

ロバスト摂動法による非線形システムの逐次安定性解析

宮城 雅夫* 宮城 隼夫**

Successive Stability Analysis of Nonlinear Systems Using Robust Perturbation Method

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

Nonlinear systems appeared in the engineering field are often formulated by mixing dynamic equations, electrical relations, input-output relations of control quantities, etc. System equations are tangled with various nonlinearities from these, and they look quite complicated. For this reason, it is not easy to find out Lyapunov functions for the packaged system.

On the other hand, It is well known that the stability of dynamic system has close relation with energy change in the whole system. State variables on higher energy level influence on the system stability heavily.

In this paper, a technique for studying stability of the complicated system is presented. In the technique, the system equations are classified into some stages, according to the energy level of the state variables. That is, the group of state variables which affect system stability most of all is treated first, while the other variables are regarded as constants or zero. Lyapunov's stability theorem is applied to the basic system. Then, the secondary important variables are revived. Regarding these variables as the perturbation of the basic system, the robust stability analysis is carried out. Successive achievements of these procedures finally enables us to accomplish stability analysis of the whole system.

Key Words: Nonlinear Feedback System, Robust Perturbation Method, Stability Lyapunov Method

1. 緒 言

工学システムの状態方程式は、多くの場合、バネ、クレーン、回転機などの力学系、キルヒホフの法則から導かれる電気系、それに状態量を制御するための制御系などが入り交じった複雑な式となる。この複雑に絡み合った非線形性のため、システムの安定性の解析も容易ではなく、これまで常に研究対象として取り上げられてきている。リアプノフの安定論は、非線形システムを非線形のまま取り扱える有望な手法として注目され、これまで多くの研究がなされてきた。しかしながら、未だに現実システムの運用・監視に取り入れ

られるに至っていない。これは、リアプノフの理論がリアプノフ関数と呼ばれる評価関数の存在を通してシステムの安定性を論じ、工学技術者が最も関心のあるリアプノフ関数の構成法について何らの議論がなされていないことによる。

1960年代後半からリアプノフ関数の構成法や、特定のシステムを対象としたリアプノフ関数などが報告され始めたが、リアプノフ関数を構成する一般的手法は未だに確立されていない。リアプノフ関数構成を数学的に見た場合、微分方程式の解を求めることに相応し、非線形微分方程式の一般的解法が確立されていないことと密接な関係がある。リアプノフ関数はまた、システムの全エネルギーとも関係が深く、数学的、物理的な見地からリアプノフ関数構成法が模索されてきた経緯がある。

筆者らはこれまで、工学分野で頻出する非線形システムを対象にリアプノフ関数を構成し報告してきた

* 機械工学科

College of Technology, Dai-Ichi University

** 琉球大学工学部 (〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原1)
Faculty of Engineering Ryukyu University

が¹⁾、研究を通してわかったことは、システムの要素要素を表現する非線形性にはある種の安定パターンがあり、リアプノフ関数を構成するにはこのパターンを把握する必要があることである。さらに最近の研究で、このパターンは摂動法によりある安定なシステムのロバスト安定条件として導けることが判明している。

そこで本研究では、一見複雑に見えるシステムの物理的関係に着目することによって、力学系、電気系、制御系などに大きく分類し、これをシステム全体のエネルギーに大きく影響する順に階層化する。すなわち、エネルギー量の大きい状態量群でまず基本システムを構成し、他の状態量は零、もしくは定数として、リアプノフの安定論により安定性の解析を行う。次に、2番目に大きく影響する系の状態量群を復活し、これを基本システムの摂動とみなして、摂動が発生した場合のロバスト安定性の解析を行う。ロバストでない場合には、摂動によって何らかのシステムエネルギー変動が生じたものと考え、この変動エネルギーについて解析を行う。これとは別に、ロバスト解析により、摂動に連動する非線形要素の安定パターンが得られれば、この摂動システムのリアプノフ関数も容易となる。

これを逐次繰り返して行けば、最終的に全システムの安定性の解析を行うことができる。

2. システムの記述

本論文で対象とする工学システムは以下のように記述することができる。

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、ベクトル X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ、力学系、電気系、制御系などの状態量群のうちどちらか一つを表す。(1)式のシステムの状態量群のエネルギーレベルが X_1, X_2, \dots, X_n の順であると仮定すると、解析の順序図は次のようになる。

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2^0, \dots, X_n^0) \quad \text{基本システム}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n^0) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_n^0) \end{aligned} \right\} \text{第2次システム}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \right\} \text{第n次システム}$$

ただし、添え字“0”は平衡点における値を表す

Fig. 1 システム解析の流れ

3. ロバスト摂動法による安定性の解析

基本システムは安定であり、非線形ベクトル要素 f_1 の安定パターンが判明して、システムのエネルギーが得られたものとする。このエネルギーをリアプノフ関数とすれば、リアプノフ関数は次のように $\dot{X}_1, f_1(X_1)$ の汎関数で得られる。

$$V_1(X_1) = F_1(X_1, f_1) > 0 \quad (2)$$

(2)式が力学的エネルギーなら、その時間導関数は散逸エネルギー R の逆符号の2倍

$$\dot{V}_1(X_1) = -2R(X_1, f_1) < 0 \quad (\text{あるいは} \leq 0) \quad (3)$$

与えられることがわかっており²⁾、散逸エネルギーは正定値あるいは半正定値なので、時間導関数は負定値あるいは半負定値となる。

状態 X_2 が復活して第2次システムになると、(3)式の時間導関数が

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(X_1, X_2) &= -2R(X_1, f_1) \\ &\quad + \Phi(X_1, X_2, f_1, f_2) \end{aligned} \quad (4)$$

となり、 Φ の性質によっては、必ずしも(2)式のエネルギーでシステムのロバスト安定性が保証されるとは限らない。そこで本報告では、この原因を X_2 復活による(2)式のエネルギー変動のためとみなし、変動後のエネルギー

$$\begin{aligned} V_2(X_1, X_2) &= F_1(X_1, f_1) \\ &\quad + \Delta F_1(X_1, X_2, f_1, f_2) \end{aligned} \quad (5)$$

を考える。すなわち、エネルギーの増減 ΔF_1 は V_2 の時間導関数が負定値（あるいは半負定値）になるように定められる。もし ΔF_1 を適切に定めることができれば V_2 は第2次システムのエネルギーであるとする。

順次これを繰り返していくと、最終的には第 n 次システム（最終システム）のエネルギーは

$$\begin{aligned} V_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ = F_{n-1}(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) \\ + \Delta F(X_1, X_2, \dots, X_n, f_1, f_2, \dots, f_n) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、これがリアプノフの条件

- (i) V_n は X_1, X_2, \dots, X_n に関しては連続な一階偏導関数をもつスカラ関数
- (ii) $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$ のとき $V_n = 0$, $\dot{V}_n = 0$
- (iii) (ii) 以外の X_1, X_2, \dots, X_n に対し, $\dot{V}_n < 0$ (あるいは ≤ 0)

を満たせば全システムの安定性を保証することができる。

4. 鎖交磁束変化および調速機効果を考慮した回転機システムの安定性

鎖交磁束変化および調速機効果を考慮した回転機（同期機）システムは次式で表される^{5),6),7)}。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Dx_2 - \{K(x_3 + e)\sin(x_1 + \delta_n) - (P_1 - x_1)\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\eta_1 x_3 - \eta_2 g(x_1) \\ \dot{x}_4 &= \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_4 \end{aligned}$$

ただし、 $g(x_1) = \cos \delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0)$, x_1, x_2, x_3, x_4 はそれぞれ、回転機角度相角、回転機角速度、鎖交磁束変化（電圧変化）および調速機効果を表す状態変数、 $D, K, e, \delta_n, P_1, \eta_1, \eta_2, \lambda_1, \lambda_2$ は定数である。

ここで、回転機の力学系を基本システムとすると、状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= Dx_2 - \{Ke \sin(x_1 + \delta_0) - P_1\} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。(8)式の運動エネルギー M は

$$M = \int x_2 dx_2 = \frac{1}{2} x_2^2 \quad (9)$$

位置エネルギー P は

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{x_1} [Ke \sin(x_1 + \delta_0) - P_1] dx_1 \\ &= Ke[\cos \delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0)] - P_1 x_1 \end{aligned} \quad (10)$$

となる。 P は $Ke \sin(x_1 + \delta_0) - P_1$ が第1, 3象限に存在するとき正の値をとる。

リアプノフ関数 V_1 を

$$\begin{aligned} V_1 &= M + P \\ &= \frac{1}{2} x_2^2 + Ke[\cos \delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0)] - P_1 x_1 \end{aligned} \quad (11)$$

とすると、その時間導関数は、

$$\dot{V}_1 = Dx_2^2 = -2R(x_2) \quad (12)$$

となる。ただし、 R は散逸関数である。

次に摂動 x_3 が発生したときの第2次システムは鎖交磁束変化（電気系）を考慮した

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= Dx_2 - [K(x_3 + e)\sin(x_1 + \delta_0) - P_1] \\ \dot{x}_3 &= \eta_1 x_3 - \eta_2 g(x_1) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。(13)式に沿って基本システムのリアプノフ関数(11)式を微分すると

$$\dot{V}_1 = -Dx_2^2 - x_2 [K x_3 \sin(x_1 + \delta_0)] \quad (14)$$

となり、摂動によってシステムの安定性が保証されなくなっている。本論文では、これを x_3 という摂動が発生したことにより、エネルギー変動が生じたものとし、 V_2 を

$$V_2 = V_1 + \Delta F_1(x_1, x_3) \quad (15)$$

で表現する。(15)式の場合

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -Dx_2^2 - x_2 [K x_3 \sin(x_1 + \delta_n) - \frac{\partial \Delta F_1}{\partial x_1}] \\ &\quad + \frac{\partial \Delta F_1}{\partial x_3} [-\eta_1 x_3 - \eta_2 g(x_1)] \end{aligned} \quad (16)$$

となり

$$\frac{\partial \Delta F_1}{\partial x_1} = K x_3 \sin(x_1 + \delta_0) \quad (17)$$

より

$$\Delta F_1 = K x_3 g(x_1) + \Delta F'_1(x_3) \quad (18)$$

が得られる。(17), (18)式を(16)式へ代入すれば

$$\dot{V}_2 = -Dx_2^2 - \frac{K}{\eta_2} \left[\eta_2 g(x_1) + \frac{\eta_2}{K} \frac{\partial \Delta F'_1}{\partial x_3} \right] \left[\eta_1 x_3 + \eta_2 g(x_1) \right] \quad (19)$$

が得られ

$$\frac{\eta_2}{K} \frac{\partial \Delta F'_1}{\partial x_3} = \eta_1 \quad (20)$$

より

$$\Delta F'_1 = \frac{K\eta_1}{2\eta_2} x_3^2 \quad (21)$$

となる。(18), (21)式を(15)式へ代入すれば第2次システムのリアプノフ関数 V_2 は

$$V_2 = \frac{1}{2} x_2^2 + K(e + x_3)g(x_1) - P_1 x_1 + \frac{K\eta_1}{2\eta_2} x_3^2 \quad (22)$$

となり, その時間導関数は

$$\dot{V}_2 = -Dx_2^2 - \frac{K}{\eta_2} [\eta_2 g(x_1) + \eta_1 x_3]^2 \quad (23)$$

となる。

次に, 最終的な調速機 (制御系) を考慮した第3次システムは(7)式で与えられる。第2次システムのリアプノフ関数(22)式を(7)式に沿って時間微分すると

$$\dot{V}_2 = -Dx_2^2 - \frac{K}{\eta_2} [\eta_2 g(x_1) + \eta_1 x_3]^2 - x_2 x_4 \quad (24)$$

となる。すなわち, 摂動 x_4 によってシステムの安定性が保証されなくなっている。この場合のリアプノフ関数は, エネルギー補正を行って

$$V_3 = V_2 + \Delta F_2(x_2, x_4) \quad (25)$$

となる。(25)式の時間導関数は

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -Dx_2^2 - \frac{K}{\eta_2} [\eta_2 g(x_1) + \eta_1 x_3]^2 \\ & + \frac{\partial \Delta F_2}{\partial x_2} [-Dx_2 - K(x_3 + c)\sin(x_1 + \delta_0) \\ & + P_1 - x_4] + \frac{\partial \Delta F_2}{\partial x_4} [\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_4] \end{aligned} \quad (26)$$

となる。 $\frac{\partial \Delta F_2}{\partial x_2} = 0$ とおくと

$$\Delta F_2 = \Delta F'_2(x_4) \quad (27)$$

が得られ, これを(26)式へ代入すると

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -Dx_2^2 - \frac{K}{\eta_2} [\eta_2 g(x_1) + \eta_1 x_3]^2 \\ & - x_2 [x_4 - \lambda_1 \frac{\partial \Delta F'_2}{\partial x_4}] - \frac{\partial \Delta F'_2}{\partial x_4} (\lambda_2 x_4) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。さらに

$$\lambda_1 \frac{\partial \Delta F'_2}{\partial x_4} = x_4 \quad (29)$$

とおくと

$$\Delta F'_2 = \frac{1}{2\lambda_1} x_4^2 \quad (30)$$

が得られ, 最終的に

$$\begin{aligned} V_3 = & \frac{1}{2} x_2^2 + K(e + x_3)g(x_1) - P_1 x_1 \\ & + \frac{K\eta_1}{2\eta_2} x_3^2 + \frac{1}{2\lambda_1} x_4^2 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\dot{V}_3 = -Dx_2^2 - \frac{K}{\eta_2} [\eta_2 g(x_1) + \eta_1 x_3]^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_4^2 \quad (32)$$

を導くことができる。

(31)式は原点近傍でリアプノフの条件を満たし, システムは安定であることが保証される。

5. 結 言

本報告では, 一見複雑に見えるシステムを, 物理的関係に着目することによって, 力学系, 電気系, 制御系などに大きく分類し, これをシステム全体のエネルギーに大きく影響する順に階層化して, 最終的にシステムのリアプノフ関数を得る方法について提案した。すなわち, まずエネルギー量の大きい状態量群で基本システムを構成し, これのエネルギーからリアプノフ関数を得て安定性の解析を行う。次に, 2番目に大きくシステムの振る舞いに影響する状態量群を復活し, これを基本システムの摂動とみなして, 摂動が発生した場合のロバスト安定性の解析を行う。ロバストでな

ロバスト摂動法による非線形システムの逐次安定性解析

い場合には、摂動によって何らかのエネルギー変動が生じたものと考え、この変動エネルギーの求め方について示した。以下同様な手法によって最終的な第 n 次システムのリアプノフ関数を構成することができる。

参考文献

- 1) 宮城・宮城：機論（C編）56巻529号（1990）
- 2) Miyagi, N and Miyagi, H; ASME DS, 113-3 (1991)
- 3) 宮城・宮城：機論（C編）58巻548号（1992）
- 4) 宮城・宮城：機論（C編）62巻598号（1996）
- 5) 宮城・谷口：電学論（B編）97巻5号（1977）
- 6) Miyagi, H, Taniguchi, T; Proc. IEE, 128-3 (1981)
- 7) 宮城：計自学論 17-2 (1981)