ファジィ合成演算子の双対性

宮城　雅夫*　東　るみ子**　宮城　隼夫**

Duality of Fuzzy Composite Operators

Norio MIYAGI, Rumiko AZUMA and Hayao MIYAGI

Abstract: There exist a number of operations in fuzzy relation equation or fuzzy reasoning, depending on the composite law of fuzzy relation. Two of them, which are representative operators, are Max-min composite operation and Min-max composite operation. The operation that is generally used well is the Max-min composite operation, but there is little literature that explains the reason. Similarly, there is almost no research that shows the reason why Min-max composite operation is not widely used in reasoning. In this paper, the mutual relation between both operators and their nature are studied, after which it will be easier to judge the kind of problems each operation is suited to and to define a good operator according to a given problem. Through this study, it can be concluded that Max-min and Min-max composite operators are dual. First, research is done on the circuits through which Max-min and Min-max operators can be illustrated. Then both operators are proposed in terms of mathematical nature, and it can be proved that they are completely dual. In addition to the above, the relations between these operators and others are studied. It is also shown that the solution of fuzzy relation equation with some composite operator can be derived from the solution for the dual composite operator.

Keywords: Max-min composite operation, Min-max composite operation, Duality, Fuzzy relation equation, Fuzzy reasoning

1．まえがき

人間の判断の主観的あいまいさを定量的に解析する概念として，L.A.Zadehによって提案されたファジィ集合がある。ファジィ理論は純粋代数学としてだけでなく，システム工学，制御工学などのさまざまな工学分野への応用理論として研究されてきた。また近年，エキスパートシステムとしてのファジィ制御の実用化や，ファジィ推論チップの開発も盛んに行われている。

ファジィ理論の一つファジィ関係は，従来の「xとyは等しい」というような明確な関係に対して，「xとyはよく似ている」のように２つの量のあいまいな関係を定義するものである[1]。通常の関係の一般化としてのファジィ関係は，ファジィシステムにおける同定問題や診断問題における重要な概念の一つになっている。

ファジィ関係式の演算には，ファジィ関係の合成法によって様々なものがあるが，代表的なものに，Max-min 合成演算，Min-max 合成演算がある。基本的にファジィ集合で用いられる演算には，max 演算と min 演算があり，これらの組み合わせによって合成演算が定義されている。これらの演算はファジィ制御，ファジィ推論などのファジィ集合を取り扱う演算において用いられる。しかしながら，ファジィ関係式やファジィ推論で扱われる演算としては Max-min 合成演算が多く使われ，Min-max 合成演算はあまり用いられない。

本論文では，Max-min 合成演算と Min-max 合成演算の性質と関係について考察する。これらを考察することで，どのような問題にどの演算が適しているのかを容易に判断することができ，またこれら以外の，ある問題により適した演算を定義することが可能になる。それと同時に，ファジィ推論における Max-min 合成演算の妥当性も明らかにすることができる。

*機械工学科
College of Technology, Dai-Ichi University
**琉球大学工学部（〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町字千原１）
Faculty of Engineering, Ryukyu University

一方，ファジィ関係式の解法に関する研究も活発に行われており，その代表的なものに，塚本・田代の ω 演算による方法，宮城・譜久村・山下[2][3]の基準・補助行列法，宮城・范・山下[4]のⓈ合成演算法，Ⓣ合成演算法などがある。本論文では，各ファジィ合成演算子の相互関係を考察することにより，Max-min 合成演算の解法を用いて Min-max 合成演算およびその他の合成演算の解を導出することができることも示す。その結果，各合成に対する関係式の解法を個別に提案する必要がなくなり，解法を構築する際の手間を省くことができる。

2．諸定義

数学的準備として，以下にファジィ合成演算，ファジィ関係式に関する定義を行う。

定義1：Max-min および各合成演算

SをX×Yにおけるファジィ関係，TをY×Zにおけるファジィ関係とすると，S と T の Max-min 合成演算と Min-max 合成演算は X×Z におけるファジィ関係となり，それぞれ次のように定義される。

$$S \circ T \Leftrightarrow \mu_{S \circ T}(x,z) = \bigvee_{y} \{\mu_S(x,y) \wedge \mu_T(y,z)\} \tag{1}$$

$$S \triangle T \Leftrightarrow \mu_{S \triangle T}(x,z) = \bigwedge_{y} \{\mu_S(x,y) \vee \mu_T(y,z)\} \tag{2}$$

ただし，$\circ$ は Max-min 合成演算，$\triangle$は Min-max 合成演算を表す。また，S と T のMax-max 合成演算は

$$S \square T \Leftrightarrow \mu_{S \square T}(x,z) = \bigvee_{y} \{\mu_S(x,y) \wedge \mu_T(y,z)\} \tag{3}$$

Min-min合成演算は

$$S \nabla T \Leftrightarrow \mu_{S \nabla T}(x,z) = \bigwedge_{y} \{\mu_S(x,y) \wedge \mu_T(y,z)\} \tag{4}$$

と定義される。ただし，□は Max-max 合成演算，▽は Min-min 合成演算を表している。

定義2：Max-min および各合成ファジィ関係式

Max-min 合成ファジィ関係式と Min-max 合成ファジィ関係式および Max-max，Min-min 合成ファジィ関係式をそれぞれ次式のように定義する。

$$R \circ a = b \tag{5}$$

$$R \triangle a = b \tag{6}$$

$$R \square a = b \tag{7}$$

$$R \nabla a = b \tag{8}$$

ただし，

$$a = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$$

$$b = [b_1, b_2, \cdots, b_m]^T$$

$$R = \{r_{ij}\}, (i = 1,2,\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots,n)$$

であり，Tは転置を意味する。上記のファジィ関係式は図1に示すようなファジィシステム[5]を表現したものとみなすことができる。a はファジィ入力（原因，刺激），b はファジィ出力（結果，反応），R は a と b のファジィ関係を表す。

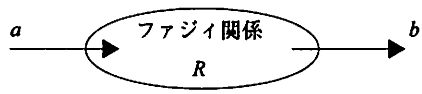

図1　ファジィシステム

3．Max-min 合成演算および Min-max 合成算の双対性

まず，max 演算とmin 演算の性質と関係について考察を行う。

3.1　Max演算とMin演算の概念

ファジィ理論では a と b の max，min を

$$\max(a,b) = a \vee b,\quad \min(a,b) = a \wedge b$$

のように表す。max 演算はいくつかある値の中から最も大きな値をとる演算である。そこで，各値，a, b をパスの“許容性の大きさ”と考えると，max 演算は図2のように並列回路で表現することができる。

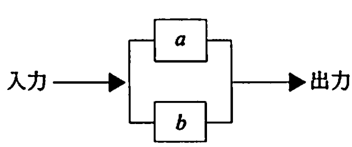

図2　max演算回路

すなわち，出力値（演算で得られた値）は，入力から出力まで通すことのできる最大の許容値を表している。同様に考えるとmin 演算は各値の中から最も小さな値をとる演算であり，図3のような直列回路で表すことが

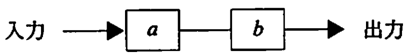

図3 min演算回路

できる。
min 演算における出力は，直列回路において入力から出力まで通すことのできるパスの許容値を表している。

3.2 Max，Min演算の数理的関係

ファジィ行列の要素 a, b を用いて両演算の数理的性質について考察する。

$$a>b \tag{9}$$

要素 a, b に次のような大小関係があるとする。
これら a, b に対してmax 演算およびmin 演算を行うと

$$a\vee b=a \tag{10}$$
$$a\wedge b=b \tag{11}$$

となる。(9)，(10)，(11)式からわかるように(9)式の不等号の向きによって max 演算と min 演算の結果が逆転する。この性質を利用すれば，a, b の大小関係を反転させる何らかの演算操作を a, b に施し，max 演算ののち再び演算操作を行うことによって min 演算の結果を導出することが可能になる。すなわち，大小関係を反転させる演算操作を“$*$”で表すと

$$a^*\vee b^*=b^* \tag{12}$$

が得られ，結果のに再び$*$演算操作を行うと

$$(b^*)^*=b \tag{13}$$

となり(11)式のmin演算結果と同じ値になる。$*$演算操作としては，符号反転，逆数などいろいろ考えられるが，ファジィ理論では[0,1]区間の値しか存在しないため，補集合演算 $\overline{a}=1-a$ を採用する。

補集合演算の合理性はド・モルガンの法則[6]を用いて示すことができる。ド・モルガンの法則により

$$A\cup B=\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}} \tag{14}$$

となる。ただし

$$A\cup B\Leftrightarrow\mu_A(x)\vee\mu_B(z) \tag{15}$$
$$A\cap B\Leftrightarrow\mu_A(x)\wedge\mu_B(z) \tag{16}$$
$$A\Leftrightarrow 1-\mu_A(x) \tag{17}$$

であり，集合を示す大文字の上の“ー”は通常の補集合を表す。ここで

$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\Leftrightarrow 1-\{(1-\mu_A(x))\wedge(1-\mu_B(x))\} \tag{18}$$

なる関係が得られるので，最終的に(14)式から

$$\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=1-\{(1-\mu_A(x))\wedge(1-\mu_B(x))\} \tag{19}$$

となる。(19)式の左辺は max 演算を表しており，右辺は $\mu_A(x)$，$\mu_B(x)$それぞれの補集合演算結果を min 演算した後，全体を再び補集合演算することを示している。

3.3 双対性

前節で，max 演算と min 演算は並列回路と直列回路で表すことができ，また補集合演算を施すことで互いの演算結果が得られることがわかった。これは一般に回路理論やグラフ理論で用いられる双対[7][8]な関係と対応させて考えることができる。双対とは対をなす定理，概念，学問体系を言う。また互いに双対であれば，一方を解くことができれば，他方の解は双対関係から即座に得られるという性質がある。このことから考えて，max と min 演算は補集合演算に対して双対であると言える。次に max，min 演算を利用して Max-min 合成演算と Min-max 合成演算を回路図で表すと図4，図5のようになる。

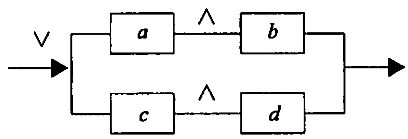

図4 Max-min 合成演算回路

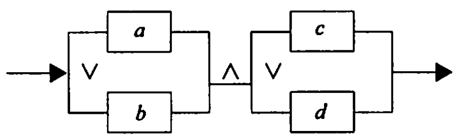

図5 Min-max 合成演算回路

すなわち，Max-min 合成演算は直並列回路，Min-max 合成演算は並直列回路で表すことができる。また max 演算，min 演算の数理的性質を使うと，$a, b\ c, d$ に対するMax-min 合成演算を

$$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)=e \tag{20}$$

のように表したとき，e の補集合演算結果 $\overline{e}$ はMin-max 合成演算を用いて次式のように表わされる。

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{d}) = \bar{e} \tag{21}$$

Max-min 合成演算と Min-max 合成演算の対応関係をまとめると表1のようになり，(20)式，(21)式の関係から Max-min 合成演算と Min-max 合成演算も双対な関係であることがわかる。

表1　Max-min，Min-max 合成演算の対応関係

演算	帰属度	回路
Max-min	a　b　c　d　e	直並列回路
Min-max	$\bar{a}$　$\bar{b}$　$\bar{c}$　$\bar{d}$　$\bar{e}$	並直列回路

3.4　ファジィ推論におけるMax-min合成演算とMin-max合成演算

これまでのことから Max-min 合成演算と Min-max 合成演算は補集合演算に対して双対であることがわかった。ここでは簡単な数値例を用いて Max-min 合成演算は直並列回路，Min-max 合成演算は並直列の回路で表すことができるかどうかについて考察する。

風邪と各症状の関係に関する次のようなデータが医者から与えられているとする。

$$\text{風邪と各症状の関係 } R^T = \text{風邪}\,[\overset{\text{頭痛}}{0.5}\quad \overset{\text{筋肉痛}}{0.6}\quad \overset{\text{熱}}{0.8}] \tag{22}$$

この関係に対し，患者 x の頭痛の度合い，筋肉痛の度合い，熱の高さの度合いが次のように与えられたとき，患者 x の風邪の度合いを推論する問題を考える。

$$\text{患者 x の各症状の度合い} = \text{x}\,[\overset{\text{頭痛}}{0.0}\quad \overset{\text{筋肉痛}}{1.0}\quad \overset{\text{熱}}{0.5}] \tag{23}$$

(23)式は(5)式および(6)式のファジィ入力の各要素になる。このとき Max-min 合成演算と，Min-max 合成演算を使ってファジィ推論を行い，x が風邪である度合いを求め，その結果から2つの合成演算の相違点を考察する。

3.4.1　Max-min合成演算

(22)式をファジィ関係，(23)式をファジィ入力としたとき Max-min 合成演算によって x が風邪である度合いを求めると次のようになる。

$$x\,[\overset{\text{頭}}{0.0}\quad \overset{\text{筋}}{1.0}\quad \overset{\text{熱}}{0.5}] \circ \begin{array}{c} \text{風邪} \\ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{頭} \\ \text{筋} \\ \text{熱} \end{array} = [\overset{\text{xが風邪である度合い}}{b}] \tag{24}$$

(24)式を計算すると

$$(0 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.6) \vee (0.5 \wedge 0.8) = 0.6 \tag{25}$$

となる。はじめに各要素に対して min 演算を行うことで，各症状から見た患者 x が風邪である度合いを求めることができる。このことから min 演算は個々の条件に一致する事実の確信度から，条件全体としての確信度を求める演算であると言える。すなわち，両方を確実に満たしている度合いを選ぶ結果となる。(25)式から，患者 x を筋肉痛の症状から診て風邪だと確実に言える度合いは少なくとも0.6になる。

次に各症状から診た患者 x が風邪である各度合いに max演算を行う。これはそれぞれの確信度から総合的な可能性を求めることを意味している。すなわち，最終結果の0.6という値は，確実に患者 x が風邪である度合いではなく，x が風邪である可能性の度合いを表していることになる。

3.4.2　Min-max合成演算

(24)式の合成演算を Min-max 合成演算に置き換えてファジィ推論を行なう。すると計算結果は

$$(0 \vee 0.5) \wedge (1 \wedge 0.6) \wedge (0.5 \vee 0.8) = 0.5 \tag{26}$$

となる。ここで，患者 x の頭痛の度合いが0なのに，max 演算をすることで頭痛という病状から診たとき患者 x が風邪である度合いが0.5となる。この結果は人間の感覚から考えて不自然である。このことから，“可能性の度合い”を用いる推論問題では，相互関係がある要素に対して Min-max 演算を行うと，人間の感覚と矛盾した結果を出すことになる。これは前節で考察した各合成演算の回路図に置き換えてもわかる。

図6のように Max-min 演算に対応した直並列回路の図

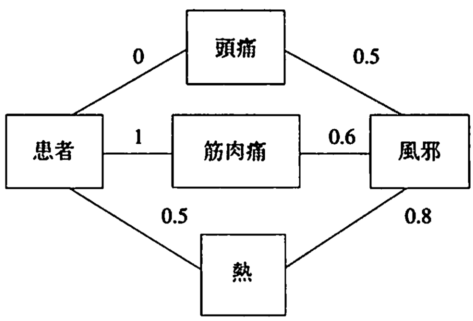

図6　Max-min 合成演算に対応させた患者と各症状と風邪の関係図

では，患者，各症状と風邪の関係を容易にイメージすることが出来る。しかしながら Min-max 演算に対応した並直列な回路図では３つの関係をうまく表現することは出来ない。すなわち，可能性を求める推論問題においては Min-max 演算は不向きであることがわかる。逆に“非可能性の度合い”を扱ったとき，Max-min 演算が非現実的な結果を出すことになる。

以上のことからファジィ推論において，Max-min 合成演算は“可能性”，Min-max 演算は“非可能性”を扱った問題に対して意味を持ち，このことからも Max-min 合成演算と Min-max 合成演算が双対な関係であることがわかる。

4．ファジィ診断問題におけるシステムの双対性

次にファジィ診断問題について考察を行う。診断問題とは図1においてファジィ関係 R とファジィ出力 b が既知のとき，ファジィ入力 a を求める問題である。診断問題を解く過程を図示すると図7のようになる。

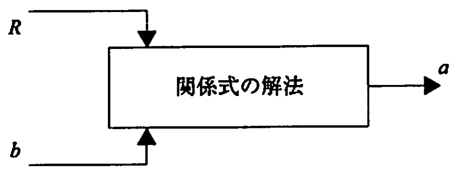

図7　ファジィ診断問題の解

図7において，解法が Max-min 合成ファジィ関係式の解法であるとき，通常は Min-max 合成ファジィ関係式の解を求めることはできない。

そこで，本論文では3章で述べた合成演算の双対性を使い，Max-min 合成ファジィ関係式の解法を利用して Min-max 合成演算を用いたファジィ関係式の解を求める方法を考える。

4.1　Max-min合成関係式の解法による Min-max 合成関係式の解

Max-min 合成演算と Min-max 合成演算の双対性については3.3節で論じた。ここでは，図7のように Max-min 合成ファジィ関係式の解法を用いているシステムに対し，その演算を変えることなく，Min-max 合成ファジィ関係式の解を導く方法を提案する。診断問題の解法としては宮城・范・山下[4]Ⓢ合成演算法とⓘ合成演算法を用いる。

(5)式の Max-min 合成ファジィ関係式を要素で表現すると

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i1} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{27}$$

となり，i 行目を1出力をもつファジィ関係式と考えた場合次式によって書き換えることができる[9]。

$$\bigvee_j (r_{ij} \wedge a_j) = b_i \quad for \quad \forall i, \forall j \tag{28}$$

(28)式の Max-min 合成ファジィ関係式の解法として，s 演算が次のように定義されている。

$$r_j \;\; s \;\; b$$

$$= \begin{cases} b\,(for \;\; r_{j=k} > b) & ,[0,b]\,(for \;\; r_{j\neq k} > b) \\ [b,1]\,(for \;\; r_{j=k} = b) & ,[0,1]\,(for \;\; r_{j\neq k} = b) \\ [0,1]\,(for \;\; r_j < b) & \end{cases} \tag{29}$$

(基準解)　　　　(補助解)

ここで(29)式の右辺の左部分を「基準解」，右部分を「補助解」と呼んでいる。これを用いると(27)式の解 a は

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 s b_1 \;\; \cap\cdots\cap \;\; n_{i1} s b_i \;\; \cap\cdots\cap \;\; n_{m1} s b_m \\ \vdots \\ n_j s b_1 \;\; \cap\cdots\cap \;\; n_{ij} s b_i \;\; \cap\cdots\cap \;\; n_{mj} s b_m \\ \vdots \\ n_n s b_1 \;\; \cap\cdots\cap \;\; n_{in} s b_i \;\; \cap\cdots\cap \;\; n_{mn} s b_m \end{bmatrix} \tag{30}$$

で与えられる。すなわち合成演算子Ⓢは

$$[r_1, r_2, \cdots, r_m] Ⓢ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= (r_1 s b_1) \cap (r_2 s b_2) \cap \cdots (r_m s b_m) \tag{31}$$

と定義される。

同様に，(6)式の Min-max 合成ファジィ関係式を要素で表現すると次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i1} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \triangle \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{32}$$

あるいは

$$\bigwedge_j (r_{ij} \vee a_j) = b_i \tag{33}$$

(33)式に対してt 演算は次のように定義されている。

$$r_j \quad t \quad b$$

$$= \begin{cases} b\,(for \quad r_{j=k} < b) & ,[b,0]\,(for \quad r_{j\neq k} < b) \\ [b,0]\,(for \quad r_{j=k} = b) & ,[0,1]\,(for \quad r_{j\neq k} = b) \\ & \ [0,1]\,(for \quad r_{j\neq k} > b) \end{cases} \tag{34}$$

（基準解）　　　　（補助解）

(32)式の解をt 演算を用いて求めると

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1tb_1 \ \cap\cdots\cap \ n_{i1}tb_i \ \cap\cdots\cap \ n_{m1}tb_m \\ \vdots \\ n_j\,tb_1 \ \cap\cdots\cap \ n_{ij}\,tb_i \ \cap\cdots\cap \ n_{mj}\,tb_m \\ \vdots \\ n_n\,tb_1 \ \cap\cdots\cap \ n_{in}\,tb_i \ \cap\cdots\cap \ n_{mn}\,tb_m \end{bmatrix} \tag{35}$$

となり，合成演算子ⓣは

$$[r_1, r_2, \cdots, r_m]\,ⓣ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= (r_1tb_1) \cap (r_2tb_2) \cap \cdots (r_mtb_m) \tag{36}$$

と定義される。

これらⓢ合成演算とⓣ合成演算の双対性を考察し，(29)式のs 演算を使って(34)式のt 演算の結果を求めていく。Max-min 合成演算と Min-max 合成演算が補集合演算に対して双対な関係があることがわかっているので，まず，次式のように関係 Rと出力b の各要素に対して補集合演算を施す。

$$\bar{r}_{ij} = 1 - r_{ij}, \qquad \bar{b}_i = 1 - b_i \tag{37}$$

これらを解法システムへの新たな入力として(29)式の s 演算の定義に代入すると

$$\bar{r}_j \quad s \quad \bar{b}$$

$$= \begin{cases} \bar{b}\,(for \quad \bar{r}_{j=k} > \bar{b}) & ,[0,\bar{b}]\,(for \quad \bar{r}_{j\neq k} > \bar{b}) \\ [\bar{b},1]\,(for \quad \bar{r}_{j=k} = \bar{b}) & ,[0,1]\,(for \quad \bar{r}_{j\neq k} = \bar{b}) \\ & \ [0,1]\,(for \quad \bar{r}_{j\neq k} < \bar{b}) \end{cases} \tag{38}$$

となる。(38)式が図7におけるシステムの出力部分に相当する。この段階での解は $\bar{a}_j = \bigcap_i (\bar{r}_{ij}\, s\bar{b}_i)$ の形になっているため，これに再度補集合演算を施すことによってa_j 求がまる。これを確認するために，(38)式の右辺に補集合演算を行うと

右辺=

$$\begin{cases} b\,(for \quad r_{j=k} < b) & ,[\bar{0},b]\,(for \quad r_{j\neq k} < b) \\ [b,\bar{1}]\,(for \quad r_{j=k} = b) & ,[\bar{0},\bar{1}]\,(for \quad r_{j\neq k} = b) \\ & \ [\bar{0},\bar{1}]\,(for \quad r_{j\neq k} > b) \end{cases} \tag{39}$$

となり(34)式のt 演算の定義と同じ結果が得られる。これよりⓢ合成演算を使い，ⓣ合成演算の結果を求めることが可能であることがわかる。すなわち，図7の関係Rと出力b の要素に補集合演算を施し，出力された結果$\bar{a}$ の要素に再び補集合演算を行えば Max-min 合成ファジィ関係式の解法で Min-max 合成ファジィ関係式の解が得られることになり，その逆も言える。このような Min-max 合成ファジィ関係式の解法を図を使って表すと図8のようになる。またこの結果よりs 演算とt 演算についても双対の関係があることがわかる。

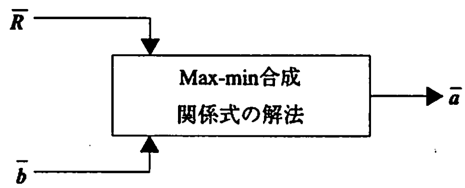

図8　Max-min 合成関係式の解法による Min-max 合成関係式の解の導出

4.2　Max-min 合成関係式の解法による Min-min 合成関係式の解

Max-min 合成ファジィ関係式の解法で Min-min 合成ファジィ関係式の解を導出する方法を考える。宮城・范・山下の論文[4]では Max-min 合成関係式および Min-max 合成関係式の解法しか定義されていないため，Min-min 合成関係式の解法における考察が行えない。そのためにまず，本論文で宮城・范・山下と同じ手法

で Min-min 合成関係式の解法として新たに u 演算を定義する。

(8)式における Min-min 合成関係式を要素で表現すると次のようになる。

$$\bigwedge_j (r_{ij} \wedge a_j) = b_i \tag{40}$$

本論文では(40)式に対して u 演算を次式のように定義する。

$$r_j \;\; u \;\; b = \begin{cases} b\,(for\;\; r_{j=k}>b) & ,[b,1]\,(for\;\; r_{j\neq k}>b) \\ [b,1]\,(for\;\; r_{j=k}=b) & ,[b,1]\,(for\;\; r_{j\neq k}=b) \\ & \;\;\phi\;\;(for\;\; r_{j\neq k}<b) \end{cases} \tag{41}$$

(41)式の u 演算をもとに，Max-min 合成関係式の解法を使って Min-min 合成関係式の解を導き出す方法を考える。これらの合成演算を比較すると，はじめに行う min 演算が同じであることがわかる。すなわち後で行う演算，max と min 演算だけが双対であるため，Max-min 合成演算と Min-min 合成演算は部分的な双対（以下，不完全双対システムと呼ぶ）と言える。したがって s 演算と u 演算においても同様なことが言え，基準解は全く同じであるため，補助解だけが双対な関係になる。

まず，次のように既知である関係 R と出力 b の要素に補集合演算を施す。

$$\bar{r}_{ij} = 1 - r_{ij}, \qquad \bar{b}_i = 1 - b_i \tag{42}$$

これらを新たな入力として(29)式の s 演算の補助解だけに代入をすると

$$\bar{r}_j \;\; s \;\; \bar{b} = \begin{cases} b\,(for\;\; r_{j=k}>b) & ,[0,\bar{b}]\,(for\;\; \bar{r}_{j\neq k}>\bar{b}) \\ [b,1]\,(for\;\; r_{j=k}=b) & ,[0,1]\,(for\;\; \bar{r}_{j\neq k}=\bar{b}) \\ & \;\;[0,1]\,(for\;\; \bar{r}_{j\neq k}<\bar{b}) \end{cases} \tag{43}$$

となる。この段階での補助解は $\bar{a}_j$ の形になっているため，これに再度補集合演算を施すことで最終結果 a_j の値が求まる。これを確認するため，(43)式の右辺の補助解に補集合演算を行うと

右辺

$$= \begin{cases} b\,(for\;\; r_{j=k}<b) & ,[0,1]\,(for\;\; r_{j\neq k}>b) \\ [b,1]\,(for\;\; r_{j=k}=b) & ,[0,1]\,(for\;\; r_{j\neq k}=b) \\ & \;\;[b,1]\,(for\;\; r_{j\neq k}<b) \end{cases} \tag{44}$$

となる。しかしながら，補助解は基準解をもとに導出するために，Max-min 合成関係式と Min-max 合成関係式の関係のようにただ補集合演算を施すだけでは Min-min 合成関係式の解を求めることはできない。この不完全双対関係の場合は，(44)式から区間値 [0, b]を引くことで解の導出が可能になる。この区間値は，s 演算の補助解の区間と u 演算の補助解の区間において一致していない範囲を表している。(44)式の補助解の区間値から [0, b]を引くと

右辺

$$= \begin{cases} b\,(for\;\; r_{j=k}>b) & ,[b,1]\,(for\;\; r_{j\neq k}>b) \\ [b,1]\,(for\;\; r_{j=k}=b) & ,[b,1]\,(for\;\; r_{j\neq k}=b) \\ & \;\;\phi\;\;(for\;\; r_{j\neq k}<b) \end{cases} \tag{45}$$

となり，(41)式の u 演算と同様の結果が得られる。ただし，ここで条件 $r_{j\neq k}<b$ における区間値[b, 1]から[0, b]は引くことができないので，その値を ϕ とする。前節で示した Max-min 合成関係式と Min-max 合成関係式の双対関係とは異なり，基準解には既知である R と b の要素をそのまま代入し，補助解には R と b の要素に補集合演算を施した値を代入する。そして補助解の部分から得られた結果だけに再度補集合演算を行い，それらの値から区間値[0, b]を引くことによって解が求まる。この過程を図9に示す。

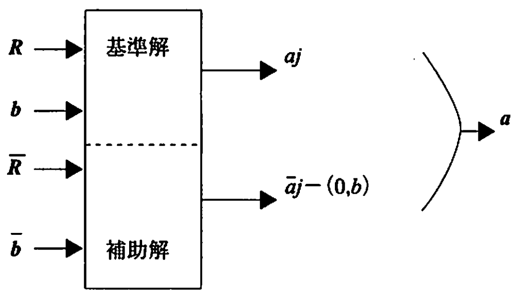

図9　Max-min 合成関係式の解法による Min-min 合成関係式の解の導出

4.3　Min-max 合成関係式の解法による Max-max 合成関係式の解

Min-max 合成ファジィ関係式の解法を使って Max-max 合成ファジィ関係式の解を求める方法を考える。

まず Min-min 合成ファジィ関係式同様，Max-max 合成関係式の解法として v 演算を新たに定義する。(7)式の関係式における Max-max 合成演算を要素で表すと

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i1} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (46)$$

あるいは

$$\bigvee_j (r_{ij} \vee a_j) = b_i \qquad (47)$$

となる。(47)式に対する解法 v 演算を次式のように定義する。

$$r_j \;\; v \;\; b$$

$$= \begin{cases} b\,(for \;\; r_{j=k} < b) & ,[0,b]\,(for \;\; r_{j\neq k} > b) \\ [0,b]\,(for \;\; r_{j=k} = b) & ,[0,b]\,(for \;\; r_{j\neq k} = b) \\ & \phi \;\; (for \;\; r_{j\neq k} < b) \end{cases} \qquad (48)$$

Max-min と Min-min 合成関係式の場合と同様に，Min-max 合成関係式と Max-max 合成関係式も不完全双対であることがわかる。そのため既知である関係 R と出力 b の要素に補集合演算を施し，(34)式の t 演算の右辺の補助解部分に代入すると

右辺

$$= \begin{cases} b\,(for \;\; r_{j=k} < b) & ,[\bar{b},1]\,(for \;\; \bar{r}_{j\neq k} < \bar{b}) \\ [0,b]\,(for \;\; r_{j=k} = b) & ,[0,1]\,(for \;\; \bar{r}_{j\neq k} = \bar{b}) \\ & [0,1]\,(for \;\; \bar{r}_{j\neq k} > \bar{b}) \end{cases} \qquad (49)$$

となる。(49)式が図7における解法システムの出力値となる。出力された値のうち，基準解はそのまま出力された値が解となるが，補助解の部分は $\bar{a}_j$ となっているためこれに再度補集合演算を行うと

右辺

$$= \begin{cases} b\,(for \;\; r_{j=k} < b) & ,[0,1]\,(for \;\; r_{j\neq k} < b) \\ [0,b]\,(for \;\; r_{j=k} = b) & ,[0,1]\,(for \;\; r_{j\neq k} = b) \\ & [0,b]\,(for \;\; r_{j\neq k} > b) \end{cases} \qquad (50)$$

が得られる。前節同様，補助解は基準解をもとに導出するために，ただ補集合演算を施すだけでは Max-max 合成関係式の解を求めることはできない。そこで(50)式の補助解の値から区間値[0, b]を引くことで解の導出を可能にする。この区間値は，t 演算の補助解の区間と v 演算の補助解の区間において一致していない範囲を表している。結果的に(50)式は

右辺

$$= \begin{cases} b\,(for \;\; r_{j=k} < b) & ,[0,b]\,(for \;\; r_{j\neq k} < b) \\ [0,b]\,(for \;\; r_{j=k} = b) & ,[0,b]\,(for \;\; r_{j\neq k} = b) \\ & \phi \;\; (for \;\; r_{j\neq k} > b) \end{cases} \qquad (51)$$

となり，v 演算と同じ出力値になる。ただし，ここでも (50)式の条件 $r_{j\neq k} > b$ における区間値[0, b]から[b, 1]を引くことができないため，条件が $r_{j\neq k} > b$ のときの値は ϕ とする。以上より，Min-max 合成関係式の解法を用いて Max-max 合成関係式の解を求めることが可能である。

4.4　Max-max 演算と Min-min 演算におけるシステムの双対性

Max-max 合成ファジィ関係式の解法を使い Min-min 合成ファジィ関係式の解を導出する方法を考える。Max-max合成関係式と Min-min 合成関係式は演算の過程から Max-min，Min-max 合成関係式の関係と同じように完全な双対システムであることがわかる。ここでは，本論文で定義した演算と演算を用いて考察する。この場合，図7における関係式の解法部分は Max-max ファジィ関係式の解法であるⓥ合成演算法になる。

まず，図7において既知である関係 R と出力 b の要素に次式のように補集合演算を施す。

$$\bar{r}_{ij} = 1 - r_{ij}, \qquad \bar{b}_i = 1 - b_i \qquad (52)$$

これらを解法システムへの新たな入力として，(48)式の v 演算の定義に代入すると

$$\bar{r}_j \;\; v \;\; \bar{b}$$

$$= \begin{cases} \bar{b}\,(for \;\; \bar{r}_{j=k} < \bar{b}) & ,[0,\bar{b}]\,(for \;\; \bar{r}_{j\neq k} < \bar{b}) \\ [0,\bar{b}]\,(for \;\; \bar{r}_{j=k} = \bar{b}) & ,[0,\bar{b}]\,(for \;\; \bar{r}_{j\neq k} = \bar{b}) \\ & [0,1]\,(for \;\; \bar{r}_{j\neq k} > \bar{b}) \end{cases} \qquad (53)$$

となる。(53)式が図7におけるシステムの出力部分に相当する。この段階では $\bar{a}_j = \bigcap_i (\bar{r}_{ij} \; v \bar{b}_i)$ の形になってい

るため，これに再度補集合演算を施すことによって a_j が求まる。これを確認するために，(53)式の右辺に補集合演算を行うと

右辺

$$
=\begin{cases} b\,(for \;\; r_{j=k}>b) & ,[b,1]\,(for \;\; r_{j\neq k}>b) \\ [b,1]\,(for \;\; r_{j=k}=b) & ,[b,1]\,(for \;\; r_{j\neq k}=b) \\ & \phi \;\; (for \;\; r_{j\neq k}<b) \end{cases} \tag{54}
$$

となり，(41)式の u 演算と同じ結果が得られる。これより Max-max 合成ファジィ関係式の解法を使って Min-min 合成ファジィ関係式の解を導出することができることがわかる。

5．数値例

以下に簡単な数値例を使って，各演算の双対性と解の関係について説明をする。

5.1　Max-min 演算と Min-max 演算の解法における双対性

Min-max 合成ファジィ関係式が次のように与えられたとする。

$$
\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \triangle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix} \tag{55}
$$

このとき$\textcircled{t}$合成演算法を用いて解を求めると解は $\boldsymbol{a}$

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \textcircled{t} \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} \tag{56}
$$

となる。

次に，(56)式の解を Max-min 合成ファジィ関係式の解法を用いて導出する。

(55)式のファジィ出力 $\boldsymbol{b}$，ファジィ関係 R の要素に補集合演算を施し，これを s 演算の定義に代入すると

$$
\begin{bmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0.8} & \overline{0.6} & \overline{0.3} \\ \overline{0.5} & \overline{0.2} & \overline{0.7} \\ \overline{0.3} & \overline{0.7} & \overline{1.0} \end{bmatrix} \textcircled{s} \begin{bmatrix} \overline{0.4} \\ \overline{0.3} \\ \overline{0.6} \end{bmatrix} \tag{57}
$$

となる。この場合，解 $\boldsymbol{a}$ の補集合演算値は $\overline{\boldsymbol{a}}$

$$
\begin{bmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\overline{0.8} \;\; s \;\; \overline{0.4}) \cap (\overline{0.6} \;\; s \;\; \overline{0.3}) \cap (\overline{0.3} \;\; s \;\; \overline{0.6}) \\ (\overline{0.5} \;\; s \;\; \overline{0.4}) \cap (\overline{0.2} \;\; s \;\; \overline{0.3}) \cap (\overline{0.7} \;\; s \;\; \overline{0.6}) \\ (\overline{0.3} \;\; s \;\; \overline{0.4}) \cap (\overline{0.7} \;\; s \;\; \overline{0.3}) \cap (\overline{1.0} \;\; s \;\; \overline{0.6}) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} (0.2 \;\; s \;\; 0.6) \cap (0.4 \;\; s \;\; 0.7) \cap (0.7 \;\; s \;\; 0.4) \\ (0.5 \;\; s \;\; 0.6) \cap (0.8 \;\; s \;\; 0.7) \cap (0.3 \;\; s \;\; 0.4) \\ (0.7 \;\; s \;\; 0.6) \cap (0.3 \;\; s \;\; 0.7) \cap (0.0 \;\; s \;\; 0.4) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} [0,\ 1] & \cap & [0,\ 1] & \cap & 0.4 \\ [0,\ 1] & \cap & 0.7 & \cap & [0,\ 1] \\ 0.6 & \cap & [0,\ 1] & \cap & [0,\ 1] \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \tag{58}
$$

となる。ここで解 $\boldsymbol{a}$ を求めるために(58)式の $\overline{\boldsymbol{a}}$ の右辺に再度補集合演算を行う。すると解 $\boldsymbol{a}$ は

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} \tag{59}
$$

となり，(56)式の Min-max 合成ファジィ関係式の解と同じ結果となる。

5.2　Max-max 演算と Min-min 演算の解法における双対性

Min-min 合成ファジィ関係式が次のように与えられたとする。

$$
\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.7 \\ 0.1 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} \tag{60}
$$

このとき，Min-min 合成ファジィ関係式の解法である$\textcircled{u}$合成演算を用いて(60)式を解くと

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \textcircled{u} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} [0.3,\ 1] \\ [0.3,\ 1] \\ [0.3,\ 1] \end{bmatrix} \tag{61}
$$

となる。

(61)式の Min-min 合成ファジィ関係式の解を Max-max 合成ファジィ関係式の解法であるⓥ合成演算を使って求める。まず，(60)式のファジィ関係 $\boldsymbol{R}$ とファジィ出力 $\boldsymbol{b}$ の要素に補集合演算を施し，これを v 演算の定義に代入し

$$\begin{bmatrix}\overline{a_1}\\ \overline{a_2}\\ \overline{a_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{0.8} & \overline{0.6} & \overline{0.1}\\ \overline{0.5} & \overline{0.2} & \overline{0.7}\\ \overline{0.3} & \overline{0.7} & \overline{1.0}\end{bmatrix} ⓥ \begin{bmatrix}\overline{0.3}\\ \overline{0.2}\\ \overline{0.1}\end{bmatrix} \tag{62}$$

を得る。これを計算すると

$$\begin{bmatrix}\overline{a_1}\\ \overline{a_2}\\ \overline{a_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\overline{0.8} \ v \ \overline{0.3})\cap(\overline{0.6} \ v \ \overline{0.2})\cap(\overline{0.1} \ v \ \overline{0.1})\\ (\overline{0.5} \ v \ \overline{0.3})\cap(\overline{0.2} \ v \ \overline{0.2})\cap(\overline{0.7} \ v \ \overline{0.1})\\ (\overline{0.3} \ v \ \overline{0.3})\cap(\overline{0.7} \ v \ \overline{0.2})\cap(\overline{1.0} \ v \ \overline{0.1})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.2 \ v \ 0.7)\cap(0.4 \ v \ 0.8)\cap(0.9 \ v \ 0.9)\\ (0.5 \ v \ 0.7)\cap(0.8 \ v \ 0.8)\cap(0.3 \ v \ 0.9)\\ (0.7 \ v \ 0.7)\cap(0.3 \ v \ 0.8)\cap(0.0 \ v \ 0.9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[0,\ 0.7] \cap [0,\ 0.8] \cap [0,\ 0.9]\\ [0,\ 0.7] \cap [0,\ 0.8] \cap [0,\ 0.9]\\ [0,\ 0.7] \cap [0,\ 0.8] \cap [0,\ 0.9]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[0,\ 0.7]\\ [0,\ 0.7]\\ [0,\ 0.7]\end{bmatrix} \tag{63}$$

となる。導出された(63)式の結果に再び補集合演算を行うと

$$\begin{bmatrix}[\bar{0},\ \overline{0.7}]\\ [\bar{0},\ \overline{0.7}]\\ [\bar{0},\ \overline{0.7}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[0.3,\ 1]\\ [0.3,\ 1]\\ [0.3,\ 1]\end{bmatrix} \tag{64}$$

となり，(61)式のⓤ合成演算を使った結果と同じになる。

6．あとがき

本論文では，ファジィの分野で使われる，Max-min 合成演算と Min-max 合成演算の関係について考察した。その結果，Max-min 合成演算は直並列回路で，Min-max 合成演算は並直列回路で表現することができ，これらは互いに双対な関係であることがわかった。また，Max-min 合成演算と Min-max 合成演算は数理的観点，人間の感覚的な点からも双対の関係であることを示した。

さらに，“互いが双対な関係であるとき，2つのうち一方を解くことができれば，他方の解は即座に得られる”という双対論を利用することで，ある演算の解法を使い，他の演算の解を導出することを可能にした。その際，Max-min 合成ファジィ関係式と Min-max 合成ファジィ関係式の間には完全な双対性がみられ，解法システムの入力と出力に補集合演算を行うことで互いの解を導出することができることを示した。一方，Max-min 合成演算と Min-min 合成演算，Min-max 合成演算と Max-max 合成演算は双方とも部分的な双対関係にあり，解法システムにおいて補助解の入力と出力を操作することで他方の解を求めることができる。これにより，ある一つの合成ファジィ関係式の解法を用いて各種合成によるファジィ関係式を解くことが可能となり，各合成に対する関係式の解法を個別に構築するという手間を省くことができる。

参考文献

[1] 坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用，森北出版，1989

[2] 宮城・譜久村・山下：除外のルールを用いたファジィ関係式の解法，日本ファジィ学会誌，Vol.10，No.1，pp.168-175，1998

[3] H.Miyagi，H.Fukumura & K.Kamiya：Algorithmfor Solution of Fuzzy Relation Equations, Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Florida, pp.4005-4009，1997.

[4] 宮城・范・山下：合成演算子を用いたフィジィ関係式の解法，電気学会論文誌C，2001（4月号）

[5] 中島信之・竹田英二・石井博昭：ファジィ理論入門，裳華房，1994

[6] 廣田薫：ファジィシステム，計測自動制御学会，1990

[7] 松本忠：電気回路論入門，ブレイン図書出版，1977

[8] 尾崎弘・大野克郎・榊米一郎：電気回路(1)，オーム社，1968

[9] Y.Fan & H.Miyagi：Studying on Solution of Fuzzy Relation Equations, Proceedings of KES'99 International Conference, Adelaide, pp.357-359, 1999.