

H_∞ ノルムと指定ゲインの反復計算法

出川 喬庸

A Recursive Computation Method of H_∞ norm Assignment Gain

Tadayasu DEGAWA

This report considers a recursive computation method for solving the problem of H_∞ norm assignment by state feedback in single input linear time invariant system.

We have already proposed an assignment method of H_∞ norm by state feedback in multi input linear time invariant systems for the case in which external input matrix is equal to control input matrix. In this report we treat the case in which external input matrix is not always equal to control input matrix.

H_∞ norm assignment by state feedback is considered as the inverse of H_∞ norm computation. If it is given state matrix, input matrix, output matrix and direct transfer matrix, then H_∞ norm can be computed. Inversely, if it is given input matrix, output matrix, direct transfer matrix, and H_∞ norm, then state feedback gain which gives state matrix for closed loop system can be computed recursively.

In this report we use two iterative computation methods because analytical methods fail. One is based on the polynomial relations between H_∞ norm and parameters. Other is Newton's numerical computation method. In the former method, although convergence do not depend on initial guess, convergence depend on assigned H_∞ norm, and possible assignment value of H_∞ norm are limited within comparatively narrow range in which assigned H_∞ norm is somewhat larger.

In Newton's method, iterations will converge quickly to the root if the initial guess is close enough to the actual root, but iterations will diverge if the initial guess is not close enough to the actual root.

Therefore, the former method is used to find initial guess and Newton's method is used to compute gains which assign lower H_∞ norm.

Finally, state feedback gain which assign H_∞ norm for the numerical example of the system are computed and validated.

Keywords: linear system, single input system, H_∞ norm assignment, state feedback

1 まえがき

本研究では、線形固定係数系に対する状態フィードバックによる閉ループ系の H_∞ ノルムの指定について検討する。

外部入力と制御入力の行列が等しい多入力系については、既に検討済みであるが、ここでは外部入力と制御入力の行列が異なる単入力系に対する状態フィード

バックによる H_∞ ノルムの指定法を考察する。

H_∞ ノルムは最大特異値のピークであり、系の状態方程式から H_∞ ノルムを計算する方法はいろいろあるが、可制御正準系への変換とそれから得られる多項式行列を使って、 H_∞ ノルムを含む特異値のピークとその周波数を 2 元連立高次代数方程式の解から直接得る方法も考えられる。

系の状態行列、入力行列、出力行列および直達行列

が与えられるとその系の H_∞ ノルムが求められる。したがって、指定する H_∞ ノルムが状態フィードバックによって実現できる場合、条件によっては、 H_∞ ノルムを計算する方法を逆にして指定した H_∞ ノルムを与える状態フィードバック・ゲインを計算することもできる。直達行列がなく外部入力と制御入力の行列が等しい場合、系の入力行列、出力行列および H_∞ ノルムが与えられると、系の状態行列と状態フィードバック・ゲインが直接求められることが分かっている。しかし、外部入力と制御入力の行列が等しくても直達行列がある場合、および外部入力と制御入力の行列が異なる場合、方程式を満たす系の状態行列と状態フィードバック・ゲインを直接求めることはできないので、繰り返し計算に頼らなければならない。

2つの繰り返し計算法が考えられる。1つ目の方法は状態フィードバック・ゲインと H_∞ ノルムの関係を表す多項式を直接利用する計算法であり、2つ目の方法はニュートン法である。前者では収束が初期値のとり方に依存しないが、閉ループ系の可制御標準系への変換行列が状態フィードバック・ゲインによって変化するため、この変換行列自体も繰り返し計算で求めなければならないため計算量が多く、指定する H_∞ ノルムが小さくなってくると、計算の収束が悪くなる傾向が見られる。後者では計算量が少なく最終段階の収束は速いが、収束が初期値のとり方に依存する。そのため、 H_∞ ノルムが大ききときは初期値のとり方に依存しない前者の計算法を使い、それで求められたゲインを初期値として、近傍の低い H_∞ ノルム指定にはニュートン法を使う。

種々の単入力系の数値例について H_∞ ノルムを指定する状態フィードバック・ゲインを本方法で計算し、閉ループ系の H_∞ ノルムが指定どおりになることを確認する。

2 問題の記述

対象となる系は、つぎの方程式で記述される。

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_1 w + b_2 u \\ z &= C_p x_p + d u \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $x_p \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $w \in \mathbb{R}^1$ は外部入力、 $u \in \mathbb{R}^1$ は制御入力、 $z \in \mathbb{R}^1$ は評価出力である。

つぎの状態フィードバック則を考える。

$$u = k_p x_p \quad (2)$$

閉ループ系はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_1 w \\ z &= C_k x_p \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、

$$A_k = A_p + b_2 k_p, \quad C_k = C_p + d k_p \quad (4)$$

w から z までの閉ループ系の伝達行列はつぎのようになる。

$$W(s) = C_k (sI - A_k)^{-1} b_1 \quad (5)$$

A_k を安定行列にし、かつ H_∞ ノルムを指定する値に一致させるゲイン行列 k_p が存在するための条件は満たされているものとする。

状態フィードバックによる w から z までの閉ループ系の H_∞ ノルムが予め指定する周波数のとき指定する値で得られるゲインの計算法を導くことが研究の目的である。

3 閉ループ系の H_∞ ノルム

H_∞ ノルムについて、つぎの補題がある。

H_∞ ノルムを $\|W(s)\|_\infty$ で表すと、式(3)の系が可制御のとき、正の定数 γ に対して、 $\|W(s)\|_\infty \leq \gamma$ であるための必要十分条件はリカッチ代数方程式

$$A_k^T P + P A_k + (1/\gamma^2) P b_1 b_1^T P + C_k^T C_k = 0 \quad (6)$$

を満たす実準正定解 P が存在することである。

上の補題を満たす最小の γ が H_∞ ノルムを与える。(6)式を基にすると次式が得られる。

$$f(-s, l) f(s, l) = a(-s) a(s) - \mu S^T(-s) C^T C S(s) \quad (7)$$

ここで、 l は μ によって決まる n 次元行ベクトル

$$f(s, l) \equiv a(s) + l S(s) \quad (8)$$

$$S^T(s) \equiv [1 \quad s \quad s^2 \quad \cdots \quad s^{n-1}] \quad (9)$$

$$a(s) \equiv s^n + a S(s) \quad (10)$$

$$a \equiv -g A_k^T T^{-1} = a_p - k \quad (11)$$

$$k \equiv k_p T^{-1}, \quad C = C_k T^{-1} \quad (12)$$

$$\Psi \equiv [b_1 \quad A_k b_1 \quad A_k^2 b_1 \quad \cdots \quad A_k^{n-1} b_1] \quad (13)$$

g は Ψ^{-1} の第 n 行ベクトル

$$T \equiv \begin{bmatrix} g^T & A_k^T g^T & (A_k^T)^2 g^T & \cdots & (A_k^T)^{n-1} g^T \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$a_p \equiv -g_p^T A_p^T T_p^{-1} \quad (15)$$

$$\Psi_p \equiv [b_1 \quad A_p b_1 \quad A_p^2 b_1 \quad \cdots \quad A_p^{n-1} b_1] \quad (16)$$

g_p は Ψ_p^{-1} の第 n 行ベクトル

$$T_p \equiv \begin{bmatrix} g_p^T & A_p^T g_p^T & (A_p^T)^2 g_p^T & \cdots & (A_p^T)^{n-1} g_p^T \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

H_∞ノルムと指定ゲインの反復計算法

$$\mu \equiv 1/\gamma^2 \quad (18)$$

(7)式で、方程式 $f(s, l) = 0$ のすべての根が左半平面内に存在する最大の (方程式 $f(s, l) = 0$ が虚軸上に根をもつ最小の) μ が H_∞ ノルムを与える。

A_p, b_1, b_2, C_p, d と状態フィードバック・ゲイン k_p が与えられたとき、(7)式を用いると閉ループ系の H_∞ ノルムとその周波数を計算できる。したがって、逆に A_p, b_1, b_2, C_p, d が与えられ、閉ループ系の H_∞ ノルムとその周波数にそれぞれ γ_c と ω_c を指定するとき、方程式 $f_c(s) = 0$ が虚軸上に根 $s = \pm j\omega_c$ ($\omega_c > 0$) をもち、他の根は左半平面内に根を持つ $f_c(s)$ と、 $\mu = 1/\gamma_c^2$ を選定し、つぎの式

$$a(-s)a(s) = f_c(-s)f_c(s) + \mu S^T(-s)C^TCS(s) \quad (19)$$

を満たす状態フィードバック・ゲイン k_p があれば、それによる閉ループ系の H_∞ ノルムは指定した γ_c になる。

γ_c が H_∞ ノルムであることは、方程式 $f_c(s) = 0$ の根と同一の固有値をもつ可制御な単入力系の可制御正準系の状態行列を A 、入力行列を b とすると、(19)式を満たす状態フィードバック・ゲイン k が系 $\dot{x}_p = Ax + bu$ に対する評価関数 $J = \int (x^T \mu C^T C x + u^2) dt$ をもつ最適レギュレータの解に相当するので $\{A, C\}$ が可制御ならば、 $\mu_c > 0$ である限り(19)式から求められる $a(s)$ が方程式 $a(s) = 0$ のすべての根を左半平面内におき、したがって $\mu_c > \mu > 0$ である限り(7)式から求められる $f(s, l)$ が方程式 $f(s, l) = 0$ のすべての根を左半平面内におくことから明らかである。

4 H_∞ ノルム指定の計算法

H_∞ ノルム指定は閉ループ系の H_∞ ノルムを予め指定した値に一致させるゲインを求めることを意味する。(3)式の閉ループ系が与えられると(7)式を用いて H_∞ ノルムを求めることができる。逆に(1)式の閉ループ系が与えられるとき、先に H_∞ ノルムの値を指定して、(19)式から状態フィードバック・ゲインを求めるのが H_∞ ノルム指定の問題である。 $b_1 \neq b_2$ のときは、(19)式の左辺の C の計算のために閉ループ系の可制御正準系への変換行列 T したがってフィードバック・ゲイン k が必要であり、また逆に k のためには(19)式の $a(s)$ したがって C が必要であるため、1回の計算だけでは状態フィードバック・ゲインを求めることができない。そこで、つぎのような2つの繰り返し計算を考える。ただし、添え字 j は繰り返し計算回数を示す。

(i)ゲインと H_∞ ノルムの関係式を直接利用する計算式

$$a_{j+1}(-s)a_{j+1}(s) = f_c(-s)f_c(s) + \mu S^T(-s)C_j^T C_j S(ss) \quad (20)$$

ここで、

$$a_j(s) \equiv s^n + a_j S(s) \quad (21)$$

$$C_j \equiv C_k T_j^{-1} \quad (22)$$

$$A_{kj} \equiv A_p + b_2 k_{pj}, \quad C_{kj} \equiv C_p + d k_{pj} \quad (23)$$

$$k_{pj} \equiv k_j T_j \quad (24)$$

$$T_j \equiv \left[g_j^T \quad A_{k1}^T g_j^T \quad (A_{k1}^T)^2 g_j^T \quad \cdots \quad (A_{k1}^T)^{n-1} g_j^T \right]^T \quad (25)$$

$$\Psi_j \equiv [b_1 \quad A_{k1} b_1 \quad A_{k1}^2 b_1 \quad \cdots \quad A_{k1}^{n-1} b_1] \quad (26)$$

g_j^T は Ψ_j^{-1} の第 n 行ベクトル

k_{pj} を与えると、(20)式から $a_{j+1}(s)$ が定まる。さらに、 $k_{p(j+1)}$ はつぎの式が成り立つように定まる。

$$|sI - A - b_2 k_{p(j+1)}| = a_{j+1}(s) \quad (27)$$

そうすると再び(23)(24)式から C_{j+1} が決まり、(20)式から $a_{j+2}(s)$ が定まる。以上の計算を C_j と C_{j+1} および k_{pj} と $k_{p(j+1)}$ の差が微小になるまで繰り返し、 $k_p = k_{pj}$ とする。

求めるべきゲイン k が存在するものとするれば、(19)式が成立つ。 $C_p = 0$ 、 $d = 1$ の場合 $C_c = k_p$ であるから、(19)式から(20)式を引くと、次式を得る。

$$E_{j+1} = \mu E_j + h_{j+1}(s) \quad (28)$$

$$\text{ここで、} E_j \equiv S^T(-s) \{k^T k - k_j^T k_j\} S(s) \quad (29)$$

$$h_j \equiv S^T(s) \{k - k_j\}^T a_p(s) \quad (30)$$

$$+ a_p(-s) \{k - k_j\} S(s)$$

この式からつぎの式が得られる。

$$E_j = \mu^j E_0 + \sum_{l=1}^j \mu^{j-l} h_l \quad (31)$$

したがって、 $j \rightarrow \infty$ のとき $\mu \geq 1$ ならば E_j は発散するかまたは一定になるが、 $\mu < 1$ ならば E_0 の項は消え、 E_j の収束と発散は上式の両辺に k と k_j の差に関する項が含まれるため、 $a_p(s)$ 、 b_1 、 b_2 と μ によって左右される。

$C_p = 0$ 、 $d \neq 0$ かつ $d \neq 1$ の場合 $C_c = d k_p$ であり、(30)式に対応するつぎの式が得られる。

$$E_j = (d^T d \mu)^j E_0 + \sum_{l=1}^j (d^T d \mu)^{j-l} h_l \quad (32)$$

したがって、 $j \rightarrow \infty$ のとき $d^T d \mu \geq 1$ ならば、 E_j は発散するかまたは一定になり、 $d^T d \mu < 1$ ならば、 E_0 の項は消える。 $d^T d$ の値が収束に大きく影響する。

(ii)ニュートン法の計算式

$$k_{pj}^{i+1} = k_{pj}^i - J^{-1}(k_{pj})q(k_{pj}) \quad (33)$$

ここで, $q^T(k_{pj}) \equiv [a_1(s_1) \ a_1(s_2) \ \dots \ a_1(s_n)]$ (34)

$$J(k_{pj}) \equiv \frac{\partial q(k_{pj})}{\partial k_{pj}} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial a(s_1)}{\partial k_{p1}} & \dots & \frac{\partial a(s_1)}{\partial k_{pn}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a(s_n)}{\partial k_{p1}} & \dots & \frac{\partial a(s_n)}{\partial k_{pn}} \end{bmatrix} \quad (35)$$

収束は初期値に依存する。初期推定値を求めるためにはもう一つの繰り返し計算を使う。収束するときにはベクトル $q(k_{pj})$ が零ベクトルに収束する。 $J(k_{pj})$ は解析的に求めることは難しいので、数値的に求める。

5 数値計算例

H_∞ ノルム指定の数値計算例を示す。

【例1】対象となる系は単入力単出力の4次系とする。

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有値は3, $-2.11 \pm j1.89$, 5.22であり, 系は不安定である。

(1) 周波数 ω が2のとき H_∞ ノルム γ_c を2.0に指定するフィードバック・ゲインを計算する。

(2) $f_c(s)$ の固有値は周波数に対応する $\pm j2$ と他の左半平面内で任意に指定する2つの根 $-1, -2$ とする。

$$f_c(s) = (s^2 + 4)(s + 1)(s + 2)$$

(3) $k_{p0} = 0$ とする。

(4) 計算の繰り返し回数6回で, k_p はつぎのようになった。

$$k_p = [-5.57 \ 3.42 \ -2.22 \ -3.74]$$

Fig.1は閉ループ系の特異値を示し, 確かに H_∞ ノルムは周波数2のとき2になっている。

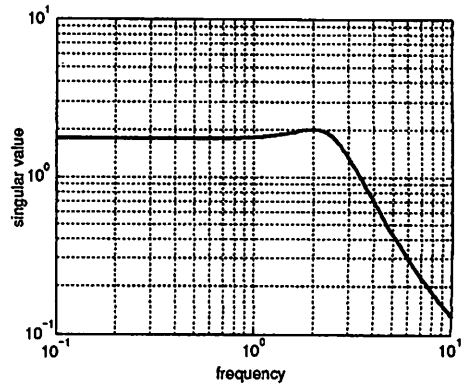


Fig.1 Singular value

【例2】 A, b_1, b_2 は例1と同じで, $c = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$, $d = 1$ の系とする。

(1) 収束の比較のため, 周波数 ω が2のとき H_∞ ノルム γ_c を5.0, 4.0, 3.0および2.9の4通りの H_∞ ノルムを指定してフィードバック・ゲインを計算する。

(2) $f_c(s)$ は例1と同じとする。

(3) $k_{p0} = 0$ とする。

(4) 各場合の計算の繰り返し回数, ゲイン k_p はつぎのようになった。いずれの場合も, 閉ループ系の周波数と H_∞ ノルムは指定どおりの値が得られた。繰り返し回数はゲイン k_{pj} の各要素の相対誤差の絶対値の最大値が0.001より小さくなるまでの計算回数としている。

$\gamma_c = 5.0$ のとき, 繰り返し回数: 16回

$$k_p = [-4.89 \ 0.945 \ -2.22 \ -6.42]$$

$\gamma_c = 4.0$ のとき, 繰り返し回数: 21回

$$k_p = [-3.79 \ -1.25 \ -3.01 \ -9.31]$$

$\gamma_c = 3.0$ のとき, 繰り返し回数: 46回

$$k_p = [4.46 \ -12.3 \ -7.72 \ -25.1]$$

$\gamma_c = 2.9$ のとき, 繰り返し回数: 76回

$$k_p = [8.23 \ -17.0 \ -9.41 \ -31.7]$$

指定できる H_∞ ノルムの十分な範囲内では計算の繰り返し回数が H_∞ ノルムにはほぼ反比例し, 指定できる H_∞ ノルムの限界に近づくとき計算の繰り返し回数が急激に増加している。

Fig.2は各場合の閉ループ系の特異値を示し, すべて H_∞ ノルムは指定どおりになっている。

(5) さらに, $\gamma_c = 2.9$ のときの k_p を最初の初期値としてニュートン法によって計算すると $\gamma_c = 2.57$ まで

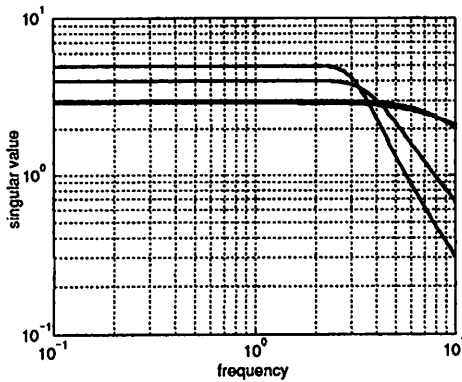


Fig. 2 Singular values

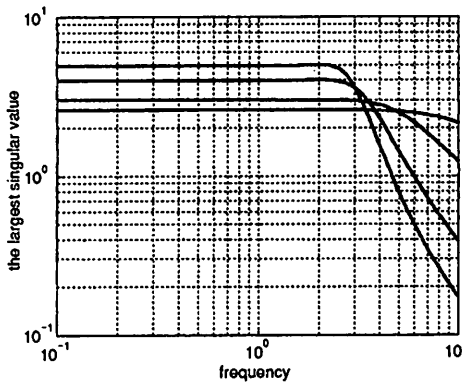


Fig. 3 The largest singular values

指定することができた。そのときの k_p はつぎのようになった。

$$k_p = [158. \quad -206. \quad -66.1 \quad -279.]$$

ゲインが急激に大きくなっている。

【例3】 A, b_1, b_2 は例1と同じで、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の単入力2出力系とする。

(1) 収束の比較のため、周波数 ω が2のとき H_∞ ノルム γ_c を5.0, 4.0, 3.0および2.6の4通りの H_∞ ノルムを指定してフィードバック・ゲインを(i)の方法で計算する。

(2) $f_c(s)$ は例1と同じとする。

(3) $k_{p0} = 0$ とする。

(4) 各場合の計算の繰り返し回数と、 k_p はつぎの

ようになった。

$\gamma_c = 5.0$ のとき、繰り返し回数：13回

$$k_p = [-5.18 \quad 1.69 \quad -1.93 \quad -5.40]$$

$\gamma_c = 4.0$ のとき、繰り返し回数：23回

$$k_p = [-4.56 \quad 0.109 \quad -2.34 \quad -7.37]$$

$\gamma_c = 3.0$ のとき、繰り返し回数：37回

$$k_p = [-1.11 \quad -5.58 \quad -4.46 \quad -15.1]$$

$\gamma_c = 2.6$ のとき、繰り返し回数：59回

$$k_p = [10.1 \quad -21.0 \quad -9.12 \quad -35.7]$$

計算の繰り返し回数は例2とほぼ同様な傾向になっている。

Fig.3は各場合の閉ループ系の最大特異値を示し、すべて H_∞ ノルムは指定どおりになっている。 $\gamma_c = 2.6$ が(i)の方法で指定できる下限であった。

(5) さらに、 $\gamma_c = 2.6$ のときの k_p を最初の初期値としてニュートン法によって計算すると $\gamma_c = 2.362$ まで指定することができた。そのときの k_p はつぎのようになった。

$$k_p = [235. \quad -330. \quad -81.2 \quad -423.]$$

ゲインが急激に大きくなっている。

6 あとがき

本報告では、単入力系に限定して外部入力と制御入力の行列が必ずしも等しくない場合に、状態フィードバックによる閉ループ系のための H_∞ ノルムを指定するゲインの計算法を考えた。

外部入力と制御入力の行列が等しく、外部出力に制御入力の直達がない場合、 H_∞ ノルムを指定するゲインは一度の計算で求められるが、外部出力に制御入力の直達がある場合および外部入力と制御入力の行列が等しくない場合は繰り返し計算で求めることになる。2つの繰り返し計算法の併用を考え、数値計算により、意図した結果が得られることを確認した。

ゲインと H_∞ ノルムの関係式を直接利用する計算法では指定する H_∞ ノルムが大きいき選定する初期値に関係なく収束する。収束するまでの繰り返し計算の回数は指定する H_∞ ノルムが小さくなるとき、限界以上では H_∞ ノルムにはほぼ反比例して多くなり、限界付近では急激に多くなる。また、限界以下の H_∞ ノルムを指定しようとするが発散するという結果が得られた。

ニュートン法では初期値が解から遠く離れていると発散するが、初期値さえ解の近傍に選べば、収束までの計算回数は指定する H_∞ ノルムが指定できる限界以

上である限り H_{∞} ノルムに関係なく数回であり、前者に比べて小さい H_{∞} ノルムが指定できるという結果が得られた。

指定できる H_{∞} ノルムの下限付近では、 H_{∞} ノルムの値を少し変えただけで、ゲインは大きく変わることも分かった。

今後は外部入力と制御入力の行列の要素が異なる多入力系についても、状態フィードバックによる閉ループ系のための H_{∞} ノルムを指定するゲインの計算法を検討していくつもりである。

参考文献

- 1) W.A. Wolovich: Linear Multivariable Systems. New York: Spring Verlag, 1974
- 2) Kemin Zhou: Essentials of Robust Control. Prentice Hall, 1998
- 3) 出川: 状態フィードバック・ゲイン計算の一方
法, 第21回Dynamical System Theoryシンポジウム,
pp213~216, 1998
- 4) 出川: 最適レギュレータの一計算法, 第28回制御
理論シンポジウム資料, pp219~222, 1999
- 5) 出川: 線形最適レギュレータの一計算法, 第22回
Dynamical System Theoryシンポジウム, pp187~
190, 1999
- 6) 出川: H_{∞} ノルムの一計算法, 第29回制御理論シ
ンポジウム資料, pp223~226, 2000
- 7) 出川: H_{∞} ノルムの計算と指定, 第23回 Dynamic-
al System Theoryシンポジウム, pp275~278, 2000
- 8) 出川: H_{∞} ノルム指定の一計算法, 第1回制御部
門大会資料, pp455~458, 2001