ロバスト摂動法による多次元複合形非線形システムのパターン類別

宮城　雅夫

Pattern Classification for Multiple Composite-Type Nonlinear Systems Using the Robust Perturbation Method

Norio MIYAGI

It is wellknown that the stability of Multiple Composite-type nonlinear systems depends considerably on their nonlinearities. The stability of a Lure-type nonlinear system with a pattern in which the nonlinearities lie on the first and third quadrants is studied. Identifying such patterns is important to enable system engineers to design stable nonlinear feedback systems. This paper presents a pattern classification method for systems with arbitrary Multiple Composite-type nonlinear feedback. Classification is carried out using the robust nonlinear-perturbation techigue, in which nonlinearities are regarded as the nonlinear perturbations of linear stable systems. Stability theorems for the pattern classification of several types of Multiple Composite-type nonlinear feedback are derived. In these theorems, the positive realness of the transfer function and the quadratic Lyapunov function are utilized.

Key Words : Pattern Classification, Multiple Composite-Type Nonlinear System, Robust Stability, Lyapunov Method

1．緒　言

ばねの結合による機械システム，ロボットや人工衛星の運動など現実の多くのシステムは非線形システムである。リアプノフの安定論はこれらの非線形システムの安定性の評価に有望といわれ続けながら，いまだに現実システムの適用がほとんどなされていないのが実情である。これはリアプノフの理論が安定判別のための十分条件しか与えないという理論的不備もさることながら，リアプノフ関数を構成する一般的手法が任意の非線形システムに対して確立されていないことに起因する。

著者はこれまで，各種の非線形システムのリアプノフ関数を構成し報告してきたが[(1)～(4)]，非線形性の取扱いに多くの労力を費やしてきた経緯がある。一連の研究を通して判明したことは，安定な工学システムに現れる非線形性にはある種のパターンが存在することである。

工学システムに現れる非線形性は，多くの線形システムに付加された形で与えられる。そこで本論文では，非線性を線形システムにおける非線形パラメータ摂動とみなし，この摂動の許容範囲から多次元複合形非線形関数の安定パターンを導出する。安定なノミナルシステムにある非線形摂動が加わっても元のシステムが安定性を保ち続けるかどうかは一種のロバスト安定の問題と考えることができる。したがって，ここでは，システムがロバスト安定を保つための非線形摂動の範囲をロバスト摂動と呼び，摂動範囲を求める手法すなわちロバスト摂動法を提案する。

機械工学科
College of Technology, Dai–Ichi University

本研究では，フィードバック要素が多次元で与えられ，ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数と，それ以外の非線形関数の和で表される複合形非線形システムを対象とし，このロバスト摂動法によってパターン類別を行い，類別された非線形関数の性質を利用して，システムの設計やリアプノフ関数構成を容易にすることを目的とする。

2．問題の設定

複合形非線形フィードバックシステムにおいて，ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形以外の非線形関数に，一般性をもたせた次のシステムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{B}\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})-\mathbf{B}\boldsymbol{\phi} \qquad (1)\\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}^{T}\mathbf{x}\\ \mathbf{u} &= \mathbf{D}^{T}\mathbf{x}\\ \mathbf{v} &= \mathbf{E}^{T}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\phi} &= \xi(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

ただし，(1)式において

$\mathbf{x}$：n 次元状態変数ベクトル
$\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\mathbf{v}$：k 次元出力変動ベクトル
$\mathbf{A}$：n×n の安定な定数行列
$\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E}$：適合する次元行列
$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}),\boldsymbol{\phi}$：k 次元非線形フィードバックベクトル

であり，$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})$ は，

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})^{T} = [f_1(\sigma_1),\ f_2(\sigma_2),\ \cdots,\ f_k(\sigma_k)] \qquad (2)$$

で表され，一変数関数の組からなるベクトル関数で，次の条件を満足しているものとする。

i．原点近傍の $\sigma_i(i=1,2,\cdots,k)$ に対して，$\sigma_i f_i(\sigma_i)\geqq 0$，かつ，$f_i(0)=0$

ii．原点近傍において $V'(\sigma)>0, V'(0)=0$ かつ，ある正の定数 q に対して $\nabla V'(\sigma)=qf(\sigma)$ となるスカラ関数 $V'(\sigma)$ が存在する。

(1)式のシステムのブロック線図は，Fig. 1 によって示される。

ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数以外の非線形関数をルーリエ形非線形システムの摂動とみなしてロバスト解析を行うために，(1)式を次の3つの式に変形する。

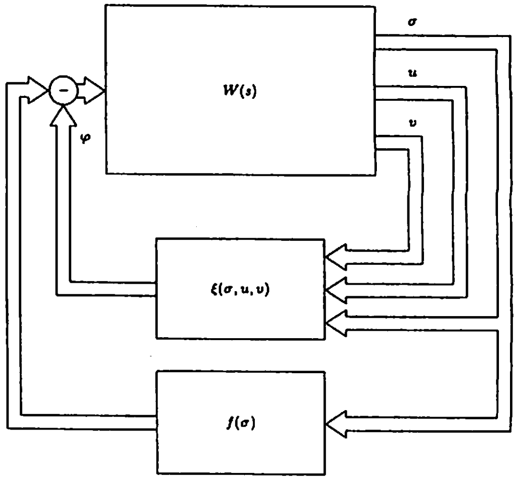

Fig.1　Complex-type Multiple Nonlinear Feedback System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{\sigma}\mathbf{x}-\mathbf{B}\mathbf{f}(\sigma)\\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{u}\mathbf{x}-\mathbf{B}\mathbf{f}(\sigma) \qquad (3)\\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{v}\mathbf{x}-\mathbf{B}\mathbf{f}(\sigma)\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\sigma} &= \mathbf{A}-\mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}\mathbf{C}^{T}\\ \mathbf{A}^{u} &= \mathbf{A}-\mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}^{u}\mathbf{D}^{T}\\ \mathbf{A}^{v} &= \mathbf{A}-\mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}^{v}\mathbf{D}^{T}\\ \boldsymbol{\Phi}^{\sigma} &= \boldsymbol{\Phi}^{d}(\sigma^{d})^{-1}\\ \boldsymbol{\Phi}^{u} &= \boldsymbol{\Phi}^{d}(\mathbf{U}^{d})^{-1}\\ \boldsymbol{\Phi}^{v} &= \boldsymbol{\Phi}^{d}(\mathbf{V}^{d})^{-1}\end{aligned}$$

であり，(1)式において $\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}$ と $\boldsymbol{\Phi}^{u}$，$\boldsymbol{\Phi}^{v}$ は非線形摂動項となる。添字 d は，ベクトルの対角行列化を意味し，$\mathbf{Y}^{d}\mathbf{1}=\mathbf{y}$ の関係を満足する。

(1)式で表されるシステムの $\mathbf{f}(\sigma)-\sigma$ 間の線形部分の伝達関数行列 $\mathbf{W}(s)$ は，

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}^{T}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \qquad (4)$$

で与えられ，平衡点は，$x=0$ となる。本論文では $\mathbf{W}(s)$ は $\mathbf{W}(\infty)=0$ を満足し，(1)式は $\mathbf{W}(s)$ の最小実現であるものとする。

まず，Anderson の結果にしたがって，次の定理が得られる。

【定理1】

(A, B, C) が，(4)式で与えられる線形部分の伝達

関数行列 $\mathbf{W}(s)$ の最小実現であるとし,

$$\mathbf{Z}(s) = (n+qs)\mathbf{W}(s) \tag{5}$$

が正実行列なら，次の連立行列方程式を満足する実行列 $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{W}_0$ が存在する。

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \\ &\mathbf{P}\mathbf{B} = n\mathbf{C}+q\mathbf{A}^T\mathbf{C}-\mathbf{L}\mathbf{W}_0 \\ &\mathbf{W}_0^T\mathbf{W}_0 = q(\mathbf{C}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}^T\mathbf{C}) \end{aligned} \tag{6}$$

ただし，n は非負の定数であり，q は正の定数である。また，$\mathbf{P}$ は正定な対称行列であり，極一零点の消去を避けるため，$s=-n/q$ は $\mathbf{W}(s)$ の極ではないものとする。

ここで，次の条件を満足するとき $\mathbf{Z}(s)$ は正実行列となる。

Ⅰ. $\mathbf{Z}(s)$ の要素は $\mathrm{Re}(s) \geqq 0$ に対して解析的である。

Ⅱ. $\mathbf{Z}^*(s) = \mathbf{Z}(s^*)$

Ⅲ. $\mathbf{Z}(s) + \mathbf{Z}^T(s^*)$ は，$\mathrm{Re}(s) \geqq 0$ に対して半正定値となる。

ただし，* は共役を表している。

本論文の目的はシステムが安定になるための $\varphi = -\xi(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{u})$ の条件を見い出し，複合形非線形システムをパターン類別することである。ここでは，次の4つのタイプの非線形関数を考え，システムが安定性を保つための条件を導出する。

$$\begin{aligned} &\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) \\ &\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{h}(\mathbf{v}) \\ &\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{U}^d\mathbf{g}(\sigma) \\ &\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sigma^d\mathbf{g}(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{7}$$

(1)式で与えられるシステムの安定条件をリアプノフ法によって解析する場合，非線形関数 $\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v})$ の性質がある安定パターン内にあればリアプノフ関数を構成することができる。ところが，この非線形関数をあらかじめパターン類別してなければ，この関数を考慮にいれたリアプノフ関数の構成は困難である。

次節では，非線形関数 $\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v})$ が(7)式の4つのタイプで表される各種非線形フィードバックをもつシステムに対して，ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数のみで構成されるルーリエ形非線形システムに着目し，ルーリエ形リアプノフ関数を基盤にロバスト摂動法を用いてシステムが安定パターンをもつための非線形関数 $\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v})$ の制約条件を導出する。

3. ルーリエ形複合フィードバックシステム

非線形関数 $\xi(\sigma,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ で与えられるシステムに対して安定定理を導く。

【定理2】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $\mathbf{Z}(s)$ が正実行列であり，次式を満足する $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{PBG}(\mathbf{u})^d(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{D}(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[\mathbf{L}\mathbf{W}_0\mathbf{G}(\mathbf{u})^d(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{D}(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{W}_0^T\mathbf{L}^T\right] \\ &-\frac{1}{4}\left[\mathbf{D}(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{W}_0^T\mathbf{W}_0\mathbf{G}(\mathbf{u})^d(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{D}^T\right] \geqq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ である。 ■

<定理2の証明>

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として次のルーリエ形リアプノフ関数を用いる。

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + V'(\sigma) \tag{9}$$

ただし，$V'(\sigma)$ は

$$V'(\sigma) = q\int_0^{\sigma}\mathbf{f}(\sigma)d\sigma \tag{10}$$

である。(9)式の時間導関数を求め，さらに，(6)式の関係を用いて整理すれば,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = &-\frac{1}{2}\left[\mathbf{x}^T\mathbf{L} - \left(\mathbf{f}(\sigma)^T + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{W}_0^T\right)\right]* \\ &*\left[\mathbf{L}\mathbf{x} - \mathbf{W}_0\left(\mathbf{f}(\sigma) + \frac{1}{2}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{u}\right)\right] \\ &- n\sigma^T\mathbf{f}(\sigma) \\ &-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\Big[\{\mathbf{PBG}(\mathbf{u})^d(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{D}(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{B}^T\mathbf{P}\} \\ &+\frac{1}{2}\{\mathbf{L}\mathbf{W}_0\mathbf{G}(\mathbf{u})^d(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{D}(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{W}_0^T\mathbf{L}^T\} \\ &-\frac{1}{4}\{\mathbf{D}(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u})^d\mathbf{W}_0^T\mathbf{W}_0\mathbf{G}(\mathbf{u})^d(\mathbf{U}^d)^{-1}\mathbf{D}^T\}\Big]\mathbf{x} \end{aligned} \tag{11}$$

となる。条件(ii)より，(10)式で表される V' が積分路に関係なく一意的に決まり，正定値が保証されることか

ら(9)式で与えられるVは正定値となる。また，(11)式は右辺第2項は，条件(i)より $\sigma^T f(\sigma) \geqq 0$ で半負定値。さらに $g(u)$ が(8)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}$ は半負定値となり，リアプノフの定理に従い，(1)式のシステムは安定となる。

4．形複合フィードバックシステム

ここでは，非線形フィードバック要素が，積の形で与えられるシステムに対して，安定定理を考察する。

4-1．2非線形関数の積形フィードバック

非線形関数 $\xi(\sigma, u, v) = G(u)^d h(v)$ で与えられるシステムの安定定理を導く。

このような2非線形関数の積で表されるシステムに対しては，次の2つの安定定理を導くことができる。

【定理3】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $Z(s)$ が正実行列であり，次式を満足する $g(u)$，$h(v)$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\Big[PB\{G(u)^d(U^d)^{-1}\}H(v)^dD^T + DH(v)^d\{(U^d)^{-1}G(u)^d\}B^TP\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\Big[LW_0\{G(u)^d(U^d)^{-1}\}H(v)^dD^T + DH(v)^d\{(U^d)^{-1}G(u)^d\}W_0^TL^T\Big]$$
$$-\frac{1}{4}\Big[DH(v)^d\{(U^d)^{-1}G(u)^d\}W_0^TW_0\{G(u)^d(U^d)^{-1}\}H(v)^dD^T\Big] \geqq 0 \tag{12}$$

ただし，$u \neq 0$ である。 ■

【定理4】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $Z(s)$ が正実行列であり，次式を満足する $g(u)$，$h(v)$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\Big[PB\{H(v)^d(V^d)^{-1}\}G(u)^dE^T + EG(u)^d\{(V^d)^{-1}H(v)^d\}B^TP\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\Big[LW_0\{H(v)^d(V^d)^{-1}\}G(u)^dE^T + EG(u)^d\{(V^d)^{-1}H(v)^d\}W_0^TL^T\Big]$$
$$-\frac{1}{4}\Big[EG(v)^d\{(V^d)^{-1}H(v)^d\}W_0^TW_0\{H(v)^d(V^d)^{-1}\}G(u)^dE^T\Big] \geqq 0 \tag{13}$$

ただし，$v \neq 0$ である。 ■

＜定理3，4の証明＞

(1)式のシステムのリアプノフ関数として，(9)式を用いる。定理3に対して，(9)式の時間導関数を求め，(6)式の関係を用いて整理すれば

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}\Big[x^TL - \Big\{f(\sigma)^T + \frac{1}{2}u^TH(v)^d\Big((U^d)^{-1}G(u)^d\Big)\Big\}W_0^T\Big] *$$
$$*\Big[L^Tx - W_0\Big\{f(\sigma) + \frac{1}{2}\Big(G(u)^d(U^d)^{-1}\Big)H(v)^du\Big\}\Big]$$
$$- n\sigma^Tf(\sigma)$$
$$-\frac{1}{2}x^T\Big[\Big\{PB\Big(G(u)^d(U^d)^{-1}\Big)H(v)^dD^T + DH(v)^d\Big((U^d)^{-1} G(u)^d\Big)B^TP\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{LW_0\Big(G(u)^d(U^d)^{-1}\Big)H(v)^dD^T + DH(v)^d\Big((U^d)^{-1} G(u)^d\Big)W_0^TL^T\Big\}$$
$$-\frac{1}{4}\Big\{DH(v)^d\Big((U^d)^{-1}G(u)^d\Big)W_0^TW_0\Big(G(u)^d(U^d)^{-1}\Big) H(v)^dD^T\Big\}\Big]x \tag{14}$$

となる。非線形フィードバック $G(u)^d h(v)$ が(12)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}(x)$ は半負定値となる。したがって，$V(x) > 0$，$\dot{V}(x) \leqq 0$ となり，リアプノフ安定定理に基づき，(1)式の原点近傍における安定性が保証される。

定理4に対して，(9)式の時間導関数を求め，(6)式の関係を用いて整理すれば，

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}\Big[x^TL - \Big\{f(\sigma)^T + \frac{1}{2}v^TG(u)^d\Big((V^d)^{-1}H(v)^d\Big)\Big\}W_0^T\Big] *$$
$$*\Big[L^Tx - W_0\Big\{f(\sigma) + \frac{1}{2}\Big(H(v)^d(V^d)^{-1}\Big)G(u)^dv\Big\}\Big]$$
$$- n\sigma^Tf(\sigma)$$
$$-\frac{1}{2}x\Big[\Big\{PB\Big(H(v)^d(V^d)^{-1}\Big)G(u)^dE^T + EG(u)^d\Big((V^d)^{-1} H(v)^d\Big)B^TP\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{LW_0\Big(H(v)^d(V^d)^{-1}\Big)G(u)^dE^T + EG(u)^d\Big((V^d)^{-1} H(v)^d\Big)W_0^TL^T\Big\}$$
$$-\frac{1}{4}\Big\{EG(u)^d\Big((V^d)^{-1}H(v)^d\Big)W_0^TW_0\Big(H(v)^d(V^d)^{-1}\Big) G(u)^dE^T\Big\}\Big]x \tag{15}$$

となる。ここで $G(u)^d h(v)$ が(13)式を満足するパターンであれば，(15)式の $\dot{V}$ は半負定値となり，リアプノ

フの定理に従い，システム(1)は安定である。

4-2. 出力変数ベクトルと非線形関数の積形フィードバック(I)

非線形関数 $\xi(\sigma, u, v)$ で与えられるシステムに対して安定定理を導く。

フィードバック要素が，出力変数と，従来の非線形関数を変数とする非線形関数との積の形で表されるシステムに対しては，次の安定定理を導くことができる。

【定理5】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $Z(s)$ が正実行列であり，次式を満足する $g(\sigma)$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\begin{aligned}&\left[PBG(\sigma)^d D^T + DG(\sigma)^d B^T P\right]\\&\quad + \frac{1}{2}\left[LW_0 G(\sigma)^d D^T + DG(\sigma)^d W_0^T L^T\right]\\&\quad - \frac{1}{4}\left[DG(\sigma)^d W_0^T W_0 G(\sigma)^d D^T\right] \geqq 0 \qquad (16)\end{aligned}$$

■

<定理5の証明>

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として(9)を用いる。(9)式の時間導関数を求め，(6)式の関係を用いて整理すれば

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) = &-\frac{1}{2}\left[x^T L - \left(f(\sigma)^T + \frac{1}{2}u^T G(\sigma)^d\right)W_0^T\right] *\\&\quad * \left[L^T x - W_0\left(f(\sigma) + \frac{1}{2}G(\sigma)^d u\right)\right]\\&\quad - n\sigma^T f(\sigma)\\&\quad - \frac{1}{2}x^T\left[\left(PBG(\sigma)^d D^T + DG(\sigma)^d B^T P\right)\right.\\&\quad + \frac{1}{2}\left(LW_0 G(\sigma)^d D^T + DG(\sigma)^d W_0^T L^T\right.\\&\quad \left. - \frac{1}{4}\left(DG(\sigma)^d W_0^T W_0 G(\sigma)^d D^T\right)\right]x \qquad (17)\end{aligned}$$

(17)式は $f(\sigma)$ の条件(i)より $\sigma^T f(\sigma) \geqq 0$ であることから，第一項目と第二項目をたした部分は半負定値となる。したがって，$V(x)>0$, $\dot{V}(x) \leqq 0$ となり，リアプノフの安定定理に基づき，(1)式のシステムの安定性が保証される。

4-3. 出力変数ベクトルと非線形関数の積形フィードバック(II)

非線形関数 $\xi(\sigma, u, v) = \sigma^d g(u)$ で与えられるシステムに対し，安定定理を導く。

フィードバック要素が，非線形関数と，従来の非線形関数の変数との積で表されるシステムに対しては，次の安定定理を導くことができる。

【定理6】

(5)式で与えられる伝達関数行列 $Z(s)$ が正実行列であり，次式を満足する $g(u)$ のパターンに対して，(1)式のシステムは安定である。

$$\begin{aligned}&[PBG(u)^d C^T + CG(u)^d B^T P]\\&\quad + \frac{1}{2}\left[LW_0 G(u)^d C^T + CG(u)^d W_0^T L^T\right]\\&\quad - \frac{1}{4}\left[CG(u)^d W_0^T W_0 G(u)^d C^T\right] \geqq 0 \qquad (18)\end{aligned}$$

■

<定理6の証明>

(1)式で表されるシステムのリアプノフ関数として，(9)式を用いる。(9)式の時間導関数を求め，(6)式の関係を用いて整理すれば，

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) = &-\frac{1}{2}\left[x^T L - \left(f(\sigma)^T + \frac{1}{2}u^T \sigma^d G(u)^d\right)W_0^T\right] *\\&\quad * \left[L^T x - W_0\left(f(\sigma) + \frac{1}{2}G(u)^d \sigma^d u\right)\right]\\&\quad - n\sigma^T f(\sigma)\\&\quad - \frac{1}{2}x^T\left[\left(PBG(u)^d C^T + CG(u)^d B^T P\right)\right.\\&\quad + \frac{1}{2}\left(LW_0 G(u)^d C^T + CG(u)^d W_0^T L^T\right)\\&\quad \left. - \frac{1}{4}\left(CG(u)^d W_0^T W_0 G(u)^d C^T\right)\right]x \qquad (19)\end{aligned}$$

条件(i)より，$\sigma^T f(\sigma) \geqq 0$ であることから，第一項目と第二項目をたした部分は半負定値となる。このとき，非線形関数 $g(u)$ が(18)式を満足するパターンであれば，$\dot{V}(x)$ は半負定値となる。したがって，リアプノフの定理に従い，(1)式のシステムは安定となる。

5．例題システムの適用

ここでは先に導いた定理2～6を例題システムに適用する。

5-1．ルーリエ形複合システム

次式によって表される，ルーリエ形複合システムを考える。

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + f(y_1 - y_2) + g(\dot{y}_1 + y_1 - \dot{y}_2 - y_2) = 0\\ \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 - f(y_1 - y_2) + g(\dot{y}_1 + \dot{y}_1 - \dot{y}_2 - y_2) = 0\end{aligned} \quad (20)$$

ここで，$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2]$ とおき，(20)式を(1)式の形式に書き換えると

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x} - \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\mathbf{f}(\sigma) - \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\phi$$

$$\sigma = [1 \ \ 0 \ -1 \ \ 0]\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u} = [1 \ \ 1 \ -1 \ -1]\mathbf{x}$$

$$\phi = g(u) \quad (21)$$

このとき，$\mathbf{Z}(s) = (n + qs)\mathbf{W}(s)$ は，

$$\mathbf{Z}(s) = (n + qs)\left[\frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{s(s+2)}\right] \quad (22)$$

となる。ただし，極一零点の消去を避けるため，ここでは，$n \neq 0$，かつ $n \neq q$，$n \neq 2q$ とする。条件Ⅰ，Ⅱ，ⅢよりZが正実となるための十分条件を求めると，

$$q - n > 0 \quad (23)$$

となる。(23)の条件のもとにZ(s)は正実であることから，(6)式を満足する実行列 **P**，**L**，$\mathbf{W}_0$ が存在し，実際にこれらの値を求めると，次のような結果が得られる。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} n & n & 0 & 0\\ n & q & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2n & n\\ 0 & 0 & n & q\end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \sqrt{2(q-n)} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2(2q-n)}\end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{W}_0 = 0 \quad (26)$$

Z(s)が正実であり，実行列 **P**，**L**，$\mathbf{W}_0$ が存在し，非線形関数 $\xi(\sigma, u, v) = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ のタイプであることから定理2を適用する。(24)，(25)，(26)式を用いて，(8)式を求めると

$$\frac{g(u)}{u}\begin{bmatrix} 2n & n+q & -2n & -(n+q)\\ n+q & 2q & -(n+q) & -2q\\ -2n & -(n+q) & 2n & n+q\\ -(n+q) & -2q & n+q & 2q\end{bmatrix} \geqq 0 \quad (27)$$

となり，(27)式が成り立つための十分条件は，次式のようになる。

$$n = q > 0, \quad \frac{g(u)}{u} \geqq 0 \quad (28)$$

なお，本例題ではリアプノフ関数を，

$$V(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{bmatrix} n & n & 0 & 0\\ n & q & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2n & n\\ 0 & 0 & n & q\end{bmatrix}\mathbf{x} + q\int_0^{\sigma} f(\sigma)d\sigma \quad (29)$$

とおけば，(29)式の時間導関数は

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2(q-n) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2(2q-n)\end{bmatrix}\mathbf{x} - n\sigma f(\sigma)$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\frac{g(u)}{u}\begin{bmatrix} 2n & n+q & -2n & -(n+q)\\ n+q & 2q & -(n+q) & -2q\\ -2n & -(n+q) & 2n & n+q\\ -(n+q) & -2q & n+q & 2q\end{bmatrix}\mathbf{x} \quad (30)$$

となるので，明らかに(8)式を満足するg(u)のパターンに対して，(1)式のシステムは安定となるので，定理2が正しいことがわかる。

5-2．積形複合システム

次式によって表される積形複合システムを考える。

$$\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + f_1(y_1) - f_3(y_2 - y_1) + (\dot{y}_1 + y_1 + \dot{y}_2 + y_2)\, g_1(y_1) - y_2 g_3(y_2 - y_1) = 0$$
$$\ddot{y}_2 + 3\dot{y}_2 + f_2(y_2) + f_3(y_2 - y_1) + y_2 g_2(y_2) + \dot{y}_2 g_3(y_2 - y_1) = 0 \tag{31}$$

$x^T = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2]$ とおき，(31)式を，(1)式の形式に書き変えると，

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} f(\sigma) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \phi$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\phi = U^d g(\sigma) \tag{32}$$

このとき，$Z = (n+qs)W(s)$ は

$$Z(s) = (n+qs)\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} & 0 & -\frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s(s+3)} & \frac{1}{s(s+3)} \\ -\frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{s(s+3)} & \frac{1}{s(s+2)}+\frac{1}{s(s+3)} \end{bmatrix} \tag{33}$$

となる。ただし，極一零点の消去を避けるため，ここでは，$n \neq 0$ かつ，$n \neq q$，$n \neq 2q$ とする。
$Z(s)$ が正実行列となるための十分条件は

$$2q - n > 0 \tag{34}$$

となる。(34)式の条件のもとに $Z(s)$ は正実行列であることから，(6)式を満足する，実行列 P，L，W_0 が存在し，実際にこれらの値を求めると，次のような結果を得る。

$$P = \begin{bmatrix} 2n & 0 & n & 0 \\ 0 & 3n & 0 & n \\ n & 0 & q & 0 \\ 0 & n & 0 & q \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2(2q-n)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2(3q-n)} & 0 \end{bmatrix}, \quad W_0 = 0 \tag{34}$$

$Z(s)$ が正実行列であり，実行列 P，L，W_0 が存在し，非線形関数 $\xi(\sigma, u, v) = U^d g(\sigma)$ のタイプであることから，定理5を適用する。

(34)式を用いて(16)式を求めると，

$$G(\sigma)^d \begin{bmatrix} 2n & n & n+q & 0 \\ n & 2n & q & n+qq \\ n+q & q & 2q & 0 \\ 0 & n+q & 0 & 2q \end{bmatrix} \geqq 0 \tag{35}$$

となり，(35)式が成り立つための十分条件は，次式のようになる。

$$n = q > 0$$
$$g_i(u_i) \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{36}$$

なお，本例題ではリアプノフ関数を，

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} 2n & 0 & n & 0 \\ 0 & 3n & 0 & n \\ n & 0 & q & 0 \\ 0 & n & 0 & q \end{bmatrix} x + q\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma \tag{37}$$

とおき，(37)式の時間導関数を求めると

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(2q-n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(3q-n) \end{bmatrix} x - n\sigma^T f(\sigma)$$
$$-\frac{1}{2}x^T G(\sigma)^d \begin{bmatrix} 2n & n & n+q & 0 \\ n & 2n & q & n+qq \\ n+q & q & 2q & 0 \\ 0 & n+q & 0 & 2q \end{bmatrix} x \tag{38}$$

となるので，明らかに(16)式を満足する U，g(σ) のパターンに対して，(1)式のシステムは安定となるので，定理5が正しいことがわかる。

6．結　言

本論では，工学上頻出する非線形システムを安定性の確保の立場からパターン類別し，システムが安定になるための非線形関数の条件を導出した。導出に際してはロバスト摂動法を提案し，非線形関数を安定な線形システムの非線形摂動とみなして解析を行った。非線形関数の制約条件は定理の形で与えたが，この制約条件すなわち安定パターンさえわかれが任意の非線形関数をもつシステムの設計やリアプノフ関数構成が可能となり，解析も容易になる。本論文の特長は各種の非線形関数を安定パターンに類別できるロバスト摂動法を提案し，非線形システムの設計や安定性の解析を容易にしたところにある。

文　献

(1) 宮城・宮城，機論，56-529，C(1990)，109-113
(2) Miyagi, N. and Miyagi, H., ASME DS, 109-4(1987)
(3) Miyagi, N. and Miyagi, H., ASME DS, 113-3(1991)
(4) 宮城・宮城，機論，58-548，C(1993)，47-53