

## 自己組織化臨界現象の $S(z)$ スペクトル

山田 猛 矢<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 第一工業大学講師 情報電子システム工学科 (〒 899-4395 鹿児島県霧島市国分中央1丁目10-2)

E-mail : t-yamada@daiichi-koudai.ac.jp

時間相関がべき的減衰を示すような強い相関を持つ時系列 (強相関時系列) は異常な揺らぎを示すことがあり, そのため時系列の粗視化量の分布では十分に議論をすることができない。そこで強相関時系列が持つある種の自己相似構造を捉えようという  $S(z)$  スペクトルが提案されている [1]。その意味や普遍性というものはまだ明らかではないが, On-off 間欠性や保存系の間欠性の時系列では  $S(z)$  スペクトルが数値的に得られている。本論文では強相関時系列として, 非平衡系において自発的に臨界状態になる自己組織化臨界現象 (SOC) の代表的モデルである Sneppen モデル [5] について  $S(z)$  スペクトルを数値的に求め,  $S(z)$  スペクトルについて考察する。

### 1. はじめに

本論文では時間相関がべき的減衰を示すような時系列を強相関時系列とする。時系列の多くの場合は時間相関が指数的減衰を示す。そのため粗視化量の分布で十分議論することができる。しかし強相関時系列の時間相関は, べき的に減衰するためなかなか落ちない。このような強相関時系列  $x_t$  では揺らぎ

$$\sigma^2 = \left\langle \left( \frac{1}{\tau} \sum_{s=0}^{\tau-1} y_{t+s} \right)^2 \right\rangle \quad (1)$$

$\langle \dots \rangle$  はアンサンブル平均

$y_t = x_t - \bar{x}$ ,  $\bar{x}$  は  $x_t$  の長時間平均

が異常を示すことがあり, 粗視化量の分布で十分に議論をすることができない。

そこで強相関時系列を捉える手法として  $S(z)$  スペクトルが提案されている [1]。  $S(z)$  スペクトルの詳細については後で説明するが, On-off 間欠性や保存系の間欠性の時系列の  $S(z)$  スペクトルは数値的に得られている。しかし,  $S(z)$  スペクトルの意味や普遍性は明らかではない。本論文では強相関時系列を用いて  $S(z)$  スペクトルを数値計算し, その意味や普遍性を考察する。

強相関時系列として, 本研究でとりあげたのは, 自己組織化臨界現象 (SOC) [2] の示す時系列である。気体液体相転移, 磁気相転移などでみられる臨界現象は, パラメータ (温度, 圧力など) を臨界

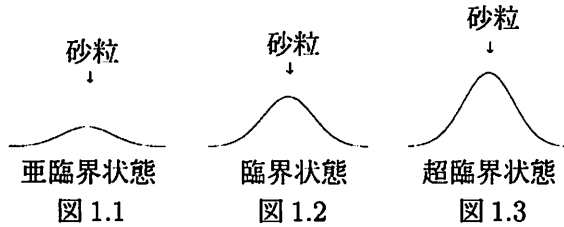
点近傍にコントロールすることによってみられる現象であり, このとき系の相関は無限遠にまで及ぶ。磁気相転移を例にとると, 1つの磁気モーメントの向きを逆向きにするとその影響は近隣にとどまる場合もあれば, 無限遠にまで及ぶ場合もあり影響を及ぼすサイズは特徴的な大きさを持たない。しかし, このような臨界状態になるのはパラメータを臨界点近傍にコントロールしたときである。それに対し, SOCはパラメータをコントロールしなくてもダイナミクスによって自然に臨界状態になっていく。

SOCの典型的な例として砂山がある。砂粒を砂山の真上から落すことを考える。砂山の高さが低いとき, 落した砂粒はすぐに止まるか小さな土砂崩れを起こす。このときの状態を亜臨界状態という (図1.1)。砂山の高さがある程度高くなると, 大小様々な土砂崩れが起こる。このとき土砂崩れの大きさに特徴的なサイズは無く, この状態を臨界状態 (図1.2) という。また人為的に砂山の高さを臨界状態より高くする (超臨界状態 (図1.3))。この状態で砂粒を落とすと大きな土砂崩れが起こり, 結局臨界状態に至る。つまり砂山は亜臨界状態であろうが超臨界状態であろうが自然と臨界状態になり, その状態を続ける。亜臨界状態のときは小さな土砂崩れしか起きず, また超臨界状態のときは大きな土砂崩れしか起きない。しかし臨界状態では大小様々な大きさの土砂崩れが起こり特徴的な

サイズは無い。臨界状態において土砂崩れの大きさ  $s$  の分布はべき分布

$$P(s) \sim s^{-\alpha} \quad (2)$$

となる。べき分布を持つことは SOC の持つ性質の1つである。



べき分布を持つものに地震の規模の分布や株価の変動の大きさ分布などがある。SOCの興味深い点は、このような自然や社会の分野でみられるべき分布を SOC の概念で統一的に解釈できようかと主張している点である。

本論文では、強相関時系列の一例としてこのような自己組織化臨界現象 (SOC) に注目する。具体的には SOC を示す力学系モデルである Sneppen モデルを使って  $S(z)$  スペクトルを数値的に考察する。

## 2. Sneppen モデル (自己組織化臨界現象)

SOC を示す簡単なモデルで、最近盛んに研究されているモデルに Sneppen モデル [5] がある。Sneppen モデルは、平面上に置かれた糸が風によって移動していく様子をモデル化したものである。

摩擦のある平面上に糸を置き、一定方向から風が吹くことを考えよう (図 2.1)。風が吹くことによって、糸の一部は少し動き止まる。また異なった場所が少し動き止まる。これを繰り返すことで複雑な運動が発生する。糸と面との間には摩擦がはたらき、各場所によって摩擦の大きさは違う。そのため面上に動きやすい (摩擦が小さい) 所と、動きにくい (摩擦が大きい) 所がある。Sneppen モデルは、まず摩擦の小さいところが動き、それに引きずられてまわりも動くということで時間変化する。糸の動きは面上の摩擦と糸のどの部分が動いたかによって複雑なさまを示す。

まず面上に2次元格子  $(r, h)$  を準備する (図 2.2)。 $r$  は離散的に  $r = 0, 1, 2, \dots, L-1$  とし、時刻  $t$  での糸の位置は  $h_t(r)$  で表す。また面上との摩擦  $\eta(r, h)$  は場所によって異なるので、 $0 \leq \eta \leq 1$  の

一様乱数で与える。数値解析上  $r$  は周期境界条件  $h_t(L) = h_t(0)$  を持つものとする。時間変化 (糸の動き) のルールは

- (a) 摩擦  $\eta(r, h)$  が最小値となる点  $r$  をみつけ、この  $r$  を  $r_t$  とする (図 2.3)。
- (b)  $h(r_t)$  に 1 を加える (図 2.4)。
- (c)  $r_t$  の右隣との差  $h(r_t) - h(r_t + 1)$  を調べ、1 より大きいとき  $h(r_t + 1)$  にも 1 を加える (図 2.5)。
- (d) さらに隣との差  $h(r_t + 1) - h(r_t + 2)$  を調べ、1 より大きいとき  $h(r_t + 2)$  にも 1 を加える。(図 2.6)
- (e) 同様に次の隣も調べ、差が 1 以下になるまで続ける。
- (f)  $r_t$  の左隣も同様に調べる (図 2.7)。
- (g) 以上の操作を繰り返す。((a) に戻る。)

Sneppen モデルは以上のイベントを繰り返すことにより  $h_t(r)$  が増加していくというモデルである。

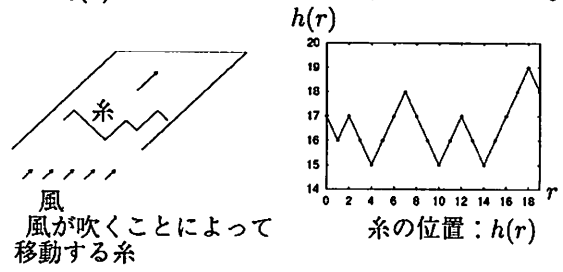


図 2.1

図 2.2

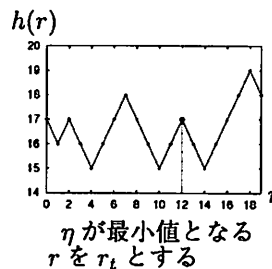


図 2.3

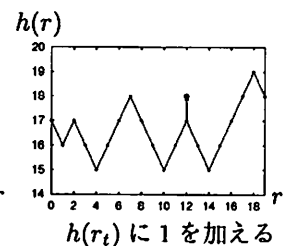


図 2.4

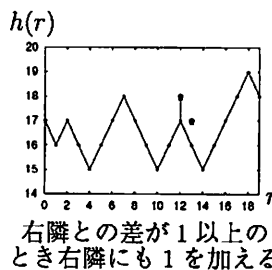


図 2.5

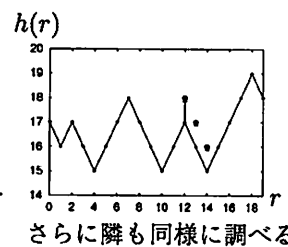
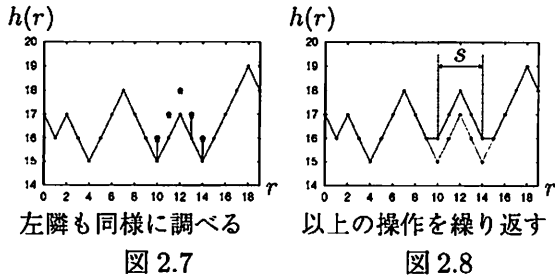


図 2.6



時刻  $t$  での  $h(r)$

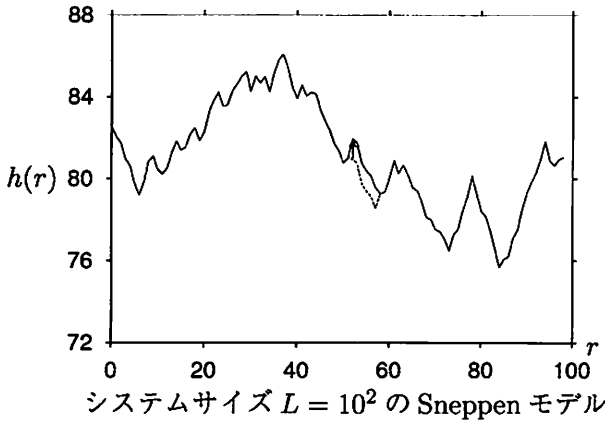
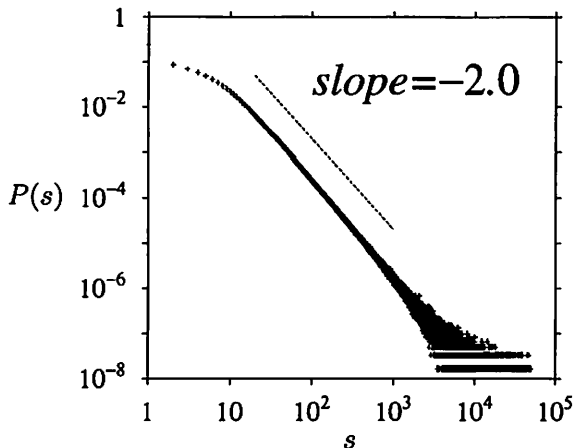


図 2.9

1 イベントで  $h_t(r)$  が変化することをバーストと呼び、その幅をバーストのサイズ  $s$  とする (図 2.8)。このときバーストの幅  $s$  の発生頻度分布  $P(s)$  を計算すると、やはりべき分布

$$P(s) \sim s^{-\alpha}, \quad \alpha \simeq 2.0 \quad (3)$$

となる (図 2.10)。このようにバーストの幅  $s$  には最大値となるシステムサイズ  $L$  以外に特徴的なサイズは無く巨大なものも含め様々な大きさのバーストが起こる。



バーストの幅  $s$  とその発生頻度  $P(s)$   
システムサイズ  $L = 10^5$

図 2.10

このような“臨界状態”はダイナミクスの初期

からみられるわけではない。この系をシミュレートすると、当初の段階では巨大なバーストはめったに起きず、バーストの大きさはシステムサイズに寄らず特徴的な値を持つ。その後、系は長時間の過渡段階を経て“臨界状態”に至る。これが“自己組織化臨界現象”である。

### 3. $S(z)$ スペクトル

#### 3-1. $S(z)$ スペクトルの定義

$S(z)$  スペクトルは時系列が持つある種の自己相似構造を捉えようとする量で、藤坂によって導入 [1] された。まず適当な時系列  $y_t$  に対し  $\tau$  ステップにわたる粗視化量

$$Y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{s=0}^{\tau-1} y_{t+s} \quad (4)$$

から  $z$  を

$$|Y_t(\tau)| \equiv \tau^{z_t}, \quad \tau \gg 1 \quad (5)$$

と定義する。つまり  $z_t$  は粗視化量  $\tau$  を変化させたとき、どのように粗視化量  $Y_t$  が収束、発散するかを表す指数である。この  $z_t$  の分布

$$P(z; \tau) \equiv \langle \delta(z - z_t) \rangle \sim \tau^{-S(z)} \quad (6)$$

で  $S(z)$  を定義する。

では、適当な時系列  $y_t$  としては何を見るとよい (有益) のだろうか。ここでは時系列  $x_t$  の揺らぎに注目し、適当な時系列  $y_t$  として

$$y_t = x_t - \bar{x} \quad (7)$$

$\bar{x}$  は  $x_t$  の長時間平均

をとる。これは強相関時系列のもつ異常な揺らぎ

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left\langle \left( \frac{1}{\tau} \sum_{s=0}^{\tau-1} y_{t+s} \right)^2 \right\rangle \\ &\sim \tau^{-(1-\alpha)} \end{aligned} \quad (8)$$

から平均的に

$$z_t = -\frac{1-\alpha}{2} \quad (9)$$

と予想されるからである。つまり  $z_t$  は  $x_t$  の揺らぎの異常性を表すので、強相関時系列の特徴づけにふさわしいと考えられるからである。

実際、数値的に解析するときには有限の  $\tau$  で実行せざるを得ない。そのため粗視化量の比をみて

$\tau \gg 1$ でのスケールリング性を比較的小さな  $\tau$  で取り出す。つまり,  $\tau_L \gg \tau_S \gg 1$  として

$$\frac{|Y_L(\tau_L)|}{|Y_L(\tau_S)|} \sim \left(\frac{\tau_L}{\tau_S}\right)^{z_t} \quad (10)$$

から  $z_t$  を定める。この  $z_t$  の分布は式 (6) より  $\frac{\tau_L}{\tau_S}$  のみに依存するはずで

$$P(z; \tau) \sim \left(\frac{\tau_L}{\tau_S}\right)^{-S(z)} \quad (11)$$

となる。数値的には式 (10), (11) を用いて  $S(z)$  を計算する。

### 3-2. ランダムウォークの $S(z)$ スペクトル

Sneppen モデルの  $S(z)$  スペクトルの数値計算の前に, ランダムウォークの  $S(z)$  スペクトルについて考える。

今, 確率  $\frac{1}{2}$  で 1 か -1 をとる時系列  $x_t$  を考える。1 を  $n$  回, -1 を  $(\tau - n)$  回とる確率は

$$P_\tau(n) = \frac{\tau!}{n!(\tau - n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^\tau \quad (12)$$

である。 $\tau$  回足し合わせたときの値は

$$X \equiv \sum_{t=0}^{\tau-1} x_t = n - (\tau - n) = 2n - \tau \quad (13)$$

で, これより

$$n = \frac{1}{2}(X + \tau) \quad (14)$$

である。これを  $P_\tau(n)$  にいれて,  $P_\tau(n) \frac{dX}{2} = Q_\tau(X) dX$  とすると

$$Q_\tau(X) = \frac{\tau!}{\left[\frac{1}{2}(X + \tau)\right]! \left[\frac{1}{2}(\tau - X)\right]!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\tau+1} \quad (15)$$

となる。ここで  $Q_\tau(X)$  は  $X$  の分布を表す。 $\tau$  が十分大きいとして Stirling の近似式

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \quad (16)$$

を用いると

$$Q_\tau(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau} \left(1 + \frac{X}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}(1+X+\tau)} \left(1 - \frac{X}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}(1+\tau-X)}} \quad (17)$$

となる。

式 (5) より  $z$  は

$$\left|\frac{X}{\tau}\right| = \tau^z \quad (18)$$

である。 $X$  は 1 か -1 を  $\tau$  個足し合わせたものだったので,  $z \leq 0$  ( $z=0$  は  $\tau$  個すべて 1 もしくは -1 のとき) となる。 $Q_\tau(X) dz = R_\tau(z) \frac{dz}{\tau^z \log \tau}$  より

$$R_\tau(z) = \frac{\tau^{z+1} \log \tau}{\sqrt{2\pi\tau} \left(1 + \frac{\tau^{z+1}}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}(1+\tau+\tau^{z+1})}} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{\tau^{z+1}}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}(1+\tau-\tau^{z+1})}} \quad (19)$$

となる。 $S(z)$  の定義式 (6) より

$$\begin{aligned} S(z) &= -\frac{\log R_\tau(z)}{\log \tau} \\ &= \frac{1}{\log \tau} \left[ \frac{1}{2}(1 + \tau + \tau^{z+1}) \log(1 + \tau^z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(1 + \tau - \tau^{z+1}) \log(1 - \tau^z) \right. \\ &\quad \left. - (z + 1) \log \tau - \log(\log \tau) + \frac{\log(2\pi\tau)}{2} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

ここで  $z \leq 0$  なので  $z < 0$  の範囲で  $\tau^z \ll 1$  より

$$S(z) = \frac{\tau^{2z+1} - 1}{\log \tau} - \frac{\log(\log \tau)}{\log \tau} + \frac{\log 2}{2 \log \tau} + \frac{\log \pi}{\log \tau} - z - \frac{1}{2} \quad (21)$$

$\tau \rightarrow \infty$  とすると, 右辺 2,3,4 項は 0 となり,  $z > -\frac{1}{2}$  とき  $S(z)$  は発散するので結局

$$S(z) = -z - \frac{1}{2}, \quad (z \leq -\frac{1}{2}) \quad (22)$$

となる。

### 3-3. Sneppen モデルの $S(z)$ スペクトル

Sneppen モデルの  $S(z)$  スペクトルを数値的に求める。時系列としては  $t$  回目と  $t+1$  回目のバーストの起点の距離  $x_t$  をとる (図 3.3.1)。

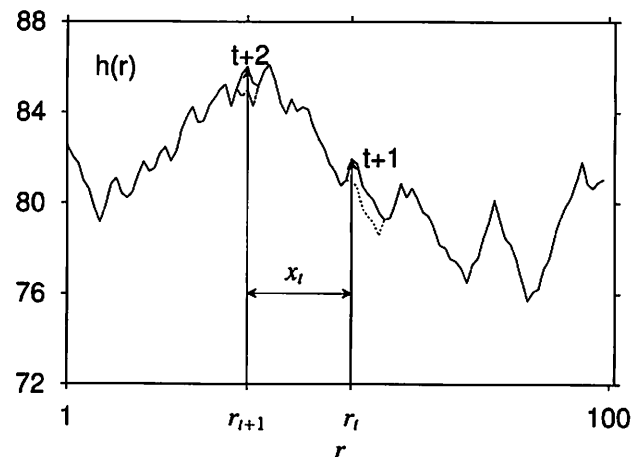


図 3.3.1 システムサイズ  $L = 10^2$

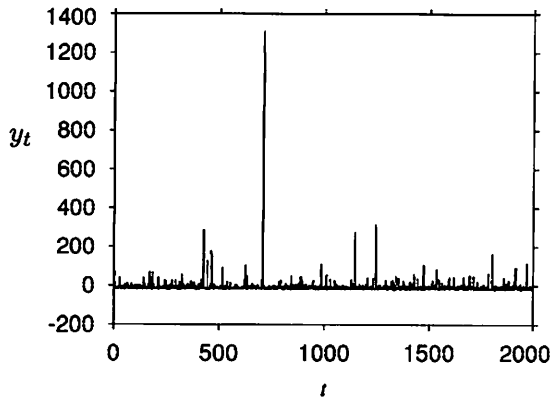
この時系列は図 3.3.2 のようになり、パワースペクトル

$$A(\omega) \sim \omega^{-\alpha}, \quad \alpha = 0.35 \quad (23)$$

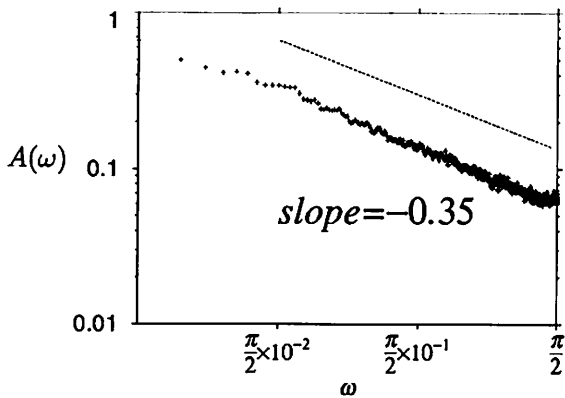
を示す (図 3.3.3)。また、揺らぎ

$$\sigma^2 = \left\langle \left( \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} x_t \right)^2 \right\rangle \sim \tau^{-(1-\alpha)}, \quad \alpha = 0.35 \quad (24)$$

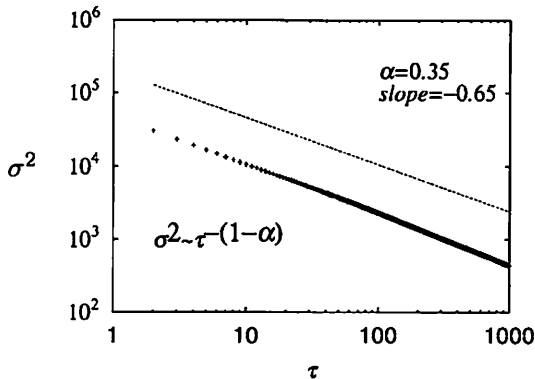
を示す (図 3.3.4)。



時系列 (システムサイズ  $L = 10^5$ )  
図 3.3.2

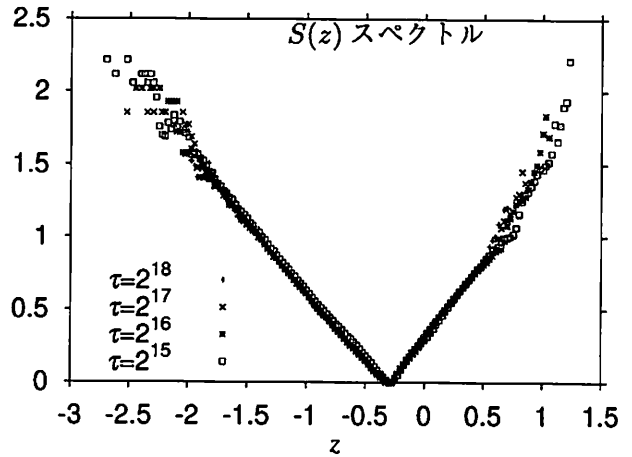


パワースペクトル (システムサイズ  $L = 10^5$ )  
図 3.3.3



揺らぎ (システムサイズ  $L = 10^5$ )  
図 3.3.4

この時系列の  $S(z)$  スペクトルを数値計算した結果、図 3.3.5 に示す  $S(z)$  スペクトルが得られる。図 3.3.5 は  $\tau = \frac{\tau_L}{\tau_S}$  において  $\tau_S = 2^5$  とし、 $\tau_L$  を変化させている。 $z = -0.325$  で  $S(z)$  スペクトルは最小をとる。これは式 (9) から得られる値、つまり揺らぎから予想される値と一致する。 $S(z)$  スペクトルの左側の部分は  $\tau$  を変化させても傾き  $-1$  になっていることから、傾き  $-1$  の定常な  $S(z)$  スペクトルを持つといえる。しかし、右側の部分は  $\tau$  を大きくしていくと、傾き  $1$  になっている部分が短くなる。このことから  $\tau \rightarrow \infty$  のとき右側が残るかどうかわからない。右側の部分が  $\tau$  にどのように依存するか、また  $\tau \rightarrow \infty$  のときどうなるか調べなければならない。



Sneppen モデル (システムサイズ  $L = 10^5$ ) の  $S(z)$  スペクトル

図 3.3.5

#### 4. まとめ

強相関時系列である SOC の時系列を使って  $S(z)$  スペクトルを数値的に求めた。適当な時系列  $y_t$  としては揺らぎ  $\sigma^2$  に注目し

$$y_t = x_t - \bar{x} \quad (25)$$

$\bar{x}$  は  $x_t$  の長時間平均

という量を用いた。これは揺らぎ

$$\sigma^2 \sim \tau^{-(1-\alpha)} \quad (26)$$

から平均的に

$$z_t = -\frac{1-\alpha}{2} \quad (27)$$

であることが予想され、 $z_t$  は  $x_t$  の揺らぎの異常性を表すので強相関時系列の特徴づけにふさわしいと考えられるからである。このような  $y_t$  を用いて Sneppen モデルの  $S(z)$  スペクトルを計算した。

数値計算の結果 Sneppen モデルでは、左側で傾き  $-1$ 、右側で傾き  $1$  となる  $S(z)$  スペクトルが得られた (図 3.3.5)。しかし右側の部分は  $\tau$  を大きくしたときに傾き  $1$  となる部分が短くなるため、 $\tau \rightarrow \infty$  のとき右側の部分は消えるのではないかと予想される。また  $S(z)$  スペクトルの底 ( $S(z)$  スペクトルが最小) をとる  $z$  の値は、予想していた  $z = -\frac{1-\alpha}{2}$  と数値計算の値が一致した。

これまで数値計算されてきた  $S(z)$  スペクトルに、保存系の間欠性を持つ時系列や On-off 間欠性の時系列がある。これらも強相関時系列であり、それぞれ  $S(z)$  スペクトルは左側で傾き  $-1$ 、右側で傾き  $1$  となっている。異なっている所は、 $S(z)$  スペクトルの底の位置である。しかし、 $S(z)$  スペクトルの底の位置は揺らぎから予想される  $z_t = -\frac{1-\alpha}{2}$  と一致する。そのためわざわざ  $S(z)$  スペクトルを計算する必要はない。

結論として、SOC の代表的モデルである Sneppen モデルは、定常な  $S(z)$  スペクトルをもつことがわかった。しかし、他の強相関時系列と同様の  $S(z)$  スペクトルしか得られず (ランダムウォークの  $S(z)$  スペクトル (式 (22)) も含む)、 $S(z)$  スペクトルの有用性を見出すことはできなかった。今後の課題として、適当な時系列  $y_t$  の取り方が本当に適当であったのかどうか。またイジングモデルに見られるように (2次元では相転移現象が見られるが、1次元では相転移現象は見られない)、Sneppen モデルが SOC を示す簡単な 1次元モデルであるために、傾き  $-1$ 、 $1$  となる単純な  $S(z)$  スペクトルしか得られなかったのではないかなど、はっきりさせていく必要がある。

#### 参考文献

- [1] H.Fujisaka,H.Suetani,T.Watanabe  
Prog.Theor.Phys.Suppl.No.139,70(2000)
- [2] Per Bak,Chao Tang,Kurt Wiesenfeld  
Self-organized criticality  
Phys. Rev. A,38,364(1988)
- [3] Per Bak,Chao Tang,Kurt Wiesenfeld  
Self-Organized Criticality: An Explanation  
of 1/f Noise  
Phys.Rev.lett.59,381(1987)
- [4] Per Bak,Kan Dhen  
「大地震や経済恐慌を説明する自己組織的臨  
界状態理論」  
『別冊 日経サイエンス複雑系がひらく世界』  
日経サイエンス社 (1997)
- [5] Kim Sneppen  
Self-organized Pinning and Interface  
Growth in a Random Medium  
Phys.Rev.lett.69,3539(1992)
- [6] 藤坂博一「自然現象と大偏差統計-統計的に独  
立なゆらぎから強相関ゆらぎへ-」『数理科学  
12』 (2001)
- [7] 高安秀樹「フラクタル」  
朝倉書店 (2002)
- [8] 太田隆夫「非平衡系の物理学」  
裳華房 (2000)
- [9] 井上政義「カオスと複雑系の科学」  
日本実業出版社 (1997)
- [10] 井上政義, 秦浩起「カオス科学の基礎と展開-  
複雑系の理解に向けて-」  
共立出版株式会社 (1999)