ニュートン法によるH∞補償器の計算

出川　喬庸

A Computation of H∞ compensator by Newton Method

Tadayasu DEGAWA

In this report a computation method of constant matrix contained in the H∞ compensator for linear time invariant system are discussed. Its compensator assign H∞ norm of control system using observable outputs from controlled system.

We have already proposed a simultaneous assignment method of H∞ norm and its peak frequency of closed system by state feedback. This report extends that result to a case where some of states are unobservable.

This method is based on H∞ norm computation method using polynomial matrix equation derived from algebraic Ricatti equation for state equation. This polynomial matrix equation gives relation between H∞ norm and system parameters. Because this equation can not be analytically solved at present, recursive computation method developed by Newton are introduced in order to get solution.

In this method H∞ norm assignment by compensator is considered as the inverse of H∞ norm computation. If it is given state equations for controlled system and compensator , then H∞ norm of closed system can be computed. Inversely, if it is given controlled system and H∞ norm, then compensator matrix which assign H∞ norm of closed system can be computed.

Finally, H∞ compensator parameters which assign H∞ norm for closed loop system are computed by the proposed method for the numerical example of the system, and computation steps are demonstrated.

Keywords:linear system, multivariable system, H∞ norm , compensator

1．まえがき

本研究では、線形固定係数の制御対象の観測出力を用いて制御系のH∞ノルムを指定する補償器の定数行列を求めるための計算法を検討する。状態フィードバックによる閉ループ系のH∞ノルムおよびそのH∞ノルムを与える最大特異値のピーク周波数の同時指定については既に検討しており，本研究はその結果を状態変数の一部が観測できない場合に拡張したものである。

本研究の計算法は制御対象の定数行列の条件によらず一様かつ簡単であり，比較的次数の低い制御系を与え，ピーク周波数についても指定できる。ただし，ピーク周波数の指定が意味をもつのはH∞ノルムが割合大きいときであり，H∞ノルムの下限に近づけばピーク周波数を指定していたとしても周波数に無関係に最大特異値が一定になる傾向があるからその意味は失われる。

本研究の補償器による制御系のH∞ノルムの指定は系の状態方程式からH∞ノルムを計算する方法の一つを基にしている。系の状態方程式からH∞ノルムを計算する方法はいろいろあるが，可制御正準系への変換とそれから得られる未知のH∞ノルムを含む多項式行列の方程式を基にする方法を以前に考えた。この方程式で先にH∞ノルムと最大特異値のピーク値を与える周波数を指定して方程式を満たすような補償器の定数行列を求めればよい。ただし，補償器の構造は先に指定しておく。この方程式から，解析的にゲインを求める方法はまだ分からないので，多項式行列の方程式に対するニュートン法による繰り返し計算に頼る。

ニュートン法による繰り返し計算の収束は初期値に依存するため，補償器の定数行列の初期値は制御対象に対する低次元観測器を構成しその推定状態によるフィードバック制御系を構成して求め，そのときの制御系のH∞ノルムと多項式行列から出発して，H∞ノルムを減少させる方向に多項式行列の調整も含めて補償器の定数行列の値を調整する計算を繰り返し行ない，徐々に制御系のH∞ノルムを減少させるという方法をとる。系の数値例について閉ループ系のH∞ノルムが徐々に小さくなるように補償器の定数行列を変化させることができることを確認する。指定できるH∞ノルムの下限は制御対象の定数行列の他に，ピーク周波数を指定し制

御系の固有値に影響を及ぼす多項式行列に左右される。

2．問題の記述

制御対象はつぎの線形固定係数系とする。

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_1 w + B_2 u \quad (1)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (2)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w \quad (3)$$

ここで，$x_p \in R^r$は状態，$w \in R^l$は外部入力，$u \in R^m$は制御入力，$z \in R^q$は評価出力，$y \in R^r$は観測出力，$A_p, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12}, C_2, D_{21}$ はそれぞれ $n \times n, n \times l, n \times m, q \times n, q \times l, q \times m, r \times n, r \times l$ の定数行列である。本研究では $l = m$，$q = r$，(C_2, A_p) は可観測であると仮定する。

補償器はつぎの線形固定係数系とする。

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \quad (4)$$

$$u = C_c x_c + D_c y \quad (5)$$

ここで，$x \in R^{n-r}$は状態，A_c, B_c, C_c, D_c はそれぞれの $(n-r) \times (n-r)$, $(n-r) \times r$, $m \times (n-r)$, $m \times r$ 定数行列である。

外部入力 w と評価出力 z の関係を表す制御系は次の式で表される。

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad (6)$$

$$z = Cx + Dw \quad (7)$$

ここで，$x \equiv \begin{bmatrix} x_p^T & x_c^T \end{bmatrix}^T$，$C \equiv \begin{bmatrix} C_c + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c \end{bmatrix}$，

$$A \equiv \begin{bmatrix} A_p + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \quad B_s \equiv \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}$$

$D_s \equiv D_{11} + D_{12} D_c D_{21}$, (A, B) は可制御であると仮定する。系の伝達行列を $W_s(s)$，H_∞ノルムを $\|W_s\|_\infty$で表す。

w から z までのH_∞ノルムを可能な限り小さくする補償器の定数行列の計算法を導くことが研究の目的である。

3．H_∞ノルムの一計算法

H_∞ノルムの計算はつぎの補題を基にする。

式(6)(7)の系は可制御とし，$\gamma > 0$とする。このとき，$\|W_s\|_\infty \leq \gamma$ であるための必要十分条件は

$$R = \gamma^2 I - D^T D > 0 \quad (8)$$

かつ，リカッチ代数方程式

$$P(A + BR^{-1} D^T C) + (A + BR^{-1} D^T C)^T P + PBR^{-1} B^T P + C^T (I + DR^{-1} D^T) C = 0 \quad (9)$$

を満たす実準正定解が存在することである。

リカッチ方程式(9)はつぎのように変形できる。

$$P(sI - A_0) + (-sI - A_0)^T P - PBR^{-1} B^T P = C^T UC \quad (10)$$

$$\text{ここで，} A_0 \equiv A + BR^{-1} D^T C \quad (11)$$

$$U \equiv A + DR^{-1} D^T \quad (12)$$

符号を反転して左から $R^{-1/2} B^T (-sI - A_0)^{-T}$ を，右から $(-sI - A_0)^{-1} BR^{-1/2}$ を掛け，両辺に I を加え，A_0 と U を元に戻して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} &\left[I + L(-sL - A)^{-1} B\right]^T R \left[I + L(sI - A)^{-1} B\right] \\ &= R - B^T(-sL - A)^{-T} C^T D - D^T C - (sL - A)^{-1} B \quad (13) \\ &- B^T(-sL - A)^{-T} C^T C (sL - A)^{-1} B \end{aligned}$$

$$\text{ここで，} L = -R^{-1} D^T C - R^{-1} B^T P \quad (14)$$

つぎの式が成り立つ。

$$I = B_m^{-1} A(s) G(sI - A)^{-1} B \quad (15)$$

$$\text{ここで，} G \equiv \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots g_m \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m\}$を可制御性指数とし，

$$h_i \equiv \sum_{k=1}^{i} \rho_k \qquad i = 1, 2, \cdots, m \quad (17)$$

$$C_0 \equiv [b_1\ Ab_1 \cdots A^{\rho_1 - 1} b_1\ b_2\ Ab_2 \cdots A^{\rho_2 - 1} b_2 \cdots b_m\ Ab_m \cdots A^{\rho_m - 1} b_m] \quad (18)$$

とするとき，g_i^T はC_0^{-1}の第h_i行ベクトルである。

$$|G(sI - A)^{-1} B| = 1/|sI - A| \quad (19)$$

(15)式を(13)式に代入して整理すると次式を得る。

$$F^T(-s, L_c) RF(s, L_c) = \gamma^2 \Gamma(s, \mu) \quad (20)$$

$$\text{ここで，} F(s, L_c) \equiv B_m^{-1} A(s) + L_c S(s) \quad (21)$$

$$u \equiv 1/\gamma^2 \quad (22)$$

$$L_c \equiv LT^{-1}, \quad C_c \equiv CT^{-1} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(s, \mu) \equiv\ & A^T(-s) B_m^{-T} B_m^{-1} A(s) - \mu \\ & (DB_m^{-1} A(-s) + C_c S(-s))^T (DB_m^{-1} A(s) + C_c S(s)) \end{aligned} \quad (24)$$

$$S(s) \equiv [S_1^T(s) \quad S_2^T(s) \quad \cdots \quad S_m^T(s)]^T \quad (25)$$

$$S_i(s) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & s & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s^{\rho_i - 1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$S_m \equiv \begin{bmatrix} g_1^T A^{\rho 1-1} B \\ g_2^T A^{\rho 1-1} B \\ \cdots \\ g_m^T A^{\rho m-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$A(s) \equiv H(s) + A_m(s) \tag{28}$$

$$H(s) \equiv \begin{bmatrix} s^{\rho 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\rho m} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$A_m(s) \equiv -[(A^T)^{\rho 1} g_1 \quad (A^T)^{\rho 2} g_2 \cdots (A^T)^{\rho m} g_m]^T T^{-1} \tag{30}$$

(20)式で$0 \leq \mu < \mu_c$のとき$|F(s,L)| = 0$がすべての根を左半平面内に持ち，$\mu = \mu_c = 1/\gamma_c^2$のとき，$|F(s,L)| = 0$が虚軸上の根$s = \pm j\omega_c$をもち，他の根を左半平面に持つならば，$\gamma_c$が最大特異値のピーク値（$H_\infty$ノルム）でその周波数は$\omega_c$である。ただし，$\omega_c$は正の実数とする。

4．H_∞ノルムの指定

対象となる系(1)(2)(3)と補償器(4)(5)が与えられると外部入力と評価出力の関係を表す系(6)(7)が決まり，定数行列A, B, C, DとH_∞ノルムの関係式(20)を使ってそのH_∞ノルムを計算することができる。ここでは，対象となる系(1)(2)(3)と外部入力と評価出力の関係を表す系(6)(7)のH_∞ノルムが与えられるものとして，関係式(20)を逆に使って補償器(4)(5)の定数行列A_c, B_c, C_c, D_cを計算する方法を考える。関係式(20)には複雑な形で定数行列A_c, B_c, C_c, D_cが含まれるから，解析的にこれらを求めることは難しい。そこでニュートン法による繰り返し計算を考える。しかしながら，ニュートン法による繰り返し計算の収束は初期値に依存する。しかも初期値の選び方は不明である。そこで，H_∞ノルムの初期値は補償器(4)(5)の定数行列A_c, B_c, C_c, D_cの初期値を適当に選んで安定な系(6)(7)を構成しそのH_∞ノルムを計算することによって求める。そして，定数行列A_c, B_c, C_c, D_cを少しづつ改善して，系(6)(7)のH_∞ノルムを希望する値に次第に近づけていくという方法を採用する。

まず，(20)式をつぎのように書き換える。

$$A^T(-s) B_m^{-T} B_m^{-1} A(s) = \Lambda(s) \tag{31}$$

ここで，

$$\Lambda(s) = F^T(-s) R \mu F(s) + \mu_c (D B_m^{-1} A(s) + C_c S(-s))^T \tag{32}$$

上式を用いて，望む最大特異値のピーク周波数ω_cは$|F(\pm j\omega_c)| = 0$（$|F(s)| = 0$のその他の根の実数部は負）を満足するように多項式行列$F(s)$を選定することによって指定し，H_∞ノルムの値γ_cは$\mu_c \equiv 1/\gamma_c^2$によって指定する。

目的は(31)式を満足する補償器の定数行列A_c, B_c, C_c, D_cを求めることになる。

そのためのニュートン法の繰り返し計算式はつぎのように表される。

$$h_{k+1} = h_k - J^{-1}(h_k) q(h_k) \tag{33}$$

$$J(h_k) \equiv \frac{\partial q(h_k)}{\partial h_k} \tag{34}$$

ここで，h_kはk回目の繰り返しにおける定数行列A_c, B_c, C_c, D_cの暫定値のうちnm個の要素から構成されるnm定数ベクトルである。

$$q(h_k) \equiv [q_1^T(h_k) \quad q_2^T(h_k) \cdots q_n^T(h_k)]^T \tag{35}$$

$$q_i(h_k) = A_k(s_i)\omega_i \quad (i = 1 \quad 2 \cdots n) \tag{36}$$

ここで，$s_i, (i = 1 \quad 2 \quad \cdots n)$は方程式$|\Lambda_k(s)| = 0$の実数部が負の根，$\omega_i, (i = 1 \quad 2 \quad \cdots n)$は$\Lambda_k(s_i)\omega_i = 0$を満たす零でない$n$ベクトル，$\Lambda_k(s)$は$h_k$を用いて計算した(31)式の右辺の$\Lambda(s)$に対応する多項式行列，$A_k(s)$は$h_k$を用いて計算した(28)式に対応する多項式行列である。

なお，定数行列A_c, B_c, C_c, D_cには全部で$(n-r)^2 + r(n-r) + (m-r) + mr$個の要素があるが，方程式数は$(2n-r)m$個である。

繰り返し計算の初期値h_0は(6)式の行列Aが安定になるように選ぶ。これは$(C_2 A_P)$が可観測ならば可能である。つぎに，初期値h_0による(6)(7)式の系のH_∞ノルムγ_0を求める。初期値h_0とH_∞ノルムγ_0に対する多項式行列$F(s)$は(20)式から逆算することによって選定する。方程式$F(s)| = 0$の虚数根$\pm j\omega_c$が最大特異値のピーク周波数ω_cを決め，他の実数部が負の根とともに制御系の固有値を左右する。

繰り返し計算は初期値h_0と多項式行列$F(s)$を用いて，H_∞ノルムγ_0をから次第に減少させて希望の値になるまで何回か実行する。最大特異値のピーク周波数を変更したい場合には多項式行列$F(s)$も次第に変更する。各繰り返し計算の収束値で得られる(31)式を満たす定数行列A_c, B_c, C_c, D_cをつぎの繰り返し計算の初期値とする。各回のH_∞ノルムの減分値を大きくし過ぎると繰り返し計算は収束しなくなる。逆に小さくし過ぎると計算回数が増える。収束する減分値の上限はH_∞ノルム

の大きいところでは大きく，H$_\infty$ノルムの下限付近では極端に小さくなる。

5．本方法による数値計算例

制御対象はつぎの2入力2出力の3次系とする。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix},\ D_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$C_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\ D_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 補償器の定数行列の初期値は仮想する系（A, B_2 C_2, 0）に対して低次元観測器を構成し，その状態推定を用いたフィードバックによって決まるつぎのような値に設定する。なお，観測器の極はに選定し，その他の閉ループ系の極は$-0.5\pm j0.866$，-1.0とする。

$$A_c=-0.25,\ B_c=[-0.25\quad 0.625]$$
$$C_c=\begin{bmatrix}1.25\\ -1.5\end{bmatrix},\ D_c=\begin{bmatrix}-0.75 & 0.875\\ 0.5 & -0.75\end{bmatrix}$$

(2) 制御系はつぎのようになる。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -1.25 & -0.75 & -1.75\\ 0 & 4.5 & -2.5 & 1.5\\ 0 & 1.25 & -0.25 & -0.25\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.25 & 1.375\\ -0.5 & 0.75\\ -0.25 & 0.625\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}1 & 1.75 & -0.75 & 1.25\\ 0 & -2.5 & 1.5 & -1.5\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0.25 & 0.875\\ 0.5 & 0.25\end{bmatrix}$$

制御系のH$_\infty$ノルムは9.77，H$_\infty$ノルムの周波数は0.750である。

(3) 多項式行列$F(s)$はつぎのように求められる。

$$F(s)=\begin{bmatrix}s^2+0.0422s-1.46 & 5.37s-0.948\\ -0.979s-1.27 & s^2+2.87s-1.53\end{bmatrix}$$

$|F(s)|=0$の根は，制御系のH$_\infty$ノルムの周波数0.750に対応する$\pm j0.754$とその他の実数部が負の根-2.01，-0.901である。

(4) 制御系のH$_\infty$ノルムが9.77のときの補償器を初期値としてH$_\infty$ノルムを8.0に指定する補償器をニュートン法で求めるとつぎのようになる。

$$A_c=0.293,\ B_c=[-0.411\quad 0.625]$$
$$C_c=\begin{bmatrix}0.00602\\ -1.83\end{bmatrix},\ D_c=\begin{bmatrix}0.057 & 0.249\\ 0.302 & -0.609\end{bmatrix}$$

(5) 方程式の数は制御系の次数が4，入力数が2であるから，4×2＝8である。補償器の定数行列の要素数は全部で9であるが，補償器を可制御正準系で表すと，調整すべき要素数は行列A_cで1，B_cで1，C_cで2，D_cで4の合計8となり，方程式の数と一致する。そこで，B_cの(1，2)要素0.625のみは不変としている。

(6) $|\Lambda(s)|=0$の根と$|A(s)|=0$の実数部が負の根のすべてが4桁まで完全に一致するまでの計算の繰り返し回数は10回であった。このときの行列の固有値は-2.03，-0.739，$-0.592\pm j0.919$になった。

(7) さらに，H$_\infty$ノルムを8.0から，順に6.5，5.0，3.5，3.0，2.9，2.8，2.8，2.75，2.71，2.702，および2.7016に指定する補償器を求めていくと，計算の繰り返し回数は順に7，7，7，8，8，6，5，6，6，6であった。このときのH$_\infty$ノルムを変化量は収束する最大値に近いものであり，H$_\infty$ノルムを2.7016に指定する補償器の定数行列はつぎのようになった。

$$A_c=0.454,\ B_c=[-0.438\quad 0.625]$$
$$C_c=\begin{bmatrix}-1.80\\ -0.955\end{bmatrix},\ D_c=\begin{bmatrix}0.147 & -0.794\\ 0.236 & -0.214\end{bmatrix}$$

このときの行列Aの固有値は
$-1.95\pm j0.455$，$-0.163\pm j0.623$になった。2.7016は上記の$F(s)$を用いて指定できるH$_\infty$ノルムの下限に近いものであった。

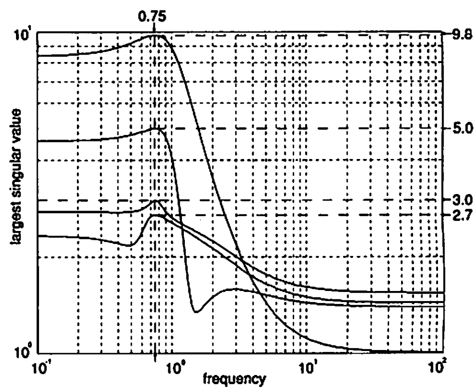

Fig.2　Largest singular value

Fig. 1は制御系のH_∞ノルムが9.77, 5.0, 3.0, および2.7016のときの最大特異値を示す。ピーク周波数はH_∞ノルムの指定に同じ$F(s)$を用いているからすべて0.750である。

6. あとがき

本研究では，制御対象の観測出力を用いて制御系のH_∞ノルムを指定する補償器の定数行列を求めるための計算法を考えた。また，H_∞ノルムの指定は制御系の可制御正準系の状態方程式とH_∞ノルムとの関係を表す多項式行列の方程式を基にして行った。この方程式は解析的には解けなかったので，ニュートン法による繰り返し計算を採用した。ニュートン法による繰り返し計算の収束は初期値に依存するため，補償器の定数行列の初期値は仮想する系の低次元観測器を構成しその推定状態によるフィードバック制御系を構成して求め，そのときの制御系のH_∞ノルムと多項式行列$F(s)$から出発して，H_∞ノルムを減少させる方向に多項式行列$F(s)$の調整も含めて補償器の定数行列の値を調整する計算を繰り返し行ない，徐々に制御系のH_∞ノルムを減少させるという方法をとった。

系の数値例についてH_∞ノルムを指定する補償器の定数行列を本方法で計算し，閉ループ系のH_∞ノルムを徐々に小さい値に指定できることを確認した。収束までの計算の繰り返し回数は収束するH_∞ノルムの最大に近い変化分でも平均的に6～7回であった。指定できるH_∞ノルムの下限は制御対象の定数行列の他に，ピーク周波数を指定し制御系の固有値に影響を及ぼす多項式行列$F(s)$に左右される。

参考文献

[1] Kemin Zhou: Essentials of Robust Control. Prentice Hall, pp234 ~244, 1998

[2] 出川：H∞ノルムの一指定法，第31回制御理論シンポジウム資料，pp227～230，2002