

# 凝縮媒体中の衝撃波の反射に関する研究 (基礎理論)

灘光 陽<sup>1)</sup>, 本田 隆志<sup>1)</sup>

## Studies on the Reflection of Shock Waves in Condensed Matter (The Basic Theory)

Yoh NADAMITSU, Takashi HONDA

### Abstract

We have previously reported our studies on the phenomenon of von Neumann reflection of underwater shock waves by experimental and numerical techniques. Then we got a clear knowledge of the conditions for the occurrence of von Neumann reflection as well as the basic characters of von Neumann reflection. To investigate the phenomenon of shock waves with the aid of analytical techniques, this report describes the basic theory on the propagation and reflection of shock waves in condensed matter.

*Keywords* : Shock Wave, Condensed Matter, Ray Shock Theory, Characteristic Line, Two Shock Theory, Three Shock Theory

## 1. はじめに

本研究の対象とする凝縮系媒質中の爆轟現象は、爆轟現象に化学反応を伴い非常に複雑である。しかしながら本研究<sup>(1), (2), (3)</sup>では、爆薬の爆轟によって凝縮媒体中に発生した衝撃波の伝播ならびに反射現象の基本特性を捉えるために、以下のように現象を単純にモデル化して理論解析を行う。爆薬の爆轟によって発生した爆轟波は、その近傍で凝縮媒質との干渉によって圧縮波が発生して、直ちに合体し衝撃波を形成する。一方、爆轟波背後の爆轟生成ガスは膨張し急激に圧力を減衰させ、爆轟生成ガスと凝縮媒質との境界は圧力の平衡を保とうとして境界面から膨張波が発生することが考えられる。そして衝撃波背後の音速は衝撃波の速度よりも大きいため、膨張波は直ちに衝撃波に追いつき、衝撃波の強さを弱め衝撃波は曲げられる。この衝撃波が傾斜面に入射する場合、入射衝撃波マッハ数と壁の角度に対応したじょう乱（圧縮波）が壁面から発生し、衝撃波上を伝播し衝撃波の強さを増加させマッハステムを形成する。このような現象を理論解析するために必要な関係式を以下に述べる。

## 2. 理論

### 2.1 垂直衝撃波の関係式

衝撃波の関係式は、斜め衝撃波においても衝撃波の法線方向の質量、運動量、エネルギーの保存式を考えればよいので、ここでは垂直衝撃波の関係式を示す。図2.1(a)は一様な平面衝撃波が速度  $U_s$  で、速度

<sup>1)</sup> 第一工業大学 機械システム工学科

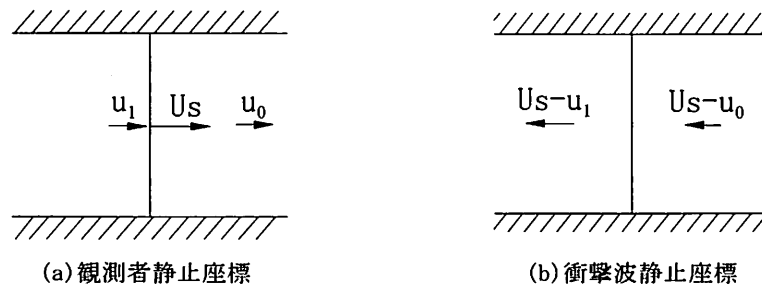


図2.1 衝撃波の伝播

$u_0$  の媒質中を伝播している様子を示している。その場合の衝撃波背後の流体粒子速度を  $u_1$  とする。この衝撃波を静止させるためには、流れ場全体に衝撃波の速度  $U_s$  を衝撃波の進行方向と逆向きに加えればよい。図2.1(b) はこれによって得られた衝撃波静止座標を示している。この衝撃波静止座標に対し、質量、運動量、エネルギーの保存式は次式となる<sup>(4)</sup>。

質量保存式:

$$\rho_0(U_s - u_0) = \rho_1(U_s - u_1) \quad (2.1.1)$$

運動量保存式:

$$P_0 + \rho_0(U_s - u_0)^2 = P_1 + \rho_1(U_s - u_1)^2 \quad (2.1.2)$$

エネルギー保存式:

$$h_0 + \frac{1}{2}(U_s - u_0)^2 = h_1 + \frac{1}{2}(U_s - u_1)^2 \quad (2.1.3)$$

$$h = e + pv \quad (2.1.4)$$

$$Ms = \frac{U_s - u_0}{C_0} \quad (2.1.5)$$

ここで、 $\rho$  は媒質の密度、 $P$  は圧力、 $h$  はエンタルピー、 $e$  は内部エネルギー、 $v$  は比体積、 $C$  は音速を示す。また、下添字 0 は衝撃波前方の領域、1 は衝撃波背後を示している。式 (2.1.5) は衝撃波のマッハ数を示すが、本研究では衝撃波前方の媒質の速度  $u_0$  は零として取り扱う。

完全気体の場合は次式が成り立つ<sup>(5)</sup>。

$$e = C_v T = \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$$

$$h = C_p T = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (2.1.6)$$

$$C_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \quad (2.1.7)$$

(2.1.1)～(2.1.7) ならびに完全気体の状態方程式を用いて  $Ms$  で整理すると完全気体に対する次の実用的な衝撃波の関係式が得られる<sup>(4)</sup>。

$$\text{衝撃波背後のマッハ数: } \frac{u_1 - u_0}{C_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \left( Ms - \frac{1}{Ms} \right) \quad (2.1.8)$$

$$\text{衝撃波前後の圧力比: } \frac{P_1}{P_0} = \frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \tag{2.1.9}$$

$$\text{衝撃波前後の密度比: } \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1)M_s^2}{(\gamma - 1)M_s^2 + 2} \tag{2.1.10}$$

$$\text{衝撃波前後の音速比: } \frac{C_1}{C_0} = \frac{\sqrt{(2\gamma M_s^2 - \gamma + 1)\{2 + (\gamma - 1)M_s^2\}}}{M_s(\gamma + 1)} \tag{2.1.11}$$

ここで,  $\gamma$ : 気体の比熱比,  $R$ : 気体定数,  $T$ : 絶対温度,  $C_v$ : 定容比熱,  $C_p$ : 定圧比熱である。

### 2.2 Ray-Shock 理論

衝撃波が傾斜壁を伝播したり斜衝突する場合, じょう乱が発生し, そのじょう乱が衝撃波上を伝播して衝撃波の形状や強さを変化させる。Whitham の Ray-Shock 理論は衝撃波の形状変化によってじょう乱の強さを見積もる特性理論と解釈することができる。以下に Whitham の Ray-Shock 理論の概要を示す。

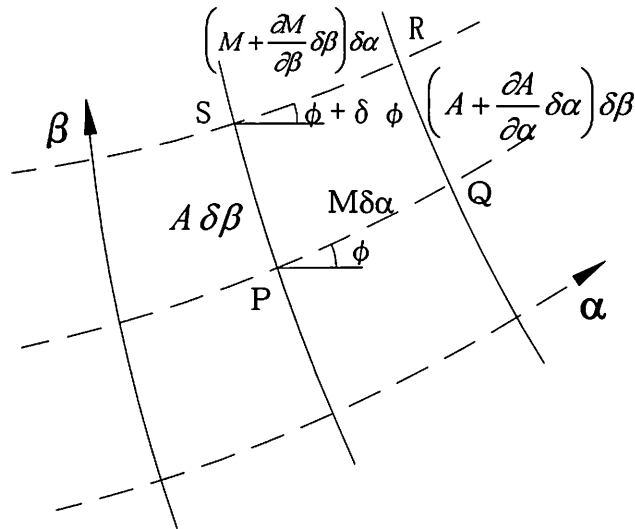


図2.2 湾曲した衝撃波の伝播

図2.2は一様な媒体中を湾曲した衝撃波がその波面形状を変化させながら前方に進む様子を示している。図中実線が衝撃波面で, 破線は衝撃波面に直角な軌道を示す。この直角な軌道を rays<sup>(6)</sup> と呼び  $a = C_0 t$  で近似される。衝撃波面方向 ( $\beta$  方向) と ray 方向 ( $a$  方向) の直交曲線座標系 ( $a, \beta$ ) において頂点  $(a, \beta), (a + \delta a, \beta), (a + \delta a, \beta + \delta \beta), (a, \beta + \delta \beta)$  をもつ曲線の四辺形 PQRS を考える。 $\phi$  は一つの ray によって作られる角度である。また,  $M$  は衝撃波のマッハ数を示し,  $M = U/C_0$  で定義される。ここで, 図2.2中の線分 PS と QR はそれぞれ次式で表される。

$$PS = A \delta \beta$$

$$QR = \left\{ A + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta \alpha \right\} \delta \beta$$

また線分 PQ は  $M \delta a$  である。この  $(a, \beta)$  座標に対し  $A \delta \beta$  は  $\beta$  方向の線要素 (距離) であり,  $M \delta a$  は  $a$  方向の線要素を表している。P から S までの ray に対する傾きの変化 ( $\delta \phi$ ) は次式で与えられる。

$$\delta\phi \approx \frac{QR-PS}{PQ} = \frac{\left(A + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta\alpha\right) \delta\beta - A \delta\beta}{M \delta\alpha} = \frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta\beta$$

したがって、 $\beta$  方向の角度の変化を示す次式が得られる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial\beta} = \frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \quad (2.2.1)$$

$\beta$  曲線の勾配は  $\pi/2 + \phi$  であるから同様に  $\alpha$  方向の角度の変化を示す次式が得られる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} = -\frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial \beta} \quad (2.2.2)$$

式 (2.2.1) を  $\alpha$  で微分し、式 (2.2.2) を  $\beta$  で微分すると次式となる。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha\partial\beta} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial \beta} \right)$$

この2つの式から次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial \beta} \right) = 0$$

ここで、rayの作る面積Aを次のように定義する。

$$A = A(M), \quad A'(M) < 0$$

上式の「'」はMで微分することを意味する。式 (2.2.1) と式 (2.2.2) からそれぞれ次式が与えられる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial\beta} - \frac{A'(M)}{M} \frac{\partial M}{\partial \alpha} = 0 \quad \left( \because \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \alpha} \right) \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{A(M)} \frac{\partial M}{\partial \beta} = 0 \quad (2.2.4)$$

ここで衝撃波上を伝播するじょう乱の速度  $C_r = d\beta / d\alpha$  を導入すると式 (2.2.4) から次式が得られる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + C_r \frac{\partial}{\partial\beta} \int \frac{1}{A(M)C_r} \frac{\partial M}{\partial \beta} d\beta = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + C_r \frac{\partial}{\partial\beta} \int \frac{dM}{A(M)C_r} = 0 \quad (2.2.5)$$

ここで  $C_r = C_r(M)$  である。

また、同様に式 (2.2.3) より次式となる。

$$C_r \frac{\partial\phi}{\partial\beta} - \frac{\partial}{\partial\alpha} \int \frac{C_r A'(M)}{M} \frac{\partial M}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

$$C_r \frac{\partial\phi}{\partial\beta} - \frac{\partial}{\partial\alpha} \int \frac{C_r A'(M)}{M} dM = 0$$

ここで、

$$C_r = \sqrt{\frac{-M}{A(M)A'(M)}}$$

とすると

$$C_r \frac{\partial\phi}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \int \frac{dM}{A(M)C_r} = 0 \quad (2.2.6)$$

式 (2.2.5) と式 (2.2.6) から次の波動方程式を得る。

$$\left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \pm C_r \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \left( \phi \pm \int \frac{dM}{A(M)C_r} \right) = 0$$

したがって、衝撃波が‘くさび’に入射するような、 $\beta$ の増加する方向にじょう乱が速度  $C_r$  で動いている単一波の場合、上式から次式となる。

$$\phi - \int \frac{dM}{A(M)C_r} = \text{const} \quad (2.2.7)$$

上式は気体力学のリーマンの不変量に対応する。今衝撃波上の  $\phi$  の変化を  $\phi_w$  とし  $M$  の変化を  $M_s$  から  $M_w$  とすれば、次式が成り立つ。

$$\phi_w = \int_{M_s}^{M_w} \frac{dM}{A(M)C_r} \quad (2.2.8)$$

上述の Ray-Shock 理論で用いた Ray の作る面積 ( $A$ ) と衝撃波マッハ数 ( $M$ ) の関係 ( $A-M$ 関係) は Chester<sup>(7)</sup> -Chisnell<sup>(8)</sup> -Whitham<sup>(9)</sup> 理論 (C-C-W 理論) と呼ばれ以下のように示される。

一次元(X方向) 非定常流れの基礎方程式を用いて A-M 関係が得られる。流体粒子速度を  $u$  とし、管の断面積を  $A$  とする。

連続の式は微分形に対し次式で示される。

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} (\rho u A) = 0$$

上式を変形し音速  $C$  で整理する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial X} + u \frac{\partial \rho}{\partial X} + \frac{\rho u}{A} \frac{\partial A}{\partial X} = 0 \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial X} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial X}$$

上記の関係を用いると次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial X} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial X}$$

運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (2.2.10)$$

式 (2.2.9) を  $\pm \rho c$  で除して式 (2.2.10) に加え整理すると、

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial P}{\partial X} \pm \rho c \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial u}{\partial X} \right\} \pm \frac{\rho c^2 u}{A} \frac{\partial A}{\partial X} = 0$$

となる。

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial X} \frac{dX}{dt}, \quad \frac{dX}{dt} = u \pm c$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{dX}{dt}$$

上記の関係を用いて整理すると次の特性式が得られる。

$$dP + \rho c du + \frac{\rho c^2 u}{u+c} \frac{dA}{A} = 0 \quad \text{on } C_+ : \frac{dX}{dt} = u+c \quad (2.2.11)$$

$$dP - \rho c du + \frac{\rho c^2 u}{u-c} \frac{dA}{A} = 0 \quad \text{on } C_- : \frac{dX}{dt} = u-c \quad (2.2.12)$$

$$dP - c^2 d\rho = 0 \quad \text{on particle: } \frac{dX}{dt} = u \quad (2.2.13)$$

図2.3の X-t 波動線図で、式 (2.2.11) は t 軸に対する傾きが  $u+c$  の  $C_+$  特性上で成り立つ。同様に、式 (2.2.12) は  $u-c$  の傾きをもつ  $C_-$  特性上で成り立つ。

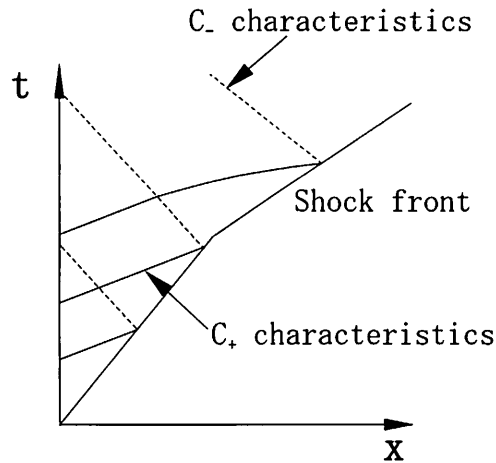


図2.3 x-t 波動線図

一方、式 (2.2.13) は音波の伝播を示している。例えば、衝撃波がくさびと干渉する場合くさび先端からじょう乱が発生する。その場合、衝撃波の進行方向（下流）に、じょう乱は速度  $u+c$  で伝播し、上流側には  $u-c$  の速度で伝播する。図2.3に示される  $C_+$  特性に沿って式 (2.2.11) を積分すると次式となる。

$$\int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{\rho c} + \int_{u_0}^{u_1} du = - \int_{\ln A_0}^{\ln A_1} \frac{uc}{u+c} \frac{dA}{A} \quad (2.2.14)$$

式 (2.2.14) を特性方向  $\eta$  で偏微分する。

$$\frac{du_1}{d\eta} + \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{dP_1}{d\eta} + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho c} \right) dP = - \frac{c_1 u_1}{c_1 + u_1} \frac{d(\ln A_1)}{d\eta} - \int_{\ln A_0}^{\ln A_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{cu}{u+c} \right) d(\ln A)$$

ここで、下添字 1 は衝撃波背後の物理量を示し、衝撃波は弱いと仮定し上式の積分の項を省略<sup>(10), (11)</sup> すると次式を得る。

$$\frac{du_1}{d\eta} + \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{dP_1}{d\eta} = - \frac{c_1 u_1}{c_1 + u_1} \frac{d(\ln A_1)}{d\eta} \quad (2.2.15)$$

媒質が完全気体の場合 (2.1.8) ~ (2.1.11) を用いてじょう乱による物理量の変化を示す次式が得られる。

$$du_1 = \frac{2c_0}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{1}{M^2} \right) dM$$

$$dp_1 = \frac{4\gamma P_0}{\gamma+1} M dM$$

この関係を式 (2.2.15) に代入すると次の A-M 関係式を得る。

$$\frac{2M}{(M^2-1)K(M)} \frac{dM}{dA} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.2.16)$$

ここで、 $K(M)$  は次式で示される。

$$K(M) = 2 \left[ \left( 1 + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1-\mu^2}{\mu} \right) \left( 2\mu+1 + \frac{1}{M^2} \right) \right]^{-1}$$

$$\mu^2 = \left( \frac{U-u_1}{c} \right)^2 = \frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2-(\gamma-1)}$$

一方媒質が凝縮媒体の場合、衝撃波の法線方向の速度  $U$  と衝撃波背後の流体粒子速度  $u_1$  に相転移などの状態変化が起こらない圧力の範囲で経験的な線形関係を用いる。

$$U = c_0 + su_1 \tag{2.2.17}$$

ここで  $c_0$  は静止媒体中の音速で,  $S$  は体積弾性率の圧力微分  $K'_0$  を用いて

$$s = \frac{(K'_0 + 1)}{4}$$

で表される定数である。式 (2.2.17) から次式が得られる。

$$u_1 = \frac{U - c_0}{s} = \frac{c_0(M - 1)}{s} \tag{2.2.18}$$

上式から衝撃波背後の流体粒子速度の微小変化量  $du_1$  は次式で示される。

$$du_1 = \frac{c_0}{s} dM \tag{2.2.19}$$

式 (2.1.2) に式 (2.2.18) を代入して整理すると次式となる。

$$P_1 = P_0 + \rho_0 c_0^2 M^2 - \frac{\rho_0 c_0^2 M}{s} \{M(s - 1) + 1\}$$

上式から次式が得られる。

$$dP_1 = \frac{\rho_0 c_0^2}{s} (2M - 1) dM \tag{2.2.20}$$

また衝撃波背後の密度は式 (2.1.1), (2.2.18) を用いて次式で示される。

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 s M}{(s - 1)M + 1} \tag{2.2.21}$$

式 (2.2.19), (2.2.20) を式 (2.2.15) に代入し整理すると凝縮媒体に対する A-M 関係式を得る。

$$\left[ \frac{c_0}{s} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_1 s} (2M - 1) \right] dM = - \frac{u_1 c_1}{u_1 + c_1} \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dA}{AdM} = - \frac{u_1 + c_1}{u_1 c_1} \left[ \frac{c_0}{s} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_1 s} (2M - 1) \right] \tag{2.2.22}$$

また, マッハ反射する場合, マッハシステムに対応する Ray の面積とマッハ数をそれぞれ  $A_w, M_w$  とし, 入射衝撃波に対応する Ray の面積とマッハ数をそれぞれ  $A_0, M_0$  とすると次式で示される。

$$A_w = A_0 \exp \left[ - \int_{M_0}^{M_w} \frac{u_1 + c_1}{u_1 c_1} \left\{ \frac{c_0}{s} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_1 s} (2M - 1) \right\} dM \right] \tag{2.2.23}$$

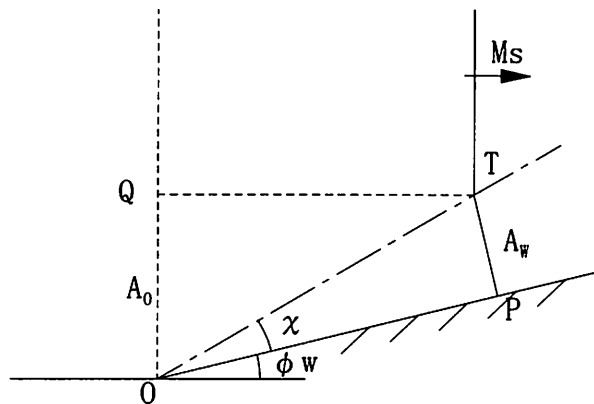


図2.4 衝撃波のマッハ反射

次にマッハ反射に対する Whitham の shock-shock 関係式について述べる。図2.4は衝撃波が反射面に入射し、マッハ反射を生じている様子を示している。図中の T は入射衝撃波、反射衝撃波、マッハシステムの交点で三重点と呼ばれ、マッハ反射の場合この三重点は 1 点に集中している。そして図2.4中の  $\chi$  は三重点の軌跡角である。Whitham はこの軌跡（図2.4の一点鎖線 O-T）を Shock-Shock の軌跡と名付けている。これは、Shock-Shock 理論が Shock-Shock（三重点）で物理量の「とび」を与えているからである。また、 $A_w$  はマッハシステムに対する Ray の面積を示し、 $A_0$  は入射衝撃波に対する Ray の面積を表している。なお同図の点 O から上方に伸びている破線は入射衝撃波が点 O に到達した状態を示している。図中に示すようにマッハシステムは直線で、そのマッハ数を  $M_w$  とすると、線分 OP は  $M_w a$  であり、線分 PT は  $A_w \beta$  となる。したがって、三重点軌跡角  $\chi$  は次式で示される。

$$\tan \chi = \frac{A_w \beta}{M_w \alpha} = \frac{A_w}{M_w} Cr \quad (2.2.24)$$

上式の  $Cr$  は Shock-Shock の速度である。この速度は次のよう与えられる。線分 QT は  $M_w a$  で表され、線分 OQ は  $A_0 \beta$  である。線分 OT は二つの直角三角形 OQT と OPT の斜辺となるので次式が成り立つ。

$$(A_0 \beta)^2 + (M_w \alpha)^2 = (A_w \beta)^2 + (M_w \alpha)^2 \text{ から}$$

$$Cr = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{M_w^2 - M_s^2}{A_w^2 - A_0^2}} \quad (2.2.25)$$

式(2.2.25)を式(2.2.24)に代入し整理すると次式を得る。

$$\tan \chi = \frac{A_w}{A_0} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{M_s}{M_w}\right)^2}{1 - \left(\frac{A_w}{A_0}\right)^2} \right\}^{1/2} \quad (2.2.26)$$

反射面の傾斜角  $\phi_w$  に対する関係式は図2.4の幾何学的関係から次式となる。

$$\cot \phi_w = \tan(\angle TOP + \angle TOQ) \quad (2.2.27)$$

$$\tan(\angle TOP) = \frac{A_w}{M_w} Cr$$

$$\tan(\angle TOQ) = \frac{M_s}{A_0} \frac{1}{Cr}$$

上式と式(2.2.25)を式(2.2.27)に代入して整理すると次式を得る。

$$\tan \phi_w = \frac{\frac{M_w}{M_s} \left[ \left\{ 1 - \left(\frac{M_s}{M_w}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{A_w}{A_0}\right)^2 \right\} \right]^{1/2}}{\left( 1 + \frac{A_w}{A_0} \frac{M_w}{M_s} \right)} \quad (2.2.28)$$

これらの関係式は、マッハシステムの強さの予測や反射形態の遷移基準に使用できる。

### 2.3 特性曲線理論

超音速流れではじょう乱の伝播をそのじょう乱源の速度と音速から得られる特性角（マッハ角）で表すことができる。特性角が同じであれば、その特性を横切る流れの物理量の変化は生じない。しかしながら、特性角が異なればそこを横切る流れの物理量に変化が生じる<sup>(12)</sup>。以下に特性を横切る流れに対する物理



量の変化の概要を示す。

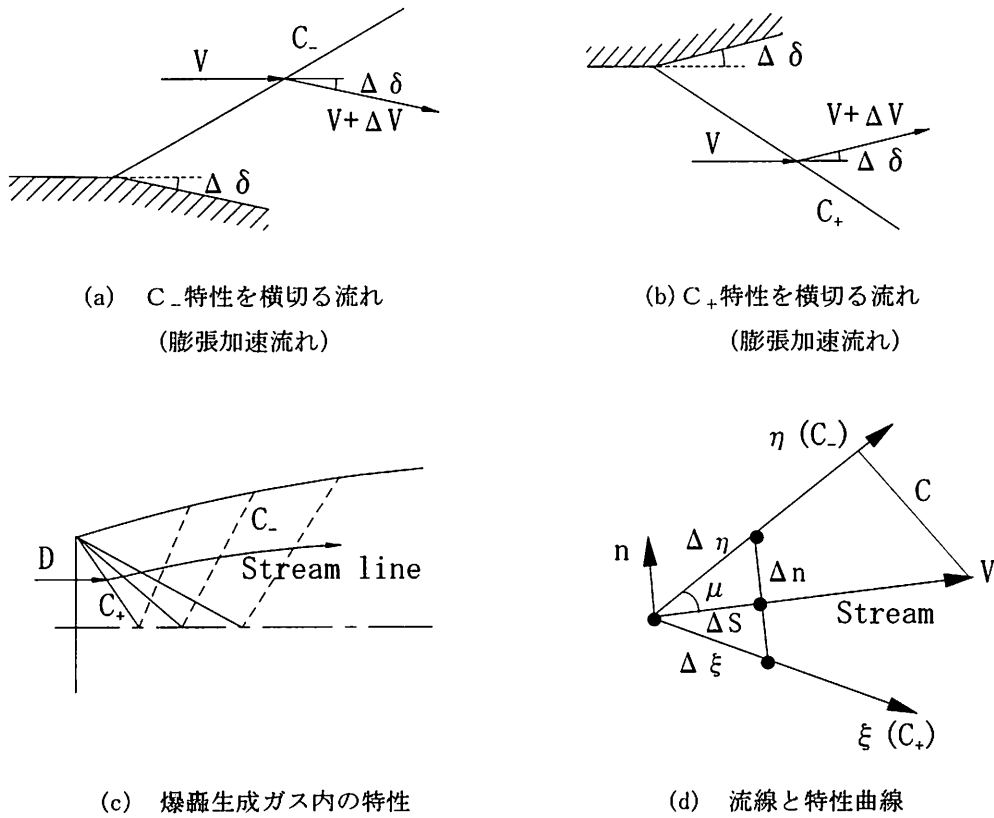


図2.5 特性曲線を横切る流れ

右向き流れに対し、流れの方向に向かって左向き特性を  $C_-$ 、右向き特性を  $C_+$  で表示する。左向き流れに対しては鏡像の関係で表示する。図2.5 (a) は  $C_-$  特性を横切る流れを示している。この場合流れの転向角度  $\Delta \delta$  は負（時計回り）で圧力  $\Delta P$  が減少し、速度  $\Delta V$  は増加する膨張流れである。すなわち特性は膨張波の伝播を示している。図2.5 (b) も同様に  $C_+$  特性に対する膨張流れである。この場合圧力が減少し、流れの転向角度は正（反時計回り）で速度は増加する。図2.5 (c) は理想爆轟による爆轟生成ガス内の特性を簡易的に示している。爆轟波背後の流れは角から生じている  $C_+$  特性の有心膨張波によって転向角度は

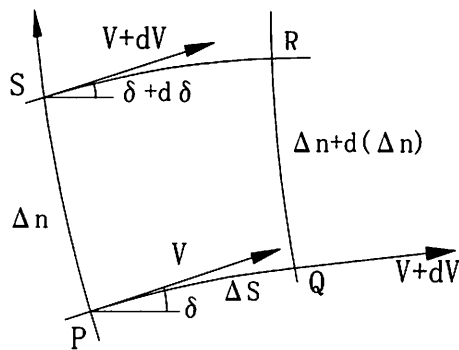


図2.6 自然座標系

正で速度が増加し、圧力は減少する。そして、 $C_+$  特性の反射によって生じた  $C_-$  特性を横切り、流れの転向角度は負となり圧力が減少し、速度は増加する。一方特性を横切る流れが圧縮される場合は、 $C_-$  特性

に対し流れの転向角度は正で圧力が増加し、速度は減少する。同様に C-特性に対しては、圧力が増加し、流れの転向角度が負となり速度は減少する。このような特性曲線に対し、図2.5 (d) に示すように流線方向を (S) とし、その法線方向を (n), C-特性方向を ( $\eta$ ), C+方向を ( $\xi$ ) とする軸対称流れに対する特性曲線の関係式を導く。なお、(S), (n) 方向のそれぞれの微小変化は  $\Delta S$ ,  $\Delta n$  とする。

流線間の特性を横切って質量は保存されるので、連続の式は次式で示される。

$$\rho V(2\pi r \Delta n) = \text{const}$$

ここで、 $r$  は中心線から流線までの半径、 $V$  は流体粒子速度 (衝撃波を静止させる相対座標に対する速度) である。上式を流線方向に微分する。

$$\frac{\partial}{\partial S} [\rho V(2\pi r \Delta n)] = 0$$

$$Vr \Delta n \frac{\partial \rho}{\partial S} + \rho r \Delta n \frac{\partial V}{\partial S} + \rho V \Delta n \frac{\partial r}{\partial S} + \rho V r \frac{\partial \Delta n}{\partial S} = 0$$

上式を  $\rho \cdot V \cdot r \cdot \Delta n$  で除すと次式を得る。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial S} + \frac{1}{\Delta n} \frac{\partial \Delta n}{\partial S} = 0$$

上式の最後の項  $\partial \Delta n / \partial S$  を流れの転向角度で表示する。そのために図2.6の自然座標を参考にして幾何学的関係より、転向角度の微小変化量  $d\delta$  は次式で示される。

$$d\delta = \frac{QR - PS}{PQ} = \frac{\Delta n + \frac{\partial \Delta n}{\partial S} \Delta S - \Delta n}{\Delta S} = \frac{\partial \Delta n}{\partial S}$$

$$d\delta = \frac{SR - PQ}{PS} = \frac{\left\{ \Delta S + \frac{\partial \Delta S}{\partial n} \Delta n \right\} - \Delta S}{\Delta n} = \frac{\partial \Delta S}{\partial n}$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial S} + \frac{d\delta}{\Delta n} = 0 \quad (2.3.1)$$

つぎに、流線に沿って成り立つ定常流れの Euler の運動方程式は次のように表される。

$$V \frac{\partial V}{\partial S} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S}$$

上式と式 (2.3.1) から密度の項を削除し、次式を得る。

$$\left( \frac{V^2}{c^2} - 1 \right) \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial \delta}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial S} = 0 \quad (2.3.2)$$

流線の曲率半径を  $R = \Delta S / d\delta$  とすると非回転の式は次式で表される。

$$\zeta = \frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial \delta}{\partial S} - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad (2.3.3)$$

ここで、 $\zeta$  は渦度を示す。上の2つの式 (2.3.2), (2.3.3) に対しプラントル・マイヤー関数  $\nu$  を用いて次式で整理する。(式 (2.3.2) に  $\tan \mu$  をかけ、式 (2.3.3) に  $\tan \mu \cot \mu$  をかける。ただし、 $\mu$  は特性角である。)

$$d\nu = \cot \mu \frac{dV}{V} \quad (2.3.4)$$

$$\tan \mu = \frac{\Delta n}{\Delta S}, \quad \frac{dr}{dS} = \sin \delta$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial S} - \tan \mu \frac{\partial \delta}{\partial n} = \tan \mu \frac{\sin \delta}{r} \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial S} = \tan \mu \frac{\partial \nu}{\partial n} \quad (2.3.6)$$

ここで, 図2.5 (c) を参考にして特性角 (マッハ角) は次のように表示できる。

$$\sin \mu = \frac{c}{V}, \quad \cos \mu = \sqrt{1 - \sin^2 \mu} = \frac{1}{V} \sqrt{V^2 - c^2} \text{ から,}$$

$$\tan \mu = \frac{c}{\sqrt{V^2 - c^2}} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \text{ を得る。ただし, } M = \frac{V}{c} \text{ とする。}$$

(2.3.5), (2.3.6) を加えることにより  $\eta$  特性に沿って成り立つ次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial S}(\nu - \delta) - \tan \mu \frac{\partial}{\partial n}(\nu - \delta) = \tan \mu \frac{\sin \delta}{r}$$

ここで,

$$f = (\nu - \delta)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta S} = \sec \mu \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial S} + \tan \mu \frac{\partial f}{\partial n}$$

とすると, 次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\nu - \delta) = \sin \mu \frac{\sin \delta}{r} \tag{2.3.7}$$

(2.3.5), (2.3.6) を引くことにより  $\xi$  特性に沿って成り立つ次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial S}(\nu + \delta) + \tan \mu \frac{\partial}{\partial n}(\nu + \delta) = \tan \mu \frac{\sin \delta}{r}$$

ここで, 上記と同様に変換式を用いる。

$$f = (\nu + \delta)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\Delta \xi}{\Delta S} = \sec \mu \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial S} - \tan \mu \frac{\partial f}{\partial n}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\nu + \delta) = \sin \mu \frac{\sin \delta}{r} \tag{2.3.8}$$

(2.3.7) 式から C-特性に沿ってリーマン量の変化量は次式で示される。

$$d(\nu - \delta) = \left( \sin \mu \frac{\sin \delta}{r} \right) d\eta$$

$$dr = d\eta \sin(\mu + \delta)$$

上式を用いて半径方向で表示すると次式となる。

$$d\nu - d\delta = \frac{\sin \mu \sin \delta}{\sin(\mu + \delta)} \frac{dr}{r} \tag{2.3.9}$$

次に C-特性に沿って成り立つ圧力変化の式を示す。特性を横切る流れの速度ならびに角度の微小変化に対し次式を用いる。

$$(V + \Delta V) \cos(-d\delta) \approx V + \Delta V, \quad (V + \Delta V) \sin(-d\delta) \approx -Vd\delta$$

したがって,  $\tan \mu = -\Delta V / (V\Delta\delta)$  から, 次式が得られる。

$$\frac{\Delta V}{V} = -d\delta \tan \mu = -\frac{d\delta}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

異なる特性曲線を横切って生じる圧力, 密度ならびに速度の微小変化に対し, 流線に沿って成り立つ質量保存式は定常流れにおいて特性曲線前後の物理量で次のように示される。

$$\rho V = (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V)$$

同様に特性曲線前後の物理量に対し流線方向の運動量保存式は次式で表される。

$$P + \rho V^2 = (P + \Delta P) + (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V)^2$$

これら二つの式から次式が得られる。

$$\Delta P = \rho V^2 - \rho V(V + \Delta V) = -\rho V \Delta V$$

上式を式 (2.3.4) と組み合わせると式 (2.3.9) に代入すると次式を得る。

$$-\cot \mu \frac{dP}{\rho V^2} - d\delta = \frac{\sin \mu \sin \delta}{\sin(\mu + \delta)} \frac{dr}{r}$$

$$dP = \frac{-\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left( d\delta + \frac{\sin \mu \sin \delta}{\sin(\mu + \delta)} \frac{dr}{r} \right) \quad (2.3.10)$$

また、 $V \sin \mu = c$  を用いて整理すると次式が得られる。

$$dP + \frac{\rho V^2 d\delta}{\sqrt{M^2 - 1}} = -\frac{\rho c^2 \sin \delta}{\sin(\mu + \delta) \cos \mu} \frac{dr}{r}$$

同様に (2.3.8) 式から C<sub>+</sub> 特性に沿ってリーマン量の変化量は次式で示される。

$$dv + d\delta = \frac{\sin \mu \sin \delta}{\sin(\mu - \delta)} \frac{dr}{r} \quad (2.3.11)$$

C<sub>-</sub> 特性に沿って成り立つ圧力変化の式は次式となる。

$$dP = \frac{\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left( d\delta - \frac{\sin \mu \sin \delta}{\sin(\mu - \delta)} \frac{dr}{r} \right) \quad (2.3.12)$$

$$dP - \frac{\rho V^2 d\delta}{\sqrt{M^2 - 1}} = -\frac{\rho c^2 \sin \delta}{\sin(\mu - \delta) \cos \mu} \frac{dr}{r}$$

水中爆ごう現象において、これらの特性式を用いて、水中衝撃波の形状から爆ごう生成ガスの膨張過程や水中衝撃波背後の物理量を予測することができる。

## 2.4 衝撃波の反射に関する理論

静止気体中を伝播する一様な強さの平面衝撃波が傾斜壁（以下反射面と呼ぶ）に入射し反射現象を生じる場合、その反射形態は正常反射 (RR) と非正常反射 (IR) に大別されことはよく知られている。これらの反射形態は入射衝撃波マッハ数と反射面の傾斜角度に依存している。この入射衝撃波マッハ数と反射面の傾斜角度によって反射面に入射し伝播する際に発生するじょう乱の強さが定まると考えられる。任意の入射衝撃波マッハ数に対し、反射面の傾斜角度が大きい場合に正常反射の形態を生じる。これは大きな傾斜角度の反射面に対しては、衝撃波が反射面を伝播する際に生じるじょう乱が入射衝撃波上を伝播しきれないばかりでなく、くさび先端で生じたじょう乱も入射衝撃波上を伝播しきれないためである。したがって反射点に関する反射衝撃波背後の流れの相対マッハ数を  $M_1$  とすると、 $M_1 > 1$  の時じょう乱が反射衝撃波に追いつくことができず RR が生じ、そして  $M_1 < 1$  で IR となる<sup>(13)</sup>。つぎに非正常反射はマッハ反射と von Neumann 反射に分けられ、入射衝撃波マッハ数ならびに反射面の傾斜角度が小さい場合にマッハシステムが湾曲し、反射衝撃波が弱い von Neumann 反射形態となる。一方マッハ反射は反射面の先端で発生するじょう乱が大きく、このじょう乱が入射衝撃波と干渉して不連続な三重点を形成する。すなわち入射衝撃波、反射衝撃波ならびにマッハシステムからなる三衝撃波系となる。媒質が気体の場合のマッハ反射は近年詳細に研究され、直接マッハ反射 (Direct Mach reflection)、定置マッハ反射 (Stationary Mach reflection)、反転マッハ反射 (Inverse Mach reflection) に分類されている<sup>(14)</sup>。これら一連の反射形態は湾曲した凹面壁に衝撃波が入射し非定常的に伝播するときにおいても生じる。凹面壁に平面衝撃波が入射する場合、傾斜角度が小さな領域で直接マッハ反射が生じ、それから傾斜角度が増すにしたがって定置マッハ反射、反転マッハ反射へと移行し最後に正常反射となる<sup>(15)</sup>。直接マッハ反射はさらに、単純マッハ反射 (Simple Mach

reflection, SMR), 遷移マッハ反射 (Transitional Mach reflection, TMR), 二重マッハ反射 (Double Mach reflection, DMR) に分類されている<sup>(14)</sup>。一方, 媒質が凝縮媒体の場合, 気体に比較して音速が大きいため相対的にマッハ数が低くなり, 非正常反射では von Neumann 反射と単純マッハ反射が生じると考えられる。また von Neumann 反射を説明できる完全な理論は未だ無く, ここでは正常反射に対して二衝撃波理論<sup>(15)</sup>, 単純マッハ反射に関して三衝撃波理論<sup>(16)</sup>を記述する。

### 2.4.1 二衝撃波理論 (正常反射)

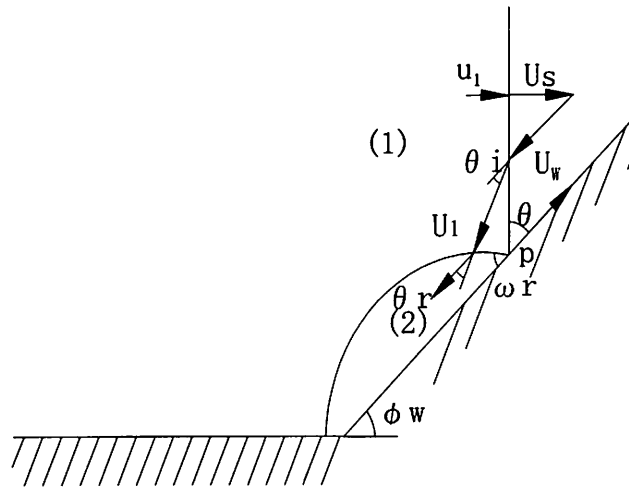


図2.7 正常反射の模式図

正常反射では図2.7に示すように入射衝撃波と反射衝撃波が交わる点 P での衝撃波の反射面に沿った速度  $U_w$  に対し  $-U_w$  を流れ場全体に加えることにより入射衝撃波と反射衝撃波を静止させることができる。そして入射衝撃波の速度  $U_s$  に対し次の関係が成り立つ。

$$U_s = U_w \cdot \cos \phi_w \quad (2.4.1)$$

またこの衝撃波静止座標に対して, 正常反射では図2.7に示される入射衝撃波の転向角度  $\theta_i$  と反射衝撃波の転向角度  $\theta_r$  は大きさが等しく向きが逆で次の関係が成り立つ。

$$\theta_i + \theta_r = 0 \quad (2.4.2)$$

衝撃波の入射角を  $\theta$  とし, 領域 (1) の相対速度を  $U_1$  とすると, 衝撃波面の接線速度  $U_t$  は接線方向の運動量の式から等しくなり, 次式が成り立つ。

$$\theta = 90^\circ - \phi_w$$

$$U_w \cos \theta = U_1 \cos(\theta - |\theta_i|)$$

$$U_1 \sin(\theta - |\theta_i|) = U_s - u_1$$

$$\tan \theta = \frac{U_s}{U_t}, \quad \tan(\theta - |\theta_i|) = \frac{U_s - u_1}{U_t}$$

ここで,  $u_1$  は入射衝撃波背後の流体粒子速度を示している。上式から,  $U_t$  を削除すると次式が得られる。

$$\frac{\tan \theta}{\tan(\theta - |\theta_i|)} = \frac{U_s}{U_s - u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

$$\tan \theta_i = \frac{-\tan \theta \frac{u_1}{U_s}}{1 + \tan^2 \theta \left(1 - \frac{u_1}{U_s}\right)} \quad (2.4.3)$$

今、反射角度を $\omega_r$ とすると領域(1)の反射衝撃波を静止させる法線方向の速度 $U_r$ に対し次式の関係が成り立つ。

$$U_r = U_1 \sin(\omega_r + |\theta_i|)$$

ここで、媒質が凝縮媒体に対し入射衝撃波に経験的な線形関係を用いる。

$$U_s = C_0 + S u_1$$

$S$ は媒質による定数である。そして、反射衝撃波に対し次式が成り立つ。

$$\tan \theta_r = \frac{\tan(\omega_r + |\theta_i|) \frac{u_2}{U_r}}{1 + \tan^2(\omega_r + |\theta_i|) \left(1 - \frac{u_2}{U_r}\right)} \tag{2.4.4}$$

ここで、 $u_2$ は反射衝撃波背後の流体粒子速度を示している。入射衝撃波背後の圧力 $P_1$ と反射衝撃波背後の圧力 $P_2$ は衝撃波面前後に式(2.1.1)、(2.1.2)の質量と運動量の保存式を適用し、圧力 $P_1$ に対して衝撃波面の法線速度と衝撃波背後の流体粒子速度の間に線形関係を適用する。

$$P_1 = P_0 + \frac{\rho_0 U_s (U_s - C_0)}{S} \tag{2.4.5}$$

$$P_2 = P_1 + \rho_1 U_r u_2 \tag{2.4.6}$$

以上の関係を用いて、入射衝撃波の速度 $U_s$ と傾斜角度 $\phi_w$ が与えられると領域(1)、(2)の物理量を得ることができる。

### 2.4.2 三衝撃波理論(マッハ反射)

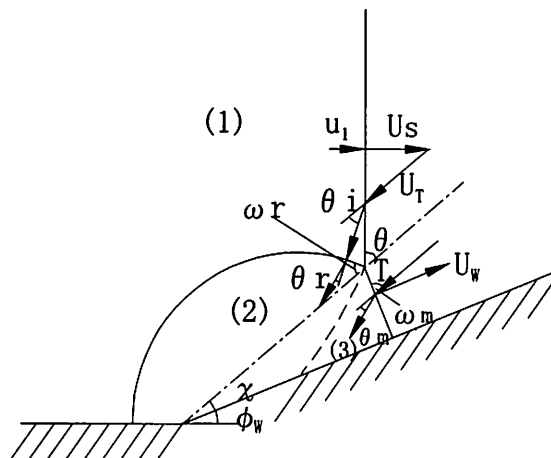


図2.8 マッハ反射の模式図

マッハ反射の場合、図2.8に示すように入射衝撃波、反射衝撃波ならびにマッハシステムが交差する点T(三重点)の速度を $U_T$ とすると、この速度の向きと逆向きに $U_T$ を流れ場全体に加えることにより、入射衝撃波、反射衝撃波ならびにマッハシステムを静止させることができる。この場合マッハシステムは直線であると仮定し、三重点は点Tで一点に集中して反射衝撃波も強いとする。また反射衝撃波背後の流れとマッハシステム背後の流れを分けている“すべり線”(図2.8中の破線)も明確に存在すると仮定する。そしてこの衝撃波静止座標系で、すべり線前後の圧力と速度の向きは等しいと仮定する。この仮定から領域(1)と(2)に対する流れの転向角度の和はマッハシステムを横切る流れの転向角度に等しくなる。したがって、

$$\theta_i + \theta_r = \theta_m \tag{2.4.7}$$

ここで, 入射衝撃波を横切って生じる転向角度を  $\theta_i$ , 反射衝撃波を横切る場合の転向角度を  $\theta_r$ , そして, マッハシステムを横切って生じる転向角度を  $\theta_m$  とする。正常反射の場合と同様に  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  は次式で示される。

$$\tan \theta_i = \frac{-\tan \theta \frac{u_1}{U_s}}{1 + \tan^2 \theta \left(1 - \frac{u_1}{U_s}\right)} \quad (2.4.8)$$

$$\tan \theta_r = \frac{\tan(\omega_r + |\theta_i|) \frac{u_2}{U_r}}{1 + \tan^2(\omega_r + |\theta_i|) \left(1 - \frac{u_2}{U_r}\right)} \quad (2.4.9)$$

ここで,

$$U_1 \sin(\theta - |\theta_i|) = U_s - u_1$$

$$U_r = U_1 \sin(\omega_r + |\theta_i|)$$

$$U_s = C_0 + S u_1$$

である。

入射衝撃波背後の圧力  $P_1$ , 反射衝撃波背後の圧力  $P_2$  ならびにマッハシステム背後の圧力  $P_3$  は, 圧力  $P_1$  と  $P_3$  に対して衝撃波面の法線速度と衝撃波背後の流体粒子速度の間に線形関係を適用して次式が得られる。

$$P_1 = P_0 + \frac{\rho_0 U_s (U_s - C_0)}{S} \quad (2.4.10)$$

$$P_2 = P_1 + \rho_1 U_r u_2 \quad (2.4.11)$$

$$P_3 = P_0 + \rho_0 U_T \sin(\omega_m) \frac{\{U_T \sin(\omega_m) - C_0\}}{S} \quad (2.4.12)$$

ここで, 三重点軌跡角度を  $\chi$ , 反射面の傾斜角度を  $\phi_w$  とすると,

$$U_T = \frac{U_s}{\cos(\chi + \phi_w)}$$

となり, 入射角度  $\theta$  は次式で得られる。

$$\theta = 90^\circ - (\chi + \phi_w)$$

また, 前述のように領域 (2), (3) の圧力は等しいと仮定する。

$$P_3 = P_2 \quad (2.4.13)$$

マッハシステム背後の流体粒子速度を  $u_3$  とすると,  $u_3$  は次式で表される。

$$u_3 = \frac{\sqrt{C_0^2 + \frac{4S(P_3 - P_0)}{\rho_0}} - C_0}{2S}$$

衝撃波静止座標に対し, 衝撃波前後の接線速度は等しいと仮定できるので次式が成り立つ。

$$U_T \sin(\omega_m - |\theta_m|) = U_T \sin \omega_m - u_3$$

また, マッハシステムに垂直な法線方向速度は次式を用いる。

$$U_T \sin \omega_m = C_0 + S u_3$$

また,  $\theta_m$  は次式で示される。

$$\tan \theta_m = \frac{-\tan \omega_m \frac{u_3}{U_T \sin \omega_m}}{1 + \tan^2 \omega_m \left(1 - \frac{u_3}{U_T \sin \omega_m}\right)} \quad (2.4.14)$$

これらの関係を用いて、入射衝撃波の速度 $U_s$ と傾斜角度 $\phi_w$ が与えられると領域(1), (2), (3)の物理量を得ることができる。

以上の二衝撃波理論ならびに三衝撃波理論は、反射衝撃波背後の物理量や反射形態の遷移基準を予測することができる。

### 3. まとめ

この報告書は、凝縮系媒質中の爆轟現象ならびに爆薬の爆轟によって水、PMMAなどの凝縮媒体中に発生する衝撃波の反射現象を理論解析する場合に必要な基礎式を述べた。最初に垂直衝撃波の関係式を示した。衝撃波が反射面に衝突すると、じょう乱が発生し、このじょう乱が衝撃波上を伝播して衝撃波の形状ならびに強さを変える。この現象を解明するために有効なWhithamのRay-Shock理論を記述した。WhithamのRay-Shock理論は、von Neumann反射とマッハ反射の遷移基準を予測することができる。また、爆薬の爆轟によって媒質中に発生した衝撃波の強さと爆轟生成ガスの膨張の関係を明らかにできる可能性がある特性曲線理論を述べた。そして、衝撃波の反射に関して、よく知られたる理論として二衝撃波理論と三衝撃波理論を取り上げた。これらの理論は、反射衝撃波背後の物理量を予測することができる。

### 文献

- (1) 灘光陽, 本田隆志, 藤田昌大, 伊東繁, 第一工業大学研究報告, 第13号(2001), 41-47
- (2) 灘光陽, 本田隆志, 藤田昌大, 伊東繁, 第一工業大学研究報告, 第14号(2002), 51-58
- (3) 灘光陽, 本田隆志, 藤田昌大, 伊東繁, 第一工業大学研究報告, 第16号(2004), 21-33
- (4) 生井武文, 松尾一泰, 衝撃波の力学, コロナ社, (1983).
- (5) 松尾一泰, 圧縮性流体力学, 理工学社, (1994).
- (6) Whitham, G.B., J.of Fluid Mech., Vol.2, (1957), 145-171.
- (7) Chester, W., Philosophical Mag., 45-7 (1954), 1293-1301.
- (8) Chisnell, R.F., J.of Fluid Mech., Vol.2 (1957), 286-298.
- (9) Whitham, G.B., J.of Fluid Mech., Vol.4, (1958), 337-360.
- (10) Oshima, K., Sugaya, K., Yamamoto, M.and Totoki, T., Institute of Space and Aeronautical Science University of Tokyo Report No.393, (1965), 51-82.
- (11) Milton, B.E., AIAA J., 13-11 (1975), 1531-1533.
- (12) リーマン・ロシュコ, 気体力学, 吉岡書店, (1960).
- (13) Ben-Dor G., "Shock Wave Reflection Phenomena", Springer-Verlag, (1991).
- (14) 高山和喜編, 衝撃波ハンドブック, シュプリンガー・フェアラーク東京(1995).
- (15) Takayama, K., Sasaki, M., Rep. Inst. High Speed Mech., Vol.46 (1983), No.353, 1-30.
- (16) Neumann, J.von, "Theory of Shock wave", Collected works, Vol.6, Pergamon Press, (1963), 238-299.