未知の非線形フィードバックシステムの安定パターン類別

宮城　雅夫＊　　宮城　隼夫＊＊

Stable Pattern Classification of Unknown Nonlinear-Feedback Systems

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

In the stability studies of nonlinear control systems, it is important for system designers to overcome the characteristics of system nonlinearities. The nonlinearities play significant roles for maintaining stabitity, and thus, it is also important for constructing appropriate Lyapunov functions of the system. This paper presents a method of classifying stable patterns for systems with unknown nonlinearities. Classification based on the Luré-type nonlinear system is carried out, by using the robust perturbation technique. In this paper, unknown nonlinearities are regarded as the nonlinear perturbations of nominally stable Luré-type systems and nonlinear patterns are determined so that the robustness of perturbed system keeps. Stability theorems for giving stabe patterns of several nonlinearities are derived. In deriving those theorems, the positive realness of the transfer function and the Luré-type Lyapunov function are well utilized.

Key Words：Pattern classification, Nonlinear perturbation, Robustness, Lyapunov Method

1．緒　言

著者らはこれまで，リアプノフ法の実用化をめざし，各種特定の非線形システムのリアプノフ関数を構成し報告してきた[1~4]が，非線形性の取扱いに多大な労力を費やしてきた経緯がある。一連の研究を通して判明したことは，安定な工学システムに現れる非線形性にはある種のパターンが存在することである。

一方，摂動法を用いた最適制御システムの構築も活発に研究されており[5]，ロバスト安定性の解析では伝達関数の摂動分からシステムのロバスト性能を引き出す手法がよく用いられている[5,6]。

工学システムに現れる非線形性は，多くの場合，線形システムに付加された形で与えられる。そこで本論では，非線形性を線形システムにおける非線形パラメータ摂動とみなし，この摂動の許容範囲から非線形関数の安定パターンを導出する。安定はノミナルシステムにある非線形摂動が加わっても元のシステムが安定性を保ち続けるかどうかは一種のロバスト安定性の問題と考えることができる。したがってここでは，システムがロバスト安定を保つための非線形摂動の範囲をロバスト摂動と呼び，摂動範囲を求める手法すなわちロバスト摂動法を提案する。

本研究では，このロバスト摂動法によって任意の非線形フィードバックシステムのパターン類別を行い，類別された非線形関数の性質を利用して，システムの設計やリアプノフ関数構成を容易にすることを目的とする。まず，工学的によく知られた一般ルーリエ形非線形システムや積形非線形システムの独特な非線形を簡単な線形システムの非線形摂動としてとらえ，ノミナルな線形システムのロバスト安定条件から非線形関数のパターン類別を行う。同様な手法により，工学分野で頻出するシステムの非線形性を，安定性を保持するためのパターンに分類していく。

＊　機械工学科
College of Technology, Dai-Ichi University
＊＊　琉球大学工学部（〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原1）
Faculty of Engineering, Ryukyu University

2．問題の設定

非線形システムを非線形フィードバックシステムとと考え，このフィードバックに一般性をもたせた次のシステムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B\varphi \\ u &= C^T x \\ v &= D^T x \\ \varphi &= -\xi(u,v) \end{aligned} \qquad (1)$$

ただし，(1)式において

x：n 次元状態変数ベクトル

u,v：k 次元出力変数ベクトル

A：n × n の安定な定数行列

B,C,D：適合する次元行列

φ：k 次元非線形フィードバックベクトル

である。また，(1)式のシステムのブロック線図は，Fig. 1によって示される。

非線形フィードバックを線形システムの摂動とみなしてロバスト解析を行なうために (1)式を次の２つの式に変形する。

$$\dot{x} = A^u x \qquad (2)$$

$$\dot{x} = A^v x \qquad (3)$$

ただし，(2)，(3)式において

$$A^u = A - B\phi^u C^T$$

$$A^v = A - B\phi^v D^T$$

$$\phi^u = \phi^d (U^d)^{-1}$$

$$\phi^v = \phi^d (V^d)^{-1}$$

となり，(1)式において ϕ^u と ϕ^v は，非線形摂動項となる。本論では，添字 d はベクトルの対角行列化を意味し，例えばベクトル y と対角行列 Y^d の関係は

$$Y^d I = y$$

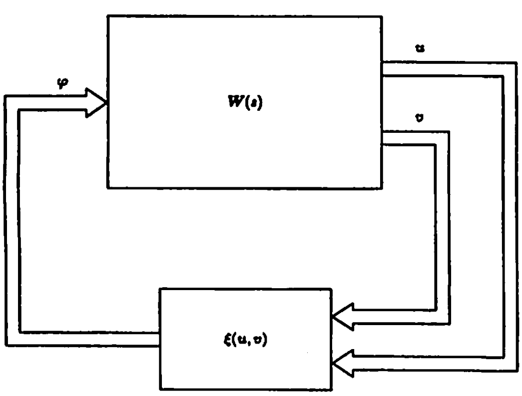

Fig. 1　Multiple Nonlinear Feedback System

で与えられる。ただし，I は全ての要素が１であるベクトルを示し，また，ベクトルの要素は k 個あるものとする。

(2) 式は u を出力とみなす場合であり，このとき $\varphi,-u$ 間の線形部分の伝達関数行列 $W_{1(s)}$ は，

$$W_{1(s)} = C^T(sI - A)^{-1} B \qquad (4)$$

として与えられ，一方，(3)式は v を出力とみなす場合であり，$\varphi,-v$ 間の線形部分の伝達関数行列 $W_{2(s)}$ は

$$W_{2(s)} = D^T(sI - A)^{-1} B \qquad (5)$$

となり，平衡点は $x=0$ となる。本論文では $W_{1(s)}$ と $W_{2(s)}$ は k × k の行列であり，それぞれ

$$W_{1(\infty)} = 0,\ W_{2(\infty)} = 0 \qquad (6)$$

を満足し，(1)式は $W_{1(s)}$，$W_{2(s)}$ の最小実現であるものとする。

3．非線形フィードバックシステムの安定性

まず，Anderson の結果[7]にしたがって，次の定理が得られる。

【定理１】

もし，(4)式で与えられる伝達関数行列 $W_{1(s)}$ が正実ならば，次式を満足する実行列 P，L が存在する。ただし，P は実対称正定行列である。

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -LL^T \\ PB &= C \end{aligned} \qquad (7)$$

【定理２】

もし，(5)式で与えられる伝達関数行列 $W_{2(s)}$ が正実ならば，次式を満足する実行列 P，L が存在する。ただし，P は実対称正定行列である。

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -LL^T \\ PB &= D \end{aligned} \qquad (8)$$

ここで，次の条件 I を満足するとき $W_{(s)}$ は正実行列となる。

(条件 I)

i)　$W_{(s)}$ の要素は $Re_{(s)} \geq 0$ に対して解析的である。

ii)　$W^*_{(s)} = W_{(s^*)}$

iii)　$W_{(s)} + W^T_{(s^*)}$ は，$Re_{(s)} \geq 0$ に対して半正定値となる。

ただし，* は共役を表している。

次に，各種非線形フィードバックをもつシステムに対して安定定理を導く。

3.1　$\xi(u,v) = f(u)$ で与えられるシステム

このシステムは，多次元ルーリエ形非線形フィードバックシステムに相当し，このシステムに対し，次の安定定理を導くことができる。

【定理3】

もし，伝達関数行列 $W_{1(S)}$ が正実ならば，次式を満足する $f(u)$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$u^T f(u) \geq 0 \tag{9}$$

《定理3の証明》

定理3は次の2次形式のリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x \tag{10}$$

(10)式の時間導関数を求め，さらに(7)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T L L^T x - u^T f(u) \tag{11}$$

となる。このとき，$f(u)$ が(9)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}$ は半負定値となる。また，$W_{1(S)}$ が正実行列なので P は定理1により，(7)式を満足する実対称正定行列であることから V は正定値であることが保証される。したがって，リアプノフの定理に従い，(1)式のシステムは原点近傍において安定である。なお，この場合 $W_{2(S)}$ の正実性はうまく適合せず，$W_{2(S)}$ を用いて安定定理を導くことは困難である。

3.2 $\xi(u,v) = V^d g(u)$ で与えられるシステム

これは，フィードバック要素が出力変数ベクトル要素と非線形関数の積で表されるシステムであり，このシステムに対しては，伝達関数行列 $W_{2(S)}$ の正実性がうまく適合し，$W_{1(S)}$ の正実性はうまく適合しないので，$W_{2(S)}$ について安定定理を導くことができる。

【定理4】

もし，伝達関数行列 $W_{2(S)}$ が正実ならば，次式を満足する $g(u)$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$g_i(u_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{12}$$

《定理4の証明》

(10)式で与えられる二次形式を考えると，その時間導関数 $\dot{V}$ は(8)式の関係を用いて

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T L L^T x - v V^d g(u) \tag{13}$$

となる。このとき，非線形フィードバック $V^d g(u)$ が(12)式で満足するパターンであれば，$\dot{V}$ は半負定値となるので，リアプノフの定理に従い，システム(1)は安定となる。

3.3 $\xi(u,v) = U^d u$ で与えられるシステム

これは，非線形フィードバックベクトルの要素が u_i^2 で表されるシステムであり，このような出力変数ベクトル要素の平方で表されるシステムに対しては，次の安定定理を導くことができる。

【定理5】

もし，伝達関数行列 $W_{1(S)}$ が正実ならば，次式を満足する u のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{14}$$

《定理5の証明》

これには，(10)式で与えられる二次形式のリアプノフ関数の存在によって証明される。その時間導関数を求め，(7)式の関係の用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T L L^T x - \sum_{i=1}^{k} u_i^2 \tag{15}$$

となる。このとき非線形フィードバック $U^d u$ が(14)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}$ は半負定値となる。したがって，リアプノフの定理により，(1)式のシステムは安定となる。

3.4 $\xi(u,v) = U^d v$ で与えられるシステム

これは，非線形フィードバックベクトルの要素が $u_i v_i$ で表され，このようなフィードバック要素が，出力変数ベクトル要素の積の形で表されるシステムに対しては $W_{1(S)}$ と $W_{2(S)}$ について，2つの安定定理を導くことができる。

【定理6】

もし，伝達関数行列 $W_{1(S)}$ が正実ならば，次式を満足する v のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{16}$$

【定理7】

もし，伝達関数行列 $W_{2(S)}$ が正実ならば，次式を満足する u のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{17}$$

《定理6，7の証明》

この2つの定理も，(10)式のリアプノフ関数の存在によって証明できる。その時間導関数を求め，(7)，(8)式の関係を用いて整理すると，それぞれ

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T L L^T x - \sum_{i=1}^{k} v_i u_i^2 \tag{18}$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T L L^T x - \sum_{i=1}^{k} u_i v_i^2 \tag{19}$$

となる。ここで，(18)式は非線形フィードバック $U^d v$ が(16)式を満足するパターンで半負定値が保証され，

(19) 式は$U^d u$が (17) 式を満足するパターンで半負定値が保証される。したがってリアプノフの安定定理に基づき，(1) 式のシステムは原点近傍において安定となる。

3.5　$\xi(u,v)=H(v)^d f(u)$で与えられるシステム

このシステムに対しては，非線形フィードバック要素は$h_i(v_i) f_i(u_i)$で表される。この様にフィードバック要素が非線形関数の積で表されるシステムに対しては，伝達関数行列$W_{1(s)}$，$W_{2(s)}$について，２つの安定定理を導くことができる。

【定理８】

もし，伝達関数行列$W_{1(s)}$が正実ならば，次式を満足する$f(u)$，$h(v)$のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\begin{aligned} u_i f_i(u_i) &\geq 0 \\ h_i(v_i) &\geq 0 \end{aligned} \quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{20}$$

【定理９】

もし，伝達関数行列$W_{2(s)}$が正実ならば，次式を満足する$f(u)$，$h(v)$のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\begin{aligned} f_i(u_i) &\geq 0 \\ v_i h_i(v_i) &\geq 0 \end{aligned} \quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{21}$$

《定理８，９の証明》

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として(10)式を用いる。まず，定理８に対して (10)式の時間導関数を求め，(7)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T LL^T x - \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(u_i) h_i(v_i) \tag{22}$$

となる。このとき，非線形フィードバック$H(v)^d f(u)$が (20)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}$は半負定値となることが保証される。

次に，定理９に対して (10)式の時間導関数を求め，(8)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T LL^T x - \sum_{i=1}^{k} v_i h_i(v_i) f_i(u_i) \tag{23}$$

となる。$H(v)^d f(u)$が (21) 式を満足するパターンに対して$\dot{V}$は半負定値となる。

また定理８，９において，それぞれ$W_{1(s)}$，$W_{2(s)}$が正実行列であると仮定しているので，Pが定理７，定理８より実対称正定行列であることから (10式のVは正定値となる。したがって，リアプノフの定理によりシステム（1）は安定である。

４．例題システムへの適用

ここでは，ロバスト摂動法により導かれた定理３～９による非線形関数のパターン類別を例題システムに適用し，定理の有効性を示す。ここでは，次式で与えられる積形非線形システムを考える。

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \varphi \\
u &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \\
v &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \ , \varphi = H(v)^d f(u)
\end{aligned} \tag{24}$$

このとき，$W_{1(s)} = C^T(sI-A)^{-1}B$は

$$W_{1(s)} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s(s+3)} & 0 & -\frac{s+1}{s(s+3)} \\ 0 & \frac{s+1}{s(s+4)} & \frac{s+1}{s(s+4)} \\ -\frac{s+1}{s(s+3)} & \frac{s+1}{s(s+4)} & \frac{s+1}{s(s+3)}+\frac{s+1}{s(s+4)} \end{bmatrix} \tag{25}$$

となり，(25)式は正実関数行列であることから，(7)式を満足する実対称行列P，実行列Lが存在し，これらの値を求めると次のようになる。

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

ここで，非線形関数$\xi(u,v)=H(v)^d f(u)$のタイプであることから，定理７を適用することにより (20)式を満足する$f(u)$，$h(v)$のパターンに対して (1)式のシステムは安定となる。

なお，本例題ではリアプノフ関数を

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \tag{27}$$

とおけば，(27)式の時間導関数は

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} x - \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(u_i) h_i(v_i) \tag{28}$$

となる。(28)式の右辺第一項目は半不定値であり，右

辺第二項は明らかに(20)式を満足する $H(v)^d f(u)$ のパターンに対して半負定値となるので，定理8が正しいことがわかる。

また、$W_{2(s)}=D^T(sI-A)^{-1}B$ は

$$W_{2(s)}=\begin{bmatrix} \frac{s+2}{s(s+3)} & 0 & -\frac{s+2}{s(s+3)} \\ 0 & \frac{s+2}{s(s+4)} & \frac{s+2}{s(s+4)} \\ -\frac{s+2}{s(s+3)} & \frac{s+2}{s(s+4)} & \frac{s+2}{s(s+3)}+\frac{s+2}{s(s+4)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

となり，(29)式は正実関数行列であることから，(8)式を満足する実対称行列 P，実行列 L が存在し，これらの値を求めると次のようになる。

$$P=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

ここで，定理8を適用することにより，(21)式を満足する $f(u)$，$h(v)$ のパターンに対して(1)式のシステムは安定となる。

なお，本例題ではリアプノフ関数を

$$V(x)=\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}x \quad (31)$$

とおけば，(31)式の時間導関数は

$$\dot{V}(x)=-\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}x-\sum_{i=1}^{k} v_i f_i(u_i) h_i(v_i) \quad (32)$$

となる。(32)式の右辺第一項目は半不定値であり，右辺第二項は明らかに(21)式を満足する $H(v)^d f(u)$ のパターンに対して半負定値となるので，定理9が正しいことがわかる。

5．結言

本論文では，工学上頻出する非線形システムを安定性の確保の立場からパターン類別し，システムが安定になるための非線形関数の条件を導出した。ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数以外の非線形関数を安定なルーリエ形線形システムの摂動とみなしてロバスト摂動法により任意の非線形システムの安定パターン類別を行なった。非線形関数の制約条件は定理の形で与えたが，この制約条件すなわち安定パターンさえわかれば任意の非線形関数をもつシステムの設計やリアプノフ関数構成が可能となり，解析も容易になる。本論文の特長は各種の非線形関数を安定パターンに類別できるロバスト摂動法を提案し，非線形システムの設計や安定性の解析を容易にしたところにある。

文　献

1) 宮城（雅）・宮城（隼），機論，56-529，C(1990)，109-113.

2) Miyagi,N. and Miyagi,H.,ASME DS,109-4(1987),410-413.

3) Miyagi,N. and Miyagi,H.,ASME DS,113-3(1991),531-534.

4) 宮城（雅）・宮城（隼），機論，58-548，C(1993),47-53.

5) 伊藤，ロバスト制御の理論と応用，コンピュートロール,(1986),4-8，コロナ社。

6) Doyle,J.C.，ほか2名，(藤井監訳)，フィードバック制の理論,(1994),54-75，コロナ社。

7) B.D.O.Anderson,J. of the Franklin Inst.Vol.282, No.3,pp.155-160,1966.