

一次元複合形非線形システムの安定パターン類別

宮城 雅夫* 宮城 隼夫**

Pattern Classification for the Stability of Unknown Nonlinear-Feedback Systems

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

In this paper, a pattern classification technique for systems with arbitrary nonlinearities has been presented. Classification based on the Lur -type nonlinear system is carried out by using the robust perturbation technique. Nonlinearities are regarded as the nonlinear perturbations of the Lur -type nonlinear system. Stability theorems for the pattern classification of several nonlinear feedbacks are derived. In those theorems, the Lur -type Lyapunov function is well utilized.

Key Words: Pattern Classification, Nonlinear Feedback System, Robust Stability, Lyapunov Method

1. 緒 言

システムの安定性の解析にリアプノフ法を適用する場合、解析の糸口を与えるリアプノフ関数を見つけることが重要な課題となる。非線形フィードバックシステムに対するリアプノフ関数構成法としては、ポポフの条件から導かれる安定条件と等価な結果を与えるルーリエ形リアプノフ関数を導く手法が一般的であり、各方面で採用されている^{1)~4)}。

一方、摂動法を用いた最適制御システムの構築も活発に研究されており⁵⁾、ロバスト安定性の解析では伝達関数の摂動分からシステムのロバスト性能を引き出す手法がよく用いられている^{5), 6)}。

工学システムに現れる非線形性は、多くの場合、線形システムに付加された形で与えられる。そこで、本研究ではフィードバック要素が一次元で与えられ、ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数とそれ以外の非線形関数の和で表される複合形非線形システムを対象に安定解析を行う。すなわち、ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数以外の非線形関数を、ルーリエ形非線形システムの摂動ととらえ、ロバスト摂動法により、任意の非線形システムの安定

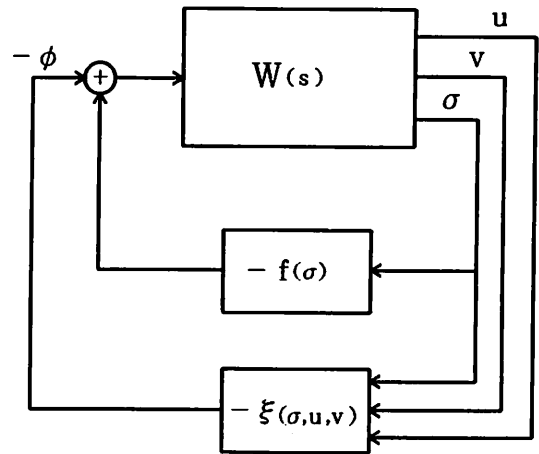


Fig.1 Nonlinear Feedback System

パターン類別を行い、類別された非線形関数の性質を導出する。

2. 問題の設定

複合形非線形フィードバックシステムにおいて、ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数以外の非線形関数に一般性をもたせた次のシステムを考える。

* 機械工学科

College of Technology, Dai-Ichi University

** 琉球大学工学部 (〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原1)

Faculty of Engineering, Ryukyu University

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax - b f(\sigma) - b \phi \\
 \phi &= \xi(\sigma, u, v) \\
 \sigma &= c^T x \\
 u &= d^T x \\
 v &= e^T x
 \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、非線形関数 $f(\sigma)$ は連続で微分可能な $\sigma f(\sigma) \geq 0$ かつ $f(0)=0$ を満たす関数である。

式(1)で示されるシステムのブロック線図は Fig.1 で与えられる。

非線形フィードバック ϕ を線形システムの摂動分とみなすために、式(1)を次の3つの式に変形する。

$$\dot{x} = A^\sigma x - b f(\sigma) \tag{2}$$

$$\dot{x} = A^u x - b f(\sigma) \tag{3}$$

$$\dot{x} = A^v x - b f(\sigma) \tag{4}$$

ただし、式(2)~(4)において

$$A^\sigma = A - b c^T \phi / \sigma$$

$$A^u = A - b d^T \phi / u$$

$$A^v = A - b e^T \phi / v$$

であり、 ϕ/σ 、 ϕ/u 、 ϕ/v は、非線形摂動項となる。

式(1)で表されるシステムの $f(\sigma)$ 、 $-\sigma$ 間の線形部分の伝達関数 $W(s)$ は

$$W(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \tag{5}$$

で与えられ、平衡点は $x=0$ となる。本論文では、 $W(s)$ は $W(\infty)=0$ を満足し、式(1)は $W(s)$ の最小実現であるものとする。

本研究の目的はシステムが安定になるための $\phi = \xi(\sigma, u, v)$ の条件を見出し、非線形フィードバックをパターン類別することである。ここでは、工学で頻出する4つのタイプの非線形関数を非線形フィードバックとみなし、システムが安定性を保つための非線形関数の条件を導出する。

3. 非線形フィードバックシステムの安定性

ここでは、フィードバックのないシステムが線形システムになることに着目し、2次形式と非線形項の積分の和の形で与えられるルーリエ形リアプノフ関数を基盤に、ロバスト摂動法を用いてシステムが安定パターンをもつための $\xi(\sigma, u, v)$ の制約条件を導出する。

【定理1】

もし、伝達関数 $Z(s) = (n+qs)W(s)$ が正実関数なら

$$\begin{aligned}
 A^T P + P A &= -U^T \\
 P b &= n c + q A^T c - l w_0 \\
 w_0^2 &= q (c^T b + b^T c)
 \end{aligned} \tag{6}$$

を満足する実対称正定行列 P 、ベクトル l 、スカラー w_0 が存在する。ただし、 n は非負の定数であり、 q は正の定数である。 ■

ここで、次の条件を満足するとき、 $Z(s)$ は正実となる。

i) $Z(s)$ の要素は $\text{Re}(s) \geq 0$ に対して解析的である。

ii) $Z^*(s) = Z(s^*)$

iii) $Z(s) + Z^T(s^*)$ は $\text{Re}(s) \geq 0$ に対して半正定値となる。

ただし、* は共役を表している。

次に、各種非線形フィードバックをもつシステムに対して安定定理を導く。

3・1 $\xi(\sigma, u, v) = g(u)$ で与えられるシステムこのシステムは、いわゆるルーリエ形複合フィードバックシステムに相当し、次の安定定理を得ることができる。

【定理2】

もし、伝達関数 $Z(s)$ が正実関数ならば、次式を満足する $g(u)$ のパターンに対して式(1)のシステムは安定である。

$$\begin{aligned}
 \frac{g(u)}{u} \left[\left(P b + \frac{1}{2} l w_0 \right) d^T + d \left(P b + \frac{1}{2} l w_0 \right)^T \right. \\
 \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{g(u)}{u} \right) w_0^2 d d^T \right] \geq 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

ただし、 $u \neq 0$ である。 ■

〈定理2の証明〉

式(1)で表されるシステムのリアプノフ関数として、次のルーリエ形リアプノフ関数を用いる。

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + q \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \tag{8}$$

式(8)の時間導関数を求め、さらに式(6)の関係を用いて整理すれば、

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= -\frac{1}{2} \left[x^T l - w_0 \left(f(\sigma) + \frac{1}{2} g(u) \right) \right]^2 - n \sigma f(\sigma) \\
 &\quad - \frac{1}{2} x^T \left[\frac{g(u)}{u} \left\{ P b + \frac{1}{2} l w_0 \right\} d^T \right. \\
 &\quad \left. + d \left\{ P b + \frac{1}{2} l w_0 \right\}^T - \frac{1}{4} \left(\frac{g(u)}{u} \right) w_0^2 d d^T \right] x
 \end{aligned} \tag{9}$$

となり、 $\dot{V}(x)$ は式(7)の条件のもとに半負定値となる。したがって、式(8)の $V(x)$ はリアプノフ関数となり、式(1)のシステムの安定性が保証される。

3・2 $\xi(\sigma, u, v) = u g(\sigma)$ で与えられるシステムこのシステムは出力変数と、従来の非線形関数との積

の形で与えられる積形複合フィードバックシステムであり、次の安定定理が得られる。

【定理3】

もし、伝達関数 $Z(s)$ が正実関数ならば、次式を満足する $g(\sigma)$ のパターンに対して式(1)のシステムは安定である。

$$g(\sigma) \left[\left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right) d^T + d \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T - \frac{1}{4}g(\sigma)w_0^2 dd^T \right] \geq 0 \quad (10)$$

【定理3の証明】

式(8)の $V(x)$ の時間導関数を求め、式(6)の関係をを用いて整理すれば、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -\frac{1}{2} \left[x^T l - w_0 \left(f(\sigma) + \frac{1}{2}ug(\sigma) \right) \right]^2 - nof(\sigma) \\ & - \frac{1}{2} x^T \left[g(\sigma) \left\{ \mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right\} d^T \right. \\ & \left. + d \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T - \frac{1}{4}g(\sigma)w_0^2 dd^T \right] x \quad (11) \end{aligned}$$

となり、 $\dot{V}(x)$ は式(10)の条件のもとに半負定値となる。したがって、リアプノフの安定定理に基づき、式(1)のシステムの原点近傍における安定性が保証される。

3・3 $\xi(\sigma, u, v) = \sigma g(u)$ で与えられるシステムこのシステムは出力変数と従来の非線形関数との積の形で与えられる積形複合フィードバックシステムであり、次の安定定理が得られる。

【定理4】

伝達関数 $Z(s)$ が正実であり、次式を満足する $g(u)$ のパターンに対して、式(1)のシステムは安定である。

$$g(u) \left[\left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right) c^T + c \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T - \frac{1}{4}g(u)w_0^2 cc^T \right] \geq 0 \quad (12)$$

【定理4の証明】

式(8)の $V(x)$ の時間導関数を求め、式(6)の関係をを用いて整理すれば、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -\frac{1}{2} \left[x^T l - w_0 \left(f(\sigma) + \frac{1}{2}\sigma g(u) \right) \right]^2 - nof(\sigma) \\ & - \frac{1}{2} x^T \left[g(u) \left\{ \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right) c^T \right. \right. \\ & \left. \left. + c \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T - \frac{1}{4}g(u)w_0^2 cc^T \right\} \right] x \quad (13) \end{aligned}$$

となり、 $\dot{V}(x)$ は式(12)の条件のもとに半負定値となる。したがって、リアプノフの安定定理に基づき、式(1)の

システムの原点近傍における安定性が保証される。

3・4 $\xi(\sigma, u, v) = g(u)h(v)$ で与えられるシステム このシステムは、非線形関数の積で表されるシステムであり、いわゆる一般積形複合システムに相当する。このシステムに対しては、次の2つの安定定理を導くことができる。

【定理5】

伝達関数 $Z(s)$ が正実であり、次式を満足する $g(u)$ 、 $h(v)$ のパターンに対して、式(1)のシステムは安定である。

$$\begin{aligned} \left(\frac{g(u)}{u} \right) h(v) \left[\left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right) d^T + d \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{g(u)}{u} \right) h(v) w_0^2 dd^T \right] \geq 0 \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、 $u \neq 0$ である。

【定理6】

伝達関数 $Z(s)$ が正実であり、次式を満足する $g(u)$ 、 $h(v)$ のパターンに対して、式(1)のシステムは安定である。

$$\begin{aligned} g(u) \left(\frac{h(v)}{v} \right) \left[\left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right) e^T + e \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T \right. \\ \left. - \frac{1}{4}g(u) \left(\frac{h(v)}{v} \right) w_0^2 ee^T \right] \geq 0 \quad (15) \end{aligned}$$

ただし、 $v \neq 0$ である。

【定理5、定理6の証明】

定理5に対して、式(8)の $V(x)$ の時間導関数を求め、式(6)の関係をを用いて整理すれば、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -\frac{1}{2} \left[x^T l - w_0 \left(f(\sigma) + \frac{1}{2}g(u)h(v) \right) \right]^2 - nof(\sigma) \\ & - \frac{1}{2} x^T \left[\left(\frac{g(u)}{u} \right) h(v) \left\{ \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right) d^T \right. \right. \\ & \left. \left. + d \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T - \frac{1}{4} \left(\frac{g(u)}{u} \right) h(v) w_0^2 dd^T \right\} \right] x \quad (16) \end{aligned}$$

となる。また定理6に対しては、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -\frac{1}{2} \left[x^T l - w_0 \left(f(\sigma) + \frac{1}{2}g(u)h(v) \right) \right]^2 - nof(\sigma) \\ & - \frac{1}{2} x^T \left[g(u) \left(\frac{h(v)}{v} \right) \left\{ \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right) e^T \right. \right. \\ & \left. \left. + e \left(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}lw_0 \right)^T - \frac{1}{4}g(u) \left(\frac{h(v)}{v} \right) w_0^2 ee^T \right\} \right] x \quad (17) \end{aligned}$$

となる。これらの $\dot{V}(x)$ は、それぞれ式(14)、式(15)の条件のもとに半負定値となる。したがって、リアプノフの安定定理に基づき、式(1)のシステムは安定性が保証される。

4. 例題システムへの適用

前節では、各種非線形関数に対して、システムが安定パターンをもつための非線形関数 $\xi(\sigma, u, v)$ の制約条件を導出した。ここでは、前節で導いた定理を次式で表される例題システムに適用する。

$$\dot{x} + \dot{x} + x + f(x) + (\dot{x} + x)g(x) = 0 \quad (18)$$

上式は式(1)の形式に書き換えると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(\sigma) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \phi \quad (19)$$

$$\phi = ug(\sigma)$$

$$\sigma = [1 \ 0]x$$

$$u = [1 \ 1]x$$

となる。このとき、 $Z(s) = (n+qs)W(s)$ は

$$Z(s) = (n+qs) \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (20)$$

となり、先の $Z(s)$ が正実となるための条件より $q-n > 0$ が得られる。また、式(6)を満足する実対称行列 P 、ベクトル l 、スカラー w_0 の値を求めると

$$P = \begin{bmatrix} q+n-\sqrt{n(q-n)} & n \\ n & q \end{bmatrix}$$

$$l = \begin{bmatrix} \sqrt{2n} \\ \sqrt{2(q-n)} \end{bmatrix}, \quad w_0 = 0 \quad (21)$$

となる。ここで取り上げた式(18)のシステムは $\xi(\sigma, u, v) = ug(\sigma)$ の形式なので、定理3を適用する。式(21)を用いて式(10)を求めると、

$$g(\sigma) \begin{bmatrix} 2n & n+q \\ n+q & 2q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

となり、式(22)が成り立つための十分条件は、次式のようになる。

$$n=q > 0, \quad g(\sigma) > 0 \quad (23)$$

ちなみに、リアプノフ関数を

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} q+n-\sqrt{n(q-n)} & n \\ n & q \end{bmatrix} x$$

$$+ q \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \quad (24)$$

とおけば、

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 2n & 2\sqrt{n(q-n)} \\ 2\sqrt{n(q-n)} & 2(q-n) \end{bmatrix} x$$

$$- n\sigma f(\sigma) - \frac{1}{2} x^T g(\sigma) \begin{bmatrix} 2n & n+q \\ n+q & 2q \end{bmatrix} x \quad (25)$$

となるのがわかる。式(25)は式(23)のもとに半負定値となり、リアプノフの定理に従い、式(18)のシステムは安

定となる。

5. 結 言

本研究では、工学上頻出する一次元複合形非線形システムの安定性の確保の立場から非線形関数のパターン類別を行った。すなわち、与えられた複合形システムに対し、ルーリエのセクタ条件を満足する従来の非線形関数以外の非線形関数を安定なルーリエ形非線形システムの摂動とみなして、ロバスト摂動法により、任意の非線形システムの安定パターン類別を行った。

本論文で提案した方法の特長は、各種非線形関数を安定パターンに類別し、非線形システムの安定性の解析を容易にしたところにある。

参考文献

- 1) 宮城・宮城, 機論, 56-529, C (1990), 109-113.
- 2) Miyagi, N. and Miyagi, H., ASME DS, 109-4 (1987), 410-413.
- 3) Miyagi, N. and Miyagi, H., ASME DS, 113-3 (1991), 531-534.
- 4) 宮城・宮城, 機論, 58-548, C (1993), 47-53.
- 5) 伊藤, ロバスト制御の理論と応用, コンピュータロール, (1986), 4-8, コロナ社.
- 6) Doyle, J.C., ほか2名, (藤井監訳), フィードバック制御の理論, (1994), 54-75, コロナ社.