)\end{cases} \tag{45}$$

の形に変形できるので，$\sigma_iH_i(\sigma_i)\geqq 0$ が成り立つ領域内において V_0 は正の値をとる。従ってVは定値となる。また，得られた(40)式のリアプノフ関数Vにおいて，任意関数 $\phi_i(\sigma_i)$ を次のように選ぶと

$$\phi_i(\sigma_i)=\alpha'\int_0^{\sigma_i}g_i(\sigma_i)d\sigma_i\qquad(0\leqq\alpha'\leqq 1)$$

宮城[7]らの結果と一致する。これより，$\mathbf{D}^T\mathbf{B}=\mathrm{diag}[\lambda_i]$（$\lambda_i$：正の定数），$\mathbf{D}=\mathbf{B}$ を満足する(1)式のシステムに対して，(40)式のVがこれまで報告されているリアプノフ関数の一般形となっていることがわかる。

7．例題システムへの適用

ここでは，文献7において $\mathbf{D}^T\mathbf{B}=\mathrm{diag}[\lambda_i]$（$\lambda_i$：正の定数），$\mathbf{D}=\mathbf{B}$ を満足する $\mathbf{y}$ が二次ベクトルである次のシステムを考える。

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{y}_1+\{g_1(\sigma_1)+g_2(\sigma_2)\}\dot{y}_1+\{g_1(\sigma_1)-g_2(\sigma_2)\}\dot{y}_2\\ &\quad+f_1(\sigma_1)-f_2(\sigma_2)=0\\ &\ddot{y}_2+\{g_1(\sigma_1)+g_2(\sigma_2)\}\dot{y}_1+\{g_1(\sigma_1)-g_2(\sigma_2)\}\dot{y}_2\\ &\quad+f_1(\sigma_1)-f_2(\sigma_2)=0\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

ただし，$\sigma_1=y_1+y_2,\sigma_2=y_2-y_1$ である。

上式を(1)式の形に書き改めると

$$\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1(\sigma_1)&0\\0&g_2(\sigma_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(\sigma_1)\\ f_2(\sigma_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{47}$$

となるので

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

が成立することがわかる。したがって，(40)式から導かれるリアプノフ関数は次式のようになる。

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2}\Big\{&[x_{21} + \phi_1(\sigma_1) - \phi_2(\sigma_2)]^2 + [x_{22} + \phi_1(\sigma_1) \\ &+ \phi_2(\sigma_2)]^2\Big\} \\ &+ 2\Big\{\int_0^{\sigma_1} K_1(\sigma_1)\phi_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} K_2(\sigma_2)\phi_2(\sigma_2)d\sigma_2\Big\} \\ &+ \int_0^{\sigma_1} f_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} f_2(\sigma_2)d\sigma_2 \\ &+ 2\Big\{\int_0^{\sigma_1}\sqrt{2K_1(\sigma_1)\phi_1(\sigma_1)f_1(\sigma_1)}\,d\sigma_1 \\ &+ \int_0^{\sigma_2}\sqrt{2K_2(\sigma_2)\phi_2(\sigma_2)f_2(\sigma_2)}\,d\sigma_2\Big\} \end{aligned} \tag{48}$$

また，(48)式の時間導関数を求めると

$$\begin{aligned} \dot{V} = -\Big\{&[\sqrt{K_1(\sigma_1)}\,\dot{\sigma}_1 - \sqrt{2\phi_1(\sigma_1)f_1(\sigma_1)}\,]^2 \\ &+ [\sqrt{K_2(\sigma_2)}\,\dot{\sigma}_2 - \sqrt{2\phi_2(\sigma_2)f_2(\sigma_2)}\,]^2\Big\} \end{aligned} \tag{49}$$

となる。

8．結　言

本論文では，Liénard 形非線形システムの一般化リアプノフ関数をラグランジュ・シャルビ法を用いて構成した。その一般化リアプノフ関数に含まれる任意関数とその任意関数が与えるリアプノフ関数が保証する漸近安定領域の関係も考察した。リアプノフ関数が保証する漸近安定領域は任意関数の選び方によって変化し，直接的な任意関数が与えるリアプノフ関数よりもひずんだ任意関数が与えるリアプノフ関数の方がより広い漸近安定領域を保証することがわかった。また，漸近安定領域の境界上におけるリアプノフ関数の時間微分値を求め，時間微分値の小さい方より真に近い安定領域を与えていることも示した。さらに，リアプノフ関数のしきい値が大きい方がより広い漸近安定領域を得る一つの目安となることも示した。

参考文献

1) M. A. Pai, M. Ananda Mohan and J. Gopala : IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, PAS-89-5, 788／794 (1970)
2) F. S. Prabhakara, A. H. El-Abiad, and A. J. Koivo : INT. J. CONTROL, vol. 20, No.2, 203／212 (1974)
3) D. G. Schultz, J. E. Gibson : Trans. AIEE, Vol. 81, pt. II, pp.203／210 (1962)
4) J. ラサール, S. レフシェッツ；山本稔訳：産業図書, 17／65 (1975)
5) S. Kawamoto, A. Ishigami, T. Imoto and T. Taniguchi : Trans. I. E. E. of Japan, Vnl. 109, NO. 3／4, 38／39 (1989)
6) H. Miyagi and T. Taniguchi : INT. J. Control, vol. 32, No. 2, 371／379 (1980)
7) 宮城・宮城：日本機械学会論文集［C］, 109／113 (1990)