状態フィードバックによる極配置の一方法

出川　喬庸*

On a Pole Assignment Method by State Variable Feedback

Tadayasu DEGAWA

This report describes a pole assignment method by state variable feedback. The objective of pole assignment is to design a feedback controller such that the closed poles of a system come to the desired place in the complex plane. The pole assignment is a powerful mean to improve system response characteristics. It is well-known that if a given system is completely controllable, the closed loop poles of a system can be arbitrarily assigned by state varible feedback. The standard method of the pole assignment follows a procedure of constructing the transformation matrix to controllable canonical form, transforming the original system to canonical form, computing a state variable feedback gain for canonical form, and transforming its feedback gain back to feedback gain for the original system representation. It is a roundabout method. In this paper, I propose a pole assignment method which permit a direct computation of state variable feedback gain for pole assignment for multi-input system. For single-input system, Ackermann' s formula is known as a direct computation method of feedback gain for pole assignment.

In this study, Ackerman' s formula is extended to multi-input system. In this method since it is not necessary to transform controllable canonical form, the procedure for obtaining feedback gain becomes simple and the computation time becomes short. As for numerical example, state variable feedback gain to assign poles are computed by both the standard method and the proposed method, and procedure step number and computation time of the proposed method are compared with those of the standard method and it is shown that the proposed formula is useful.

Keywords : pole assignment, state variable feedback

1．まえがき

極配置の目的は閉ループ系の極を望ましい複素平面上の望ましい位置に配置することであり，極配置は制御系の応答特性を改善するための有力な方法である。可制御な系については状態フィードバックによる極配置が可能なことはよく知られている。

極配置の標準的な方法は可制御正準系を使ってフィードバック・ゲインを計算するものである。この方法では，変換マトリクスを求めて系の表現を可制御正準系に変換し，そこで可制御正準系におけるフィードバック・ゲインを求めた後，再び元の系のフィードバック・ゲインに変換するという手順を踏む必要があり，回りくどい手順となっている。

本研究では，多入力系について極配置のためのフィードバックゲインを元の系から直接計算する方法を提案している。単入力系に対しては Ackermann の公式が極配置のためのフィードバック・ゲインの直接計算法として既に知られている。本研究は彼の公式を多入力系に拡張している。本方法では，可制御正準系に変換する必要がないのでフィードバック・ゲインを求める手順が簡単になり，計算量も少なくなる。

*航空工学科

最後に，数値例を用いて極配置を従来の方法と提案した方法の両方で行い，手順の長短と計算量を比較し，本公式の有用性を示している。

2．問題の記述

制御対象はｒ入力ｎ次線形固定係数系であり，つぎの微分方程式で記述される。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1}$$

ここで，$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^r$

A，Bはそれぞれ$n\times n$，$n\times r$の定数マトリクス，系は完全可制御であるとする。

制御対象の特性多項式は次式で与えられる。

$$a(s)=|sI-A| = s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_0s^0 \tag{2}$$

系の極の複素平面上での位置は特性方程式によって決まるので，状態フィードバックによる極配置制御系の設計問題は，状態フィードバック入力$u=Kx$によって得られる閉ループ系の特性多項式を次のような指定された特性多項式に一致させることである。

$$d(s)=s^n+d_{n-1}s^{n-1}+d_{n-2}s^{n-2}+\cdots+d_0s^0 \tag{3}$$

なお，Ｋはゲインであり，$r\times n$定数マトリクスである。

3 極配置の公式とその証明

極配置フィードバック・ゲインの求め方は単入力系と多入力系に分けて考察する。単入力系についてはAckermannの公式を紹介する。

(1) 単入力系 ($r=1$) の場合

$u(t)$はスカラ，B，Kはそれぞれ$n\times 1$，$1\times n$の定数ベクトルとなるのでBをb，Kをk^Tと書くことにする。可制御マトリクスはつぎのように構成される。

$$C=[b\ Ab\ A^2b\cdots A^{n-1}b] \tag{4}$$

Ｃの逆マトリクスC^{-1}の最下行ベクトルをq^Tとおくと極配置のためのフィードバック・ゲインkは次式で与えられる。

$$k^T=-q^Td(A) \tag{5}$$

ここで，$d(A)$は$d(s)$のsをマトリクスAに置き換えたものであり，$A^0=I$となる。ただし，Iを$n\times n$単位マトリクスとする。

このとき，閉ループ系の特性多項式が$d(s)$となることを次に示す。

閉ループ系の特性多項式は

$$|sI-A-bk^T|$$
$$=|sI-A||I-(sI-A)^{-1}bk^T|$$
$$=|sI-A|\{1-k^T(sI-A)^{-1}b\}$$
$$=|sI-A|\{1+q^Td(A)(sI-A)^{-1}b\} \tag{6}$$

である。

q^TはC^{-1}の最下行ベクトルであるから

$$q^TA^{i-1}b=0 \quad \text{for } i=1,2,\cdots,n-1 \tag{7}$$
$$q^TA^{n-1}b=1 \tag{8}$$

が成り立ち，これから

$$1+q^TA^n(sI-A)^{-1}b$$
$$=q^TA^{n-1}b+q^TA^n(sI-A)^{-1}b$$
$$=q^TA^{n-1}(sI-A)(sI-A)^{-1}b + q^TA^n(sI-A)^{-1}b$$
$$=\{q^TA^{n-1}(sI-A)+q^TA^n\}\times(sI-A)^{-1}b$$
$$=sq^TA^{n-1}(sI-A)^{-1}b \tag{9}$$

また，$i=1,2,\cdots,n-1$として

$$q^TA^i(sI-A)^{-1}b$$
$$=q^TA^{i-1}b+q^TA^i(sI-A)^{-1}b$$
$$=q^TA^{i-1}(sI-A)(sI-A)^{-1}b + q^TA^i(sI-A)^{-1}b$$
$$=\{q^TA^{i-1}(sI-A)+q^TA^i\}\times(sI-A)^{-1}b$$
$$=sq^TA^{i-1}(sI-A)^{-1}b$$
$$=s^2q^TA^{i-2}(sI-A)^{-1}b$$
$$=\cdots\cdots$$
$$=s^iq^T(sI-A)^{-1}b \tag{10}$$

という関係式が得られるので

$$1+q^Td(A)(sI-A)^{-1}b$$
$$=d(s)q^T(sI-A)^{-1}b \tag{11}$$

となる。さらに

$$\mathrm{adj}(sI-A)$$
$$=Is^{n-1}+(A+a_{n-1}I)s^{n-2}+\cdots +(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots a_1I) \tag{12}$$

と展開され，これから

$$q^T\mathrm{adj}(sI-A)b=1 \tag{13}$$

という関係式が得られるので，

$$q^T(sI-A)^{-1}b$$
$$=q^T\mathrm{adj}(sI-A)b/|sI-A|$$
$$=1/|sI-A| \tag{14}$$

となる。(6)式に(11)，(14)式を用いると，

$$|sI-A-bk^T|$$
$$=|sI-A|\{1+q^Td(A)(sI-A)^{-1}b\}$$
$$=|sI-A|d(s)q^T(sI-A)^{-1}b$$
$$=|sI-A|d(s)/|sI-A|$$

$= d(s)$

となり，閉ループ系の特性多項式が指定された特性多項式 $d(s)$ となることが示された。

(2) 多入力系の場合

(A, B) が完全可制御ならば，つぎのマトリクス

$$V = [B \quad AB \quad A^2B \cdots A^{n-1}B] \tag{15}$$

から n 個の独立な列ベクトルを選ぶことができる。その選び方は一通りではないから V の第 1 列ベクトルから右方向に順に 1 列ずつ列ベクトルを調べていって先着順に n 個の独立な列ベクトルを選ぶことにする。

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \cdots b_r]$$

として，これらのベクトルを並び変えてつぎのようなマトリクス C を作る。

$$C = [b_1, Ab_1, \cdots, A^{p_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{p_2-1}b_2, \cdots, b_r, Ab_r, \cdots, A^{p_r-1}b_r] \tag{16}$$

$$h_i = \sum_{k=1}^{i} p_k, \quad i = 1, 2, \cdots, r \tag{17}$$

として，C^{-1} の第 $h_1, h_2, \cdots, h_r$ 行ベクトルを $q_1^T, q_2^T, \cdots, q_r^T$ とおく。すなわち，

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \cdots \\ q_1^T \\ \cdots \\ \cdots \\ q_2^T \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ q_r^T \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow h_1\text{行} \\ \\ \\ \leftarrow h_2\text{行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow h_1(=n)\text{行} \end{array} \tag{18}$$

である。このとき，極配置のためのフィードバック・ゲイン K を求める式は次のように表される。

$$K = B_r^{-1}F \tag{19}$$

ここで，

$$B_r = \begin{bmatrix} q_1^TA^{p_1-1}B \\ q_2^TA^{p_2-1}B \\ \cdots\cdots \\ q_r^TA^{p_r-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$F = \begin{bmatrix} -q_1^TA^{p_1}+q_2^T \\ -q_2^TA^{p_2}+q_3^T \\ \cdots\cdots \\ -q_{r-1}^TA^{p_{r-1}}+q_r^T \\ -f^T \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} f^T = {} & q_r^T(A^{p_r} + d_{n-1}A^{p_r-1} + \cdots + d_{h_{r-1}}I) \\ & + q_{r-1}^T(d_{h_{r-1}+1}A^{p_{r-1}-1} + \cdots + d_{h_{r-2}}I) \\ & + \cdots\cdots \\ & + q_2^T(d_{h_2-1}A^{p_2-1} + \cdots + d_{h_1}I) \\ & + q_1^T(d_{h_1-1}A^{p_1-1} + \cdots + d_0I) \end{aligned} \tag{22}$$

このとき，閉ループ系の特性多項式は $d(s)$ となることを次に示す。

閉ループ系の特性多項式は

$$\begin{aligned} & |sI - A - BK| \\ = & |sI - A||I - (sI - A)^{-1}BK| \\ = & |sI - A||I_r - K(sI - A)^{-1}B| \\ = & |sI - A||I_r - B_r^{-1}F(sI - A)^{-1}B| \\ = & |sI - A||B_r^{-1}||B_r - F(sI - A)^{-1}B| \end{aligned} \tag{23}$$

である。ただし，I_r は $r \times r$ 単位マトリクスとする。また，B_r は対角要素がすべて 1 の上三角行列であり

$$|B_r| = 1 \tag{24}$$

であるから，

$$|B_r^{-1}| = 1 \text{ である。} \tag{25}$$

$B_r - F(sI - A)^{-1}B$ の第 i 行を考えると

$$\begin{aligned} & q_i^TA^{p_i-1}B + q_i^TA^{p_i}(sI - A)^{-1}B \\ & = q_i^TA^{p_i-1}\{(sI - A) + A\} \\ & \quad \times (sI - A)^{-1}B \\ & = sq_i^TA^{p_i-1}(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \tag{26}$$

となり，また q_i^T は C^{-1} の h_i 行ベクトルであるから

$$q_i^TA^{i-1}B = [0, \cdots, 0] \quad \text{for } i = 1, 2, \cdots, p_i - 1 \tag{27}$$

となっているので，$j = 1, 2, \cdots, p_i - 1$ として

$$\begin{aligned} & q_i^TA^j(sI - A)^{-1}B \\ = & q_i^TA^{j-1}b + q^TA^j(sI - A)^{-1}B \\ = & q_i^TA^{j-1}(sI - A)(sI - A)^{-1}B \\ & + q^TA^j(sI - A)^{-1}B \\ = & \{q_i^TA^{j-1}(sI - A) + q^TA^j\} \\ & (sI - A)^{-1}B \\ = & sq_i^TA^{j-1}(sI - A)^{-1}B \\ = & s^2q_i^TA^{j-2}(sI - A)^{-1}B \\ = & \cdots\cdots \\ = & s^jq_i^T(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \tag{28}$$

という関係式が得られる。

したがって，$B_r - F(sI - A)^{-1}$ の i 行目 $(i = 1, 2, \cdots, r - 1)$ はつぎのようになっている。

$$\begin{aligned} & q_i^TA^{p_i-1}B \\ & + (q_i^TA^{p_i} - q_{i+1}^T)(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q_i^T A^{p_i-1}B + q_i^T A^{p_i}(sI - A)^{-1}B \\
&\quad - q_{i+1}^T (sI - A)^{-1}B \\
&= q_i^T A^{p_i-1}\{(sI - A) + A\} \\
&\quad \times (sI - A)^{-1}B \\
&\quad - q_{i+1}^T (sI - A)^{-1}B \\
&= s q_i^T A^{p_i-1}(sI - A)^{-1}B\} \\
&\quad - q_{i+1}^T (sI - A)^{-1}B \\
&= s^{p_i-1} q_i^T (sI - A)^{-1}B \\
&\quad - q_{i+1}^T (sI - A)^{-1}B
\end{aligned}
\tag{29}
$$

また，$B_r - F(sI - A)^{-1}B$ の r 行目はつぎのようになる。

$$
\begin{aligned}
&q_r^T A^{p_r-1}B \\
&+ f^T (sI - A)^{-1}B \\
&= q_r^T A^{p_r-1}B \\
&+ \{q_r^T (A^{p_r} + d_{n-1}A^{p_r-1} + \cdots + d_{h_{r-1}}I) \\
&+ q_{r-1}^T (d_{h_{r-1}-1}A^{p_{r-1}-1} + \cdots + d_{h_{r-2}}I) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ q_2^T (d_{h_2-1}A^{p_2-1} + \cdots + d_{h_1}I) \\
&+ q_1^T (d_{h_1-1}A^{p_1-1} + \cdots + d_0 I)\} \\
&\times (sI - A)^{-1}B \\
&= \{f_1(s)q_1^T + f_2(s)q_2^T + \cdots \\
&\qquad + f_r(s)q_r^T\}(sI - A)^{-1}B
\end{aligned}
\tag{30}
$$

ここで，$h_0 = 0$ として

$$f_i(s) = d_{h_i-1}s^{p_i-1} + \cdots + d_{h_{i-1}} \quad i = 1, 2, \cdots, r-1 \tag{31}$$

$$f_r(s) = s^{p_r} + d_{n-1}s^{p_r-1} + \cdots + d_{h_{r-1}} \tag{32}$$

以上から，

$$
\begin{aligned}
&B_r - F(sI - A)^{-1}B \\
&= D(s)Q(sI - A)^{-1}B
\end{aligned}
\tag{33}
$$

ここで，

$$
D(s) = \begin{bmatrix}
s^{p_1} & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & s^{p_2} & -1 & 0 & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & 0 & s^{p_{r-1}} \cdot & -1 \\
f_1(s) & f_2(s) & \cdot & \cdot & \cdot & f_r(s)
\end{bmatrix}
\tag{34}
$$

$$
Q = \begin{bmatrix}
q_1^T \\ q_2^T \\ \cdots \\ q_{r-1} \\ q_r
\end{bmatrix}
\tag{35}
$$

となる。これから

$$|D(s)| = d(s) \tag{36}$$

であることが分かる。

次のマトリクス

$$
T = \begin{bmatrix}
q_1^T \\ q_1^T A \\ \vdots \\ q_1^T A^{p_1-1} \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_2^T A^{p_2-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ q_2^T A^{p_r-1}
\end{bmatrix}
\tag{37}
$$

を用いると，構造定理から次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&Q(sI - A)^{-1}B \\
&= QT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}TB \\
&= QT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}TB \\
&= \tilde{Q}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\
&= \tilde{Q}S(s)[B_r^{-1}\delta(s)]^{-1}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

ここで，

$$\tilde{Q} = QT^{-1} \tag{39}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \tag{40}$$

$$B = TB \tag{41}$$

$$
S(s) = \begin{bmatrix}
S_1(s) \\ S_2(s) \\ \vdots \\ S_r(s)
\end{bmatrix}
\tag{42}
$$

$$
S_i(s) = \begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & s & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & s^{p_i-1} & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\tag{43}
$$

$$
\delta(s) = \begin{bmatrix}
s^{p_1} & & & \mathbf{O} \\
 & s^{p_2} & & \\
 & & \ddots & \\
\mathbf{O} & & & s^{p_r}
\end{bmatrix} - A_r S(s)
\tag{44}
$$

A_r は $\tilde{A}$ の h_i 行目 ($i = 1, 2, \cdots, r$) のみから構成される $r \times n$ マトリクスである。また

$$\delta(s) = |sI - A| \tag{45}$$

なる式が成り立つ。

以上は構造定理から得られるものであるがこの場合

$$\tilde{Q} = QT^{-1} \tag{46}$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \tag{47}
$$

h_1+1 列・・・・ $h_{r-1}+1$ 列

となるので

$$\tilde{Q}S(s)=\mathbf{I}_r \tag{48}$$

となり

$$|\tilde{Q}S(s)|=|\mathbf{I}_r|=1 \tag{49}$$

が得られる。上式と(24), (38), (45)式から

$$
\begin{aligned}
&|Q(s\mathbf{I}-A)^{-1}B| \\
&=|QS(s)[B_r^{-1}\delta(s)]^{-1}| \\
&=|QS(s)||[B_r^{-1}\delta(s)]^{-1}| \\
&=|QS(s)||\delta(s)^{-1}||B_r| \\
&=1/|s\mathbf{I}-A|
\end{aligned} \tag{50}
$$

となる。上式と(36)式から

$$
\begin{aligned}
&|B_r-F(s\mathbf{I}-A)^{-1}B| \\
&=|D(s)Q(s\mathbf{I}-A)^{-1}B| \\
&=|D(s)||Q(s\mathbf{I}-A)^{-1}B| \\
&=d(s)/|s\mathbf{I}-A|
\end{aligned} \tag{51}
$$

となる。したがって，上式と(23)式から

$$
\begin{aligned}
&|s\mathbf{I}-A-BK| \\
&=|s\mathbf{I}-A||B_r^{-1}| \\
&\quad\times|B_r-F(s\mathbf{I}-A)^{-1}B| \\
&=d(s)
\end{aligned} \tag{52}
$$

となり，閉ループ系の特性多項式が指定された特性多項式 $d(s)$ となることが示された。

4．極配置フィードバックゲインの数値計算例

提案した極配置のための状態フィードバックゲインの計算公式の有効性を示すために，簡単な数値例を用いて標準的な方法と本方法の両方でフィードバック・ゲインを計算し，両者の結果が一致するかどうか，また，両者の手順と計算量の違いを示す。

制御対象を次のように仮定する。

$$
A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

閉ループ系の固有値を -1, -2, $-1\pm j$ に設定するフィードバック・ゲイン K を求める。

指定する特性多項式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
d(s)&=(s+1)(s+2)(s+1+j)(s+1-j) \\
&=s^4+5s^3+10s^2+10s+4
\end{aligned}
$$

(1)標準的な方法で求める。

① C をつくる。

$$
C=[\,b_1\ \ Ab_1\ \ b_2\ \ Ab_2\,]
=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$p_1=2$, $p_2=2$

② C^{-1} を求める。

$$
C^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \leftarrow h_1\text{行} \\ \\ \leftarrow h_2\text{行} \end{array}
$$

$q_1^T=[1\ \ 0\ \ -1\ \ 1]$

$q_2^T=[0\ \ 0\ \ 1\ \ -1]$

③ T と T^{-1} を求める。

$$
T=\begin{bmatrix} q_1^T \\ q_1^TA \\ q_2^T \\ q_2^TA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
T^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}
$$

④可制御正準形式に変換する。

$$
\tilde{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{B}=TB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
A_r=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
B_r=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

⑤可制御正準形式におけるゲイン K_c を求める。

$$\tilde{A}+\tilde{B}K_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -10 & -10 & -5 \end{bmatrix}=A_k$$

となればよいので A_K の $h_1(=2)$ 行と $h_2(=4)$ 行から構成されるマトリクスを A_{Kr} とすると K_c は次式

$$A_r+B_rK_c=A_{Kr}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

から次のように求められる。

$$K_c=B_r^{-1}(A_{Kr}-A_r)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & -10 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

⑥元の系でのゲイン K を求める。

$$K=K_cT=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & -10 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

(2)本方法で求める。

① C をつくる。

② C^{-1} を求める。

以上は標準的な方法と同じである。

③ q_1^TA, q_1^TA, q_2^TA, $q_2^TA^2$, B_r を求める。

$$q_1^TA=[0 \quad 1 \quad -2 \quad 0]$$
$$q_1^TA^2=[0 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$$
$$q_2^TA=[0 \quad 0 \quad 2 \quad -1]$$
$$q_2^TA^2=[0 \quad 1 \quad 3 \quad -1]$$
$$B_r=\begin{bmatrix} q_1^TAB \\ q_2^TAB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

④ F, K を求める。

$$F=\begin{bmatrix} -q_1^TA^2+q_2^T \\ -f^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &-q_1^TA^2+q_2^T \\ &=-[0 \quad 0 \quad -2 \quad 1] \\ &\quad+[0 \quad 0 \quad 1 \quad -1] \\ &=[0 \quad 0 \quad 3 \quad -2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f^T &=-q_2^T(A^2+5A+10I) \\ &\quad -q_1^T(10A+4I) \\ &=[0 \quad 0 \quad 3 \quad -1] \\ &\quad -5\times[0 \quad 0 \quad 2 \quad -1] \\ &\quad -10\times[0 \quad 0 \quad 1 \quad -1] \\ &\quad -10\times[0 \quad 1 \quad -2 \quad 0] \\ &\quad -4\times[1 \quad 0 \quad -1 \quad 1] \\ &=[-4 \quad -10 \quad 1 \quad 12] \end{aligned}$$

$$K_c=B_r^{-1}F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & -10 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

以上のように標準的な方法と本方法で求めたゲインは一致する。また，標準的な方法では逆マトリクスは C^{-1}, B_r^{-1} と T^{-1} の3つ必要であるが，本方法では逆行列は B_r^{-1} と C^{-1} の2つであり，さらに可制御正準形への変換と元の系でのゲインへの変換は必要ではないので，手順は簡単になり，計算量も少なくなっていることが分かる。

5．あとがき

可制御な系については状態フィードバックによる極配置が可能なことはよく知られている。極配置の標準的な方法は可制御正準系を知ってフィードバック・ゲインを計算するものである。しかし，この方法では，変換マトリクスを求めて系の表現を可制御正準系に変換し，そこで可制御正準系におけるフィードバック・ゲインを求めた後，再び元の系のフィードバック・ゲインに変換するという手順を踏む必要があり，回りくどい手順となっている。

本研究では，既に知られている単入力系についてのAckermannの極配置のためのフィードバック・ゲインの直接計算法を，多入力系における極配置のためのフィードバック・ゲインの直接計算法に拡張し，フィードバックゲインを元の系から直接計算する方法を提案している。本方法では，可制御正準系に変換する必要がないのでフィードバック・ゲインを求める手順が簡単になり，計算量も少なくなる。また，フィードバック・ゲインと系のパラメータとの関連の理解が容易になる。

最後に，数値例を用いて極配置を従来の方法と提案した方法の両方で行い，手順の長短と計算量を比較した。本方法では標準的な方法に比べて，手順が簡略化され計算量が少ないことが示された。

なお，多入力系では同じ極配置を行うフィードバック・ゲインの選び方は一通りではなく，他の選び方も出来るが，本報告でそれらのうちの代表的なゲインの選び方のみを紹介した。

参考文献

1）W. A. Wolovich : Linear Multivariable Systems. New Tork : Spring Verlag, 1974

2）出川，金井，内門：多変数モデル．フォロイング制御系の一構成法，計測自動制御学会論文集，第18巻，第12号，1982年，pp1132～1139