ロバスト摂動法による多次元非線形システムの安定解析

宮城　雅夫*　　宮城　隼夫**

Robust Perturbation Technique for Analyzing Unknown Nonlinear Systems

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

This paper presents a pattern classification technique for systems with arbitrary nonlinearties. Classification is carried out by using the rabust nonlinear–perturbation technique. In the techiqne, stable system. Stability theorems for the pattern classification of several nonlinear feedbacks are derived. In these theorems, the positive realness of the transfer function and the quadratic–type Lyapunov functinon are utilized.

Key Words : Pattern classification, Nonlinear Perturbation, Robust Stability, Lyapunov Method

1．緒　言

本研究では，非線形システムの非線形性を線形システムの摂動ととらえ，ロバスト摂動法により任意の非線形システムの安定パターン類別を行ない，類別された非線形関数の性質を利用してシステムのリアプノフ関数構成を容易にすることを目的とする。まず，工学的によく知られた一般ルーリエ形非線形システムの独特な非線形を簡単な線形システムの非線形摂動としてとらえ，線形システムのロバスト安定条件から非線形関数のパターン類別を行なう。同様な手法により，工学分野で頻出するシステムの非線形を，安定性を保持するためのパターンに分類していく。なお，ロバスト安定条件の導出にはリアプノフ法を用いるが，非線形フィードバックのないシステムが線形システムになることから，状態変数の二次形成で与えられるリアプノフ関数を基盤に解析をすすめていく。さらに，これらの結果を例題システムに適用する。

いくつかの工学の問題では，ルーリエのセクター条件を満足する従来の非線形関数と，それ以外の非線形関数の和で与えられる複合形非線形システムがより，このシステムの安定性に関してはいくつかの研究結果が報告されている。本論文では，この複合形非線形システムに対し，ルーリエのセクター条件を満足する非線形関数以外の非線形関数を，工学的によく知られた一般ルーリエ形非線形システムの摂動ととらえ，ロバスト摂動法により任意の非線形システムの安定パターン類別を行なう。ロバスト安定条件の導出にはリアプノフ法を用いるが，ルーリエ形非線形システムを基盤に解析をすすめていくために，ルーリエ形リアプノフ関数を用いる。

2．問題の設定

非線形システムを非線形フィードバックシステムと考え，このフィードバックに一般性をもたせた次のシステムを考える。

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\phi \\
\mathbf{u} &= \mathbf{C}^T\mathbf{x} \\
\mathbf{v} &= \mathbf{D}^T\mathbf{x} \\
\phi &= -\xi(\mathbf{u},\mathbf{v})
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ただし，(1)式において，

x：n 次元状態変数ベクトル
u,v：k 次元出力変動ベクトル
A：n×n の安定な定数行列
B,C,D：適合する次元行列
ϕ：k 次元非線形フィードバックベクトル

*　機械工学科
College of Technology, Dai–Ichi University
**琉球大学工学部（〒903-0129　沖縄県中頭郡西原町字千原１）
Faculty of Engineering, Ryukyu University

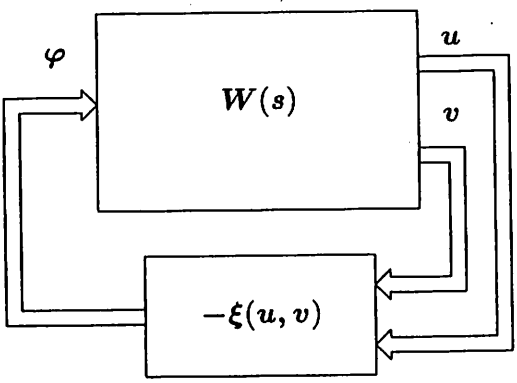

Fig 1 Nonlinear Feedback System

である。また，(1)式のシステムのブロック線図は Fig 1によって示される。

非線形フィードバックを線形システムの摂動とみなしてロバスト解析を行なうために，(1)式を次の２つの式に変形する。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{u}\mathbf{x} \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{v}\mathbf{x} \tag{3}$$

ただし，(2), (3)式において，

$$\mathbf{A}^{u} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}^{u}\mathbf{C}^{T}$$
$$\mathbf{A}^{v} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}^{v}\mathbf{D}^{T}$$
$$\boldsymbol{\Phi}^{u} = \boldsymbol{\Phi}^{d}(\mathbf{U}^{d})^{-1}$$
$$\boldsymbol{\Phi}^{v} = \boldsymbol{\Phi}^{d}(\mathbf{V}^{d})^{-1}$$

となり，(1)式において $\boldsymbol{\Phi}^{u}$ と $\boldsymbol{\Phi}^{v}$ は，非線形摂動項となる。また，添字 d はベクトルの対角行列を意味し，例えばベクトル y と対角行列 $\mathbf{Y}^{d}$ の関係は

$$\mathbf{Y}^{d}\mathbf{1} = \mathbf{y} \tag{4}$$

で与えられる。ただし，**1** は全ての要素が１であるベクトルを示し，ベクトルの要素はK個あるものとする。

(2)式は u を出力とみなす場合であり，このときの ϕ −u 間の線形部分の伝達関数行列 $\mathbf{W}_1(s)$ は，

$$\mathbf{W}_1(s) = \mathbf{C}^{T}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{5}$$

として与えられる。一方，(3)式は v を出力とみなす場合であり，ϕ−v 間の線形部分の伝達関数行列 $\mathbf{W}_2(s)$ は，

$$\mathbf{W}_2(s) = \mathbf{D}^{T}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{6}$$

となり，平衡点はそれぞれ，x = 0 となる。本論文では $\mathbf{W}_1(s)$ と $\mathbf{W}_2(s)$ は K×K の行列であり，それぞれ，

$$\mathbf{W}_1(\infty) = 0 \qquad \mathbf{W}_2(\infty) = 0 \tag{7}$$

を満足し，(1)式は $\mathbf{W}_1(s)$，$\mathbf{W}_2(s)$ の最小実現でするものとする。

３．非線形フィードバックシステムの安定性

ここでは，フィードバックのないシステムが線形システムになることに着目し，二次形式で与えられるリアプノフ関数を基盤にロバスト摂動法を用いてシステムが安定パターンをもつための非線形関数 $\xi(u,v)$ の制約条件を導出する。

【定理１】

(A, B, C) が(5)式で与えられる伝達関数行列 $\mathbf{W}_1(s)$ の最小実現であるとし，$\mathbf{W}_1(s)$ が正実行列なら次式を満足する実行列 **P, L** が存在する。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A} &= -\mathbf{L}\mathbf{L}^{T}\\ \mathbf{P}\mathbf{B} &= \mathbf{C}\end{aligned}\right. \tag{8}$$

ただし，**P** は実対称正定行列である。

【定理２】

(A, B, C) が(6)式で与えられる伝達関数行列 $\mathbf{W}_2(s)$ の最小実現であるとし，$\mathbf{W}_2(s)$ が正実行列なら次式を満足する実行列 **P, L** が存在する。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A} &= -\mathbf{L}\mathbf{L}^{T}\\ \mathbf{P}\mathbf{B} &= \mathbf{D}\end{aligned}\right. \tag{9}$$

ただし，**P** は実対称正定行列である。

ここで，次の条件を満足するとき W(s) は正実行列となる。

［条件１］

i）W(s) の要素は $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ に対して解析的である。

ii）$\mathbf{W}^{*}(s) = \mathbf{W}(s^{*})$

iii）$\mathbf{W}(s)+\mathbf{W}^{T}(s^{*})$ は，$\mathrm{Re}(s) \geq 0$ に対して半正定値となる。

ただし，* は共役を表している。

３－１．ルーリエ形非線形フィードバックシステム

ここでは，非線形関数 $\xi(u,v) = f(u)$ で与えられるシステムに対して安定定理を導く。

【定理３】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $\mathbf{W}_1(s)$ が正実行列であり，次式を満足する f(u) のパターンに対して(1)式のシステムは安定である。

$$\mathbf{u}^{T}\mathbf{f}(\mathbf{u}) \geq 0 \tag{10}$$

■

《定理３の証明》

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として，次の二次形式を用いる。

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{T}\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{11}$$

(11)式の時間導関数を求め，さらに(8)式の関数を用いて整理すれば，

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T LL^T x - u^T f(u) \tag{12}$$

となる。このとき，非線形フィードバック $f(u)$ が(10)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}(x)$ は半負定値となることが保証される。したがって，$V(x) > 0$ となり，リアプノフの定理に基づき，(1)式の原点近傍における安定性が保証できる。

3－2．出力変数ベクトルの平方形フィードバック

非線形関数 $\xi(u,v) = U^d u$ で与えられるシステムに対して安定定理を導く。

【定理4】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $W_1(s)$ が正実行列であり，次式を満足する u のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{13}$$

■

《定理4の証明》

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として，(11)式の二次形式を用いる。(11)式の時間導関数を求め，(8)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T LLx - \sum_{i=1}^{k} u_i^3 \tag{14}$$

となる。このとき，非線形フィードバック $U^d u$ が(13)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}(x)$ は半負定値となることが保証される。したがって，$V(x) > 0, \dot{V}(x) \leq 0$ となり，リアプノフの定理に基づき，(1)式のシステムは安定である。

3－3．2出力変数ベクトルの積形フィードバック

ここでは，非線形関数 $\xi(u,v) = U^d v$ で与えられるシステムに対して安定定理を導く。

【定理5】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $W_1(s)$ が正実行列であり，次式を満足する v のパターンに対して(1)式のシステムは安定である。

$$v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{15}$$

■

【定理6】

(6)式で与えられる伝達関数行列 $W_2(s)$ が正実行列であり，次式を満足する u のパターンに対して(1)式のシステムは安定である。

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{16}$$

■

《定理5，定理6の証明》

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として，(11)式の二次形式を用いる。(11)式の時間導関数を求め，(8)式および(9)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T LL^T x - \sum_{i=1}^{k} v_i u_i^2 \tag{17}$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T LL^T x - \sum_{i=1}^{k} u_i v_i^2 \tag{18}$$

となる。これらは，非線形フィードバック $U^d v$ が(15)式，$U^d u$ が(16)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}(x)$ は半負定値となることが保証される。したがって，$V(x) > 0, \dot{V}(x) \leq 0$ となり，リアプノフの定理に基づき，(1)式のシステムの原点近傍の安定性が保証される。

3－4．出力変数ベクトルと非線形関数の積形フィードバック

非線形関数 $\xi(u,v) = V^d g(u)$ で与えられるシステムに対し，安定定理を導く。

このようなシステムに対しては，$W_1(s)$ はうまく適合しないが，$W_2(s)$ についてはうまく適合する。したがって $W_2(s)$ について定理を導く。

【定理7】

(6)式で与えられる伝達関数行列 $W_2(s)$ が正実行列であり，次式を満足する $g(u)$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$g_i(u_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{19}$$

■

《定理7の証明》

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として，(11)式の二次形式を用いる。(11)式の時間導関数を求め，(9)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T LL^T x - V^T V^d g(u) \tag{20}$$

となる。このとき，非線形フィードバック $V^T V^d g(u)$ が(19)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}(x)$ は半負定値となることが保証される。また，$W_2(s)$ が正実行列であると仮定しており，P が正定対称実行列であることから，$V(x)$ の正定値性が保証される。したがって，(1)式のシステムは原点近傍で安定となる。

3－5．2非線形関数の積形フィードバック

非線形関数 $\xi(u,v) = H(v)^d f(u)$ で与えられるシス

テムに対して，伝達関数行列 $\mathbf{W}_1(s),\mathbf{W}_2(s)$ の２つの安定定理を導く。

【定理８】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $\mathbf{W}_1(s)$ が正実行列であり，次式を満足する $\mathbf{f(u)},\mathbf{h(v)}$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$u_if_i(u_i) \geq 0$$
$$h_i(v_i) \geq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{21}$$

■

【定理９】

(6)式で与えられる伝達関数行列 $\mathbf{W}_2(S)$ が正実行列であり，次式を満足する $\mathbf{(u)},\mathbf{h(v)}$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\left.\begin{array}{l} f_i(u_i) \geq 0 \\ v_ih_i(v_i) \geq 0 \end{array}\right. \quad (i=1,2,\cdots k) \tag{22}$$

■

《定理８，定理９の証明》

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として，(11)式の二次形式を用いる。(11)式の時間導関数を求め，(8)式および(9)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{LL}^T\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} u_if_i(u_i)h_i(v_i) \tag{23}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{LL}^T\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} v_ih_i(v_i)f_i(u_i) \tag{24}$$

となる。このとき，非線形フィードバック $\mathbf{H(v)}^d\mathbf{f(u)}$ が(21)式および(22)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}(\mathbf{x})$ は半負定値となることが保証される。また，$\mathbf{W}_1(s),\mathbf{W}_2(s)$ が正実行列と仮定しているので，$\mathbf{P}$ は(8)式，(9)式を満足する正定対称実行列である。したがって，$V(\mathbf{x})$ の正定性が保証される。ゆえに $V(\mathbf{x})>0,\dot{V}(\mathbf{x})\leq 0$ となるので，(1)式のシステムは安定となる。

４．例題システムへの適用

前節では，各種非線形関数に対して，システムが安定パターンをもつための非線形関数 $\xi(u,v)$ の制約条件を導出した。ここでは，前節で導いた定理を例題システムに適用する。

次式によって表されるルーリエ形非線形システムを考える。

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{y}_1+2\dot{y}_1+f(y_1+\dot{y}_1-y_2-\dot{y}_2)=0 \\ \ddot{y}_2+3\dot{y}_2-f(y_1+\dot{y}_1-y_2-\dot{y}_2)=0 \end{array}\right. \tag{25}$$

$\mathbf{x}^T=[x_1,x_2,x_3,x_4]=[y_1,\dot{y}_1,y_2,\dot{y}_2]$ とおき，(25)式を(1)式の形式に書き換えると

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\psi \tag{26}$$
$$u = [1 \quad 1 \; -1 \; -1]\,\mathbf{x}$$
$$\psi = f(u)$$

このとき，$\mathbf{W}_1(s)=\mathbf{C}^T(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ は

$$W_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} + \frac{s+1}{s(s+3)} \tag{27}$$

となる。(27)式は正実関数であることから，(8)式を満足する実対称行列 $\mathbf{P}$，実行列 $\mathbf{L}$ が存在し，実際にこれらの値を求めると，次式のような結果を得る。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

非線形関数 $\xi(u,v)=f(u)$ のタイプであることから，定理３を適用することにより，(10)式を満足する $\mathbf{f(u)}$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定となる。なお，本例題ではリアプノフ関数を

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{30}$$

とおき，(30)式の時間導関数を求めると，

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} - uf(u) \tag{31}$$

となる。(31)式の右辺第１項は半負定値となり，右辺第２項は明らかに，(10)式を満足する $\mathbf{f(u)}$ のパターンに対して半負定値となるので，定理３が正しいことがわかる。

5．結　言

本論文では工学上頻出するフィードバック要素が多次元で与えられる一般非線形システムの安定性の確保の立場から非線形関数のパターン類別を行なった。非線形関数の制約条件は定理の形で与えたが，この制約条件，すなわち安定パターンさえわかれば，任意の非線形関数をもつシステムのリアプノフ関数構成が容易になる。

参考文献

1）宮城・宮城，機論，58-548，C (1993)，47-53
2）伊藤，ロバスト制御の理論と応用(1986)，コロナ社
3）Doyle, J.C., ほか2名，(藤井監訳)，フィードバック制御の理論，(1994)，54-75，コロナ社