普遍汎化について

山元　完二　　航空工学科

On universal generalization

Kanji YAMAMOTO

I shall argue over universal generalization.

Universal generalization is a step, which deduces the statement on all objects from a statement on some object.

The conditions of applying universal generalization is described in this haper.

1．はじめに

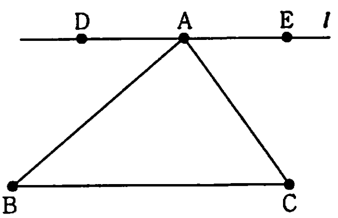
「三角形の内角の和は２直角である」という命題は正確には「すべての三角形の内角の和は２直角である」ということである。

この命題の証明を実際に行ってみる。

(証明)

1．任意に三角形をとってきて，それを ΔABC とする。

2．点Aを通り，辺ABに平行な直線を引くことができる。(公準)



この直線を ℓ とおき，ℓ 上にAの左側に点Dを，右側に点Eを取る。

3．$\angle$DAB＝$\angle$ABC，$\angle$EAC＝$\angle$BCA（平行な二直線において錯角は相等しい）

4．３点D，A，Eはこの順で一直線上にあるから

$\angle$DAE＝2$\angle$R

$\angle$DAE＝$\angle$DAB＋$\angle$BAC＋$\angle$CAE

5．３行目と４行目により

$\angle$ABC＋$\angle$BCA＋$\angle$CAB

＝$\angle$DAB＋$\angle$CAE＋$\angle$BAC

＝2$\angle$R

6．ΔABC は任意の三角形である。それゆえ，すべての三角形の内角の和は二直角である。(証明終り)

上の証明を吟味する。

証明すべきことは，「すべての三角形」に関する主張である。

ところが，「すべての」三角形が性質Pを有している」という主張を証明するために，無尽蔵にある三角形１つ１つについて，それぞれ個々に性質Pを有していることを示していくのは不可能である。

それゆえ，「「任意に」選ばれた対象について，それが性質Pを有している」ということを証明することで「「すべての」の対象が性質Pを有している」ということに代えるのである。

これは「任意」から「すべて」への飛躍である。これが，論理学でいう普遍汎化（universal-generalization）である。

それでは，いかなる場合に普遍汎化可能なのであろうか。すなわち，命題 ϕ があるとき，$\forall x \phi$ とできるのはどのような場合であろうか。その条件を考察するのがこの小論のテーマである。

2．例による考察

(例１)

命題 Γ と命題関数 F(P) を次のようにする。

Γ：図形Cは中心がO，半径がｒの円である。

F(P)：点Pは図形C上にある。

このとき，

「Γ，F(P) $\vdash \forall$P(OP＝r)」 …………………………(1)

は正しいか。

翻訳してみると，上の命題は次のようになる。

「図形Cは中心がO，半径がｒの円である。そして

点Pは図形C上にある。このとき，すべてのPに対して $OP=r$ である」

この命題は一見，正しそうに思われる。しかし論理的には正しくない。

なぜなら，$\forall P(OP=r)$ と $\forall Q(OQ=r)$ とは論理的に同値である。それゆえ，もし(1)が正しいとすると，(1)の中の $\forall P(OP=r)$ を $\forall Q(OQ=r)$ で置き換えた式「$\Gamma, F(P) \vdash \forall Q(OQ=r)$」も正しいはずである。

しかし，この命題が正しくないのは明らかであろう。

（例2）

3つの論理式 $P(x)$, $\forall x(P(x)\to Q(x))$ $\forall x(Q(x)\to R(x))$ から $\forall xR(x)$ が論理的に導けるか。すなわち

$P(x),\ \forall x(P(x)\to Q(x)),\ \forall x(Q(x)\to R(x)) \vdash \forall xR(x)$

は正しいか。

例2の演繹を実際に行ってみよう。

(1)	1	$P(x)$	P
(2)	2	$\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
(3)	3	$\forall x(Q(x)\to R(x))$	P
(2)	4	$P(x)\to Q(x)$	2 UI
(1，2)	5	$Q(x)$	1，2 MP
(3)	6	$Q(x)\to R(x)$	3 UI
(1，2，3)	7	$R(x)$	5，6 MP
(1，2，3)	8	$\forall xR(x)$	7 UG

以上。

（例3）

3つの論理式 $\forall xP(x)$, $\forall x(P(x)\to Q(x))$, $\forall x(Q(x)\to R(x))$ から $\forall xR(x)$ が論理的に導けるか。すなわち，

$\forall xP(x),\ \forall x(P(x)\to Q(x)),\ \forall x(Q(x)\to R(x)) \vdash \forall xR(x)$

は正しいかどうか。

例3の演繹を実際に行ってみる。

(1)	1	$\forall xP(x)$	P
(2)	2	$\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
(3)	3	$\forall x(Q(x)\to R(x))$	P
(1)	4	$P(x)$	1 UI
(2)	5	$P(x)\to Q(x)$	2 UI
(1，2)	6	$Q(x)$	4，5 MP
(3)	7	$Q(x)\to R(x)$	3 UI
(1，2，3)	8	$R(x)$	6，7 UI
(1，2，3)	9	$\forall xR(x)$	8 UG

以上

例2において，モデルMを次のように与える。

議論領域Dとして，D＝{1，2，3，4}，述語P, Q, Rには V(P)＝{1}，V(Q)＝{1，2}，V(R)＝{1，2，3}とする。ただし，Vは付値関数とする。このとき，Pは $x=1$ のとき真，$\forall x(P(x)\to Q(x))$ も真，$\forall x(Q(x)\to R(x))$ も真，しかし $\forall xR(x)$ は真ではない。

例3においては，D＝{1，2，3，4}とすると $\forall xP(x)$ ということからV(P)＝{1，2，3，4}でなくてはならない。すると，$\forall x(P(x)\to Q(x))$ ということから V(Q)＝{1，2，3，4}でなくてはならない。同様に $\forall x(Q(x)\to R(x))$ ということからV(R)＝{1，2，3，4}でなくてはならない。それゆえ，$\forall xR(x)$ は正しい。

モデルから判断すると，例2の演繹は正しくないが例3の演繹は正しそうである。

例2について考えると，1行目で $P(x)$ を仮定しているということは，特点の対象xについてはPが成り立つということを仮定している。(先のモデルでいえば，$x=1$ のときのみということ)

それゆえ，あくまでも「xがPである限り」という限定付きである。

よって，特定のxについてQが成り立つということになる。特定の対象から，普遍汎化すること $\forall xQ(x)$ には，明らかに無理がある。

ここで，もう一歩考察を深めよう。

例2の2行目は「xはPである」限り「xはすべてQである」，3行目は「xはQである」限り「xはすべてRである」という主張である。

よって「xはPである限り，xはすべてRである」という主張は成り立つ。

「xはPである限り，xはすべてRである」という主張は，「すべてのxに対して，xはPであるならばxはRである」ということだから，$\forall x(P(x)\to R(x))$ は正しいと判断される。

なお，$x\notin V(P)$ とき，$P(x)$ は偽であるから $P(x)\to Q(x)$ は真，それゆえ，$x\in V(P)$ あるいは $x\notin V(P)$ のいずれにせよ $\forall x(P(x)\to Q(x))$ は正しいことがわかる。

以上の考察から，xを普遍汎化してはいけないための条件の一つが明らかになった。

それは，普遍汎化すべき対象が，その論理式を導いた前提の中で自由で現れていてはいけないということである。

もし，自由で現れていたら，それは，その前提式を満たす制限付き，ということだからである。

加えると，その前提式を条件化することで前提の中から除去してしまうと，先に述べた議論により，普遍汎化可能になる。

これらの考察のもとに，例1を見直してみよう。

Γ, F(P) $\vdash$OP=r

よって

Γ, F(P) $\vdash \forall$P(OP=r)

この推論が真でない理由は，普遍汎化すべきPが，OP=rの前提F(P)の中で自由で現れているからである。それゆえ，$\forall$P(0P=r)は導けない。

次のようにすればよい。

Γ, F(P) $\vdash$OP=r

演繹定理により

$\Gamma \vdash$F(P)$\rightarrow$OP=r

F(P)$\rightarrow$OP=rでの自由な変項Pは，その前提Γの中では自由で現れていないから

$\Gamma \vdash \forall$P(F(P)$\rightarrow$OP=r)

が導けるということになる。

この形だと正しいということになる。

3．例による考察（その2）

（例4）

$\forall$x$\exists$yF(x, y)$\rightarrow\exists$y$\forall$xF(x, y)が正しいとして，その演繹を考える。

後の説明のために，議論領域として人間世界を，F(x, y)として「yはxの父親である」という解釈を与えることにする。

翻訳すると$\forall$x$\exists$yF(x, y)は「すべてのxに対して，あるyという人がいて，yはxの父親である」つまり，「どんな人にもそれぞれに父親がいる」ということである。

演繹を書くと，

(1)	1	$\forall$x$\exists$yF(x, y)	P
(1)	2	$\exists$yF(x, y)	1 UI
(1)	3	F(x, f)	f_x 2 EI
(1)	4	$\forall$xF(x, f)	3 UG
(1)	5	$\exists$y$\forall$xF(x, y)	4 EG

以上。

2行目は1行目から，「すべての対象xに対して成り立つから，任意の対象xについても成り立つ。その際，対象xは固定された対象である」という普遍例化によって得られた行である。

3行目は，2行目から存在例化によって，対象yに暫定的にfという名前を付けるということである。

ここで注意しなければならないことは，fと命名された対象yは，xに依存しているということである。つまり，xに対するfということであり，数学的な表現を借りるならば，fはxの関数ということになる。そのことを明示するために，3行目の右側にf_xと書く。

4行目は，3行目でxは任意であるという理由からxを普遍量化したものである。

ところで，xは本当に任意なのか。

そうではない。

xは，3行目に現れているfに関連する対象である。つまり，fとxとは相関関係があるのであって，それらは互いに独立なのではない。暫定定項がxに依存して固定された定項である以上，fが式の中にある限り，逆にxも制限を受けている。

それゆえ，3行目から，xをfとは無関係に切り離して$\forall$xF(x, f)と量化するわけにはいかない。

先の解釈でいうならば「任意に固定された対象xに対して，その父親がいて，その人をfさんとしよう」ということだから，4行目の量化を認めるということは「fさんという特定の一人が，すべての人の父親である」ということになってしまう。

これらの考察からわかることは，普遍量化される対象xは，その行や，その行の前提の中に現れている暫定定項の添字になっていてはいけないということである。

4．例による考察（その3）

$\forall$x$\exists$yF(x, y)$\rightarrow\exists$y$\forall$xF(x, y)が成立しないことは例4で見た。それでは

（例5）

$\forall$x$\exists$y(F(x)$\wedge$G(y))$\rightarrow\exists$y$\forall$x(F(x)$\wedge$G(y))

は妥当であるか。

F(x)$\wedge$G(y)をH(x, y)と置き換えると例4と同値になり，妥当でないことは明らかである。

演繹を行ってみると

(1)	1	$\forall$x$\exists$y(F(x)$\wedge$G(y))	P
(1)	2	$\exists$y(F(x)$\wedge$G(y))	1 UI
(1)	3	F(x)$\wedge$G(f)	f_x 2 EI

次の4行目で，$\forall$x(F(x)$\wedge$G(y))としたいところだがそれは許されない。なぜなら，xが3行目に出てくるfの添字になっているからである。

ところが，F(x)$\wedge$G(y)はF(x)とG(y)を$\wedge$で結んだ式であり，F(x)とG(y)はそれぞれが独立して

いるのだからｘとｙとの間に相関関係があるとは思われない。

それゆえ，F(x)∧G(f) において，f はｘに依存していないのではないか。となると，３行目において f_x と書くことに問題があるのではないか。

ここで，２つの方法が考えられる。

１つは，暫定定項と自由変項の間に相関関係があるための条件を見つけること。

もう１つは，今まで我々が得た規則のみを使い，工夫をこらすことで f がｘと独立であることを示す方法である。

論理学的には後者の方が望ましい。そしてまた，実際にそのような方法があるのである。

ここで，その演繹を行う。

(1)	1	$\forall x \exists y(F(x) \wedge G(y))$		P
(1)	2	$\exists y(F(x) \wedge G(y))$		2 UI
(1)	3	$F(x) \wedge G(f)$	f_x	2 EI
(1)	4	$G(f)$		3 TF
(1)	5	$\exists y G(y)$		4 EG
(1)	6	$G(g)$	g	5 EI
(1)	7	$F(x)$		3 TF
(1)	8	$F(x) \wedge G(g)$		7，6 TF
(1)	9	$\forall x(F(x) \wedge G(y))$		8 UG
(1)	10	$\exists y \forall x(F(x) \wedge G(y))$		9 EG

以上。

４，５，６行目を注目しなければならない。ｘに依存しない新しい暫定定項 g を持ってきたところが工夫の跡ということになる。

５．まとめ

以上の考察により，議理式 ϕ があるとき，それを普遍汎化できるための条件を述べることができる。

すなわち，

Ｙをその中に自由な変項としてもつ命題 ϕ があるとき，（ただし，Ｙは ϕ の中になくてもよい）ϕ をその同型選例とするところの「$\forall x\psi$」を付け加えてよい。すなわち，ϕ と ψ の関係は $\psi_{x/Y}=\phi$ である。

ただし，Ｙは，

① ϕ のどの前提の中でも自由で現れていてはいけない。

② ϕ 及び ψ の前提のどれかに現れるどの暫定定項の添字としてもマークされていてはいけない。

ここで，ϕ，ψ というギリシア文字を用いたのはメタ言語としての論理式という意味である。

述語論理の構文論的体系はいくつかあるが，例えば Hilbert型の公理系の推論規則には次のようなものがある。

$\vdash A \supset B(x) \Rightarrow \vdash A \rightarrow \forall x B(x)$

ただし，Ａにはｘが自由変項として含まれていないものとする。

筆者が小論を書いた動機は，上記のただし書きの本当の意味が今まで説明されていないと思ったからである。

小論によって，その意味が少しでも明確になれば幸いである。

参考文献

(1) W.V.O.クワイン：論理学の方法，岩波書店，1961

(2) E.Mendelson : Introduction to Mathematical do gic, Van Nostrand, 1964

(3) 藤川吉美：記号論理学，大竹出版，1986

(4) ヒルベルト，アッカーマン：記号論理学の基礎，大阪教育図書，1954