自然演繹法の健全性について

山元　完二*

On the soundness of natural deduction theory

Kanji YAMAMOTO

Logic is often called the language of mathematics, in which we can see some truth. But, logic itself is analyzed and constructed by means of mathematical skills. In this sense, we cannot drow a clear line between logic and mathematics.

The aime of this paper is to show the soundness of natural deduction theory, which is one style of logics. This theory has wide apprecation and is easy to use. Therefore, it is meaningful to show its soundness. This theory is developed on the base of propositional logic. The main part of this paper is chapter 7.

1．まえがき

この論文の目的は数学的論理学のなかの自然演繹法といわれる論理体系の健全性について述べることにある。

ここで取り扱う自然演繹法は1階の量化理論（述語論理）で，命題論理については既知のものとし，その上に理論を展開する。準備段階がいささか長くなるが本質的な部分は7.である。

2．量化理論で用いる記号

(1)　文一記号

$p \quad q \quad r \quad s \quad t \quad p_1 \quad q_1 \quad r_1 \cdots\cdots$

(2)　変　項

$u \quad v \quad w \quad x \quad y \quad z \quad u_1 \quad v_1 \cdots\cdots$

(3)　定　項

$a \quad b \quad c \quad a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \cdots\cdots$

(4)　暫定定項

$f \quad g \quad h \quad f' \quad g' \quad h' \quad f'' \quad h'' \cdots\cdots$

(5)　述語一記号

$F \quad G \quad H \quad J \quad K \quad L \quad I' \quad G' \cdots\cdots$

(6)　論理結合子

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

(7)　量化記号

普遍量化記号　$\forall$

存在量化記号　$\exists$

(8)　補助記号

コンマとカッコ　，　(　)

(9)　その他

以下に定める量化論理式を表すメタ言語の記号としてϕ, ψ, χ, ϕ_1, ψ_1, χ_1, ……，定項および変項を表すメタ言語の記号としてA, X, Y, Z, V, W, T, A_1, ……を使用する。

3．量化論理式の定義といくつかの概念

3.1　量化論理式の定義

(1)　ただ1つの文記号は量化論理式である。

(2)　Fが述語記号，X_1, …, X_nが定項または変項であるとき，$F(X_1 \cdots X_n)$は量化論理式である。

(3)　ϕ, ψが量化論理式であるとき，$\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$は量化論理式である。

(4)　ϕが量化論理式，Xが変項であるとき，$\forall X\phi$, $\exists X\phi$は量化論理式である。

以上の(1)～(4)のみが量化論理式である。

3.2　変項の束縛と自由

ϕを量化論理式，Xを変項とする。ϕの中のXについての量化記号の支配域の中にXが現れるとき，Xはその場所で束縛されているといい，そうでないとき，Xはその場所で自由であるという。

* 航空工学科

3.3　量化論理式の選例と同型選例

$\forall X\phi$（または，$\exists X\phi$）があるとする。ϕ の中で自由で現れるすべての X を変項，定項または暫定定項（これらを総称して項とよぶ）T で置き換えた論理式を $\phi_{X/T}$ で表し，これを T と選例項とする $\forall X\phi$（または $\exists X\phi$）の選例という。ただし，ϕ の中で X が自由で現れているすべての場所で $\phi_{X/Y}$ については T が自由で現れていなくてはいけない。

$\forall X\phi$（または，$\exists X\phi$）の T を選例項とする選例のうち，X が自由で現れているすべての場所で，かつその場所のみで T が自由に現れている選例 $\phi_{X/T}$ を $\forall X\phi$（または，$\exists X\phi$）の T を選例項とする同型選例という。

4．量化理論における論理式の解釈といくつかの補題

4.1　量化理論における論理式の解釈

量化理論における論理式の解釈とは

（1）　空でない議論領域を設定する。
（2）　文記号には真理値を与える。
（3）　定項には領域内の一定の対象を与える。
（4）　変項には領域内の任意の対象を与える。
（5）　述語記号には領域内の対象のクラスを指定する。
（6）　普遍量化記号は「領域内のすべての対象について成立する」。存在量化記号は「領域内のある対象について成立する」と翻訳する。

これら(1)から(6)までの手続きのことをいう。ある一定の解釈のことを解釈Ｉと呼ぶことがある。

4.2　量化論理式が妥当であるということ

自由な変項をもたない量化論理式 ϕ が妥当であるとは，任意の解釈Ｉに対して ϕ が常に真となることである。より詳しくいうならば，任意の空でない議論領域 D をとり，ϕ の中の文記号には任意の真理値を，述語記号には D 内の対象の組の任意のクラスをその解釈として与えたときに ϕ が常に真となることである。

ϕ が自由な変項 $X_1, \cdots X_n$ をもつときは $\forall X_1 \cdots \forall X_n\phi$ が妥当であるとき，ϕ は妥当であるという。

4.3　いくつかの補題とその証明

ここで後半の命題の証明の中で使うメタ定理を補題として挙げ，それらを証明する。なお，量化論理式 ϕ が妥当であることをメタ記号 $\vdash$ を用いて，$\vdash\phi$ と表すことにする。

補題１． ϕ，ψ を X が自由で現れていない論理式とする。このとき

$\vdash\phi\leftrightarrow\psi$ ならば $\vdash\forall X\phi\leftrightarrow\forall X\psi$，$\vdash\exists X\phi\leftrightarrow\exists X\psi$

（証明） $\phi\leftrightarrow\psi$ と仮定する。ϕ を真とする解釈Ｉを任意にとってくる。ϕ の中には X が自由で現れていないので，$\forall X\phi$ はこの解釈Ｉの下で真である。また，$\phi\leftrightarrow\psi$ という仮定により ψ もＩに対して真である。X は ψ の中でも自由で現れていないから，$\forall X\psi$ も真である。ϕ を偽とする解釈に対しても全く同様の議論ができる。よって，前半部が証明された。$\exists X\phi\leftrightarrow\exists X\psi$ も同様である。（証明終）

補題２． ϕ は X が自由で現れていない論理式，ψ は X が自由で現れている論理式とする。このとき，

（1）　$\vdash\forall X(\phi\rightarrow\psi)\leftrightarrow(\phi\rightarrow\forall X\psi)$
（2）　$\vdash(\exists X\psi\rightarrow\phi)\leftrightarrow\forall X(\psi\rightarrow\phi)$

（(1)の証明） $\forall X(\phi\rightarrow\psi)$ を偽とする解釈Ｉを任意に与える。すると ϕ，ψ の中の文記号，述語記号，定項にはそれぞれ解釈が決まってくる。また ϕ，ψ の中に自由な変項 $Y_1, \cdots Y_n$ がある場合は $Y_1, \cdots Y_n$ の解釈として議論領域 D 内の任意の n 個の対象の組 $d_1, \cdots, d_n$ をとったとき，X の解釈としてある d が D の中に存在して，$\phi\rightarrow\psi$ を偽にするということである。すなわち，この d に対して ϕ は真で ψ は偽になるということである。ところが X は ϕ の中では自由で現れていないから X の解釈として D 内のどの対象をとろうと ϕ は常に真である。一方，d に対しては ψ は偽である。よって $\forall X\psi$ は ψ を偽とする対象 d が存在するから偽である。ゆえに，$\phi\rightarrow\forall X\psi$ は偽となる。逆に $\phi\rightarrow\forall X\psi$ を偽と仮定すると同様の議論から $\forall X(\phi\rightarrow\psi)$ も偽となる。（(1)の証明終）

（(2)の証明） $\exists X\psi\rightarrow\phi$ が偽となる解釈Ｉを任意に与える。すると ψ，ϕ の中の文記号，述語記号，定項の解釈はそれぞれ決まってくる。また ψ，ϕ の中に自由な変項 $Y_1, \cdots Y_n$ がある場合，それらの解釈として任意の $d_1, \cdots d_n$ に対して X の解釈としてある d が D の中に存在して，その d に対して ψ は真，ϕ は偽ということである。よって，d に対しては $\psi\rightarrow\phi$ は偽であるから $\forall X(\psi\rightarrow\phi)$ は偽となる。

逆に，$\forall X(\psi\rightarrow\phi)$ を偽とする解釈を任意に与える。それに応じて，ψ，ϕ の中の文記号，述語記号，定項にはそれぞれ解釈が決まる。ψ，ϕ の中に変項 $Y_1, \cdots Y_n$ が存在する場合は，それらの解釈として議論領

域 D 内の任意の n 個の対象の組 $d_1, \cdots, d_n$ に対して X の解釈としてある d が D の中に存在して，その d については $\phi \rightarrow \phi$ が偽となることである。すなわち，その d を X として解釈すると ϕ は真，ϕ は偽となる。ϕ を真とする d が存在するから，$\exists X\phi$ は真，また，ϕ の中には X は自由で現れていないから d も ϕ の中にはない。よって解釈Ｉの下で $\exists X\phi \rightarrow \phi$ は偽となる。

以上の議論により，$(\exists X\phi \rightarrow \phi) \leftrightarrow \forall X(\phi \rightarrow \phi)$ が証明された。　　　　　　　　　　　（証明終）

補題３． ϕ を Y が自由で現れている論理式，ϕ を $\phi = \phi_{Y/X}$ という形の $\exists Y\phi$ の同型選例とする。このとき，

$\vdash \exists X(\exists Y\phi \rightarrow \phi)$

（証明） ϕ は $\exists Y\phi$ の Y を X で置き換えた同型選例であるから，ϕ の中には自由で現れる X はないし，かつ ϕ の中には自由で現れる Y もない。ここで任意に解釈Ｉを与えると，それによって ϕ, ϕ の中の文記号，述語記号の解釈が決まる。また，ϕ, ϕ の中の自由な変項に対しては議論領域 D 内の項を任意に与えてやることにすると，ϕ は自由な変項 X の解釈によってその真，偽が決まる。今，$\exists Y\phi$ が偽のときは $\exists Y\phi \rightarrow \phi$ は真理関数的に真，よって $\exists X(\exists Y\phi \rightarrow \phi)$ は真である。$\exists Y\phi$ が真のときは，ϕ を真にする解釈 d が D の中に存在する。ϕ は ϕ の中の自由な Y が X に変わった以外に異なるところが全くないから，ϕ の中の X の解釈として d をとれば ϕ は真となる。よって $\exists Y\phi \rightarrow \phi$ を真にする X の解釈 d が存在する。ゆえに，$\exists X(\exists Y\phi \rightarrow \phi)$ は真である。　　　（証明終）

補題４． ϕ は X が自由で現れている論理式であり，ϕ は $\phi = \phi_{X/Y}$ という形の $\exists X\phi$ の選例とする。このとき，

$\vdash \forall Y(\phi \rightarrow \exists X\phi)$

（証明） 解釈Ｉを任意に与える。それに応じて ϕ と ϕ の中の文記号，述語記号，定項にはそれぞれ解釈が決まる。また ϕ, ϕ の中の自由で現れる変項には議論領域 D 内の項を任意に与える。ϕ が偽のときは $\phi \rightarrow \exists X\phi$ は真理関数的に真であるから $\forall Y(\phi \rightarrow \exists X\phi)$ は真である。ϕ が真のとき，このとき ϕ の中の自由な変項 Y に対して ϕ を真にする対象 d が D の中に存在する。ϕ は ϕ の中の自由な X を Y に置き換えた式だから ϕ の中の Y を d と解釈すると ϕ は真になる。すなわち $\exists X\phi$ は真となる。よって $\phi \rightarrow \exists X\phi$ は真である。このことは ϕ を真とする任意の Y についていえるから $\forall Y(\phi \rightarrow \exists X\phi)$ は真である。（証明終り）

5．演繹の規則と定義

5.1　演繹の規則

（1）　P－規則

任意の論理式を演繹のどのラインとして導入してもよい。そのとき導入されたライン i の左側にはそのラインの番号 i と前提番号として (i) を記し，右側には P と記す。

（2）　C－規則

ある繹演中に論理式 ϕ_i があるとき，ϕ_i の左側の（　）内に現れる番号，たとえば k があるとすると，ライン ϕ_k を前件とし ϕ_i を後件とする条件法，$\phi_k \rightarrow \phi_i$ をその演繹に付け加えてよい。そのとき，$\phi_k \rightarrow \phi_i$ の左側にはそのライン番号を，（　）内には ϕ_i の（　）内の番号から k を除いたものを書き，右側には k，ic と記す。

（3）　TF－規則

ある演繹中の $i_1, \cdots, i_k$ のラインの論理式 $\phi_{i_1}, \cdots, \phi_{ik}$ の連言とある論理式 ϕ との条件法，すなわち $\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ik} \rightarrow \phi$ が恒真な論理式の代入例になっているとき，その演繹に ϕ を新しいラインとして付け加えることができる。ϕ のラインの左側にはそのラインの番号を，そして（　）内には $i_1, \cdots, i_k$ のそれぞれのラインの（　）内に現れるすべての番号を記入し，右側には $i_1, \cdots, i_k$ TF と記す。ただし ϕ がある恒真な論理式の代入例となっているとき，つまり $i_k = 0$ であるとき，そのラインの（　）内は空であり，右側は TF のみとなる。すなわち仮定なしで成立するということである。

（4）　UI－規則

ある演繹中にライン $\forall X\phi$ があるとき，$\forall X\phi$ の T を選例項とする選例 $\phi_{X/T}$ をその演繹に付け加えてよい。そのラインの左側にはそれ自身のライン番号を，そして（　）内には $\forall X\phi$ のラインの（　）内のすべての番号を入れ，右側には $\forall X\phi$ の番号の後に UI と記す。

（5）　EG－規則

ある演繹中にライン ϕ があるとき，ϕ をその選例とするところの $\exists X\phi$ をその演繹に付け加えてもよい。すなわち $\phi = \phi_{X/T}$ の形になっている。新しいラインの左側にはそれ自身のライン番号を，そして（　）内にはライン ϕ の（　）内のすべての番号を入れ，右側にはその ϕ の番号の後に EG と記す。

(6) EI −規則

ある演繹中にライン $\exists X\phi$ があるとき，暫定定項 T を選例項とする $\exists X\phi$ の選例 $\phi_{X/T}$ をその演繹に付け加えてよい。新しいラインの左側にはそれ自身のライン番号と（ ）内には $\exists X\phi$ のラインの（ ）内のすべての番号を入れ，右側には $\exists X\phi$ のライン番号の後に EI と記す。ただし，

(i) 選例項 T は演繹の中で初めて用いられる暫定定項でなければならない。

(ii) 暫定定項の右下に変項をマークする。

(iii) ライン $\exists X\phi$ の中に T 以外の暫定定項がすでに現れているときには，それらの暫定定項として書き出されていた変項のすべてをまた T の添字として書き出さなくてはならない。

(7) UG −規則

演繹中に ϕ があるとき，ϕ をその同型選例とするところの（ただし Y を選例変項とする）$\forall X\phi$ を付け加えてよい。($\phi_{X/Y}=\phi$)，ただし Y は

(i) ϕ のどの前提の中でも自由で現れていてはいけない。

(ii) ϕ および ϕ の前提のどれかに現れるどの暫定定項の添字としてもマークされていてはいけない。

以上。

5.2 演繹の定義

論理式の列 $\phi_1, \cdots, \phi_n$ が

1. ϕ_1 は P −規則か TF −規則によって導入されている。
2. $\phi_2, \cdots, \phi_n$ は
   a. P −規則によって導入されているか，
   b. それより前のひとつの論理式から UI, EI, EG, UG −規則のどれかによって得られるか，
   c. それより前のいくつかの論理式から TF −規則によって得られるか，
   d. それより前の2つの論理式から C −規則によって得られるか，

のいずれかであるとき，$\phi_1, \cdots, \phi_n$ は演繹であるという。

6．演繹の例

例1． 前提 $\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists x(H(x)\wedge F(x))$ から，結論 $\exists x(H(x)\wedge G(x))$ を得る演繹を作る。

(1)	1	$\forall x(F(x)\to G(x))$	P
(2)	2	$\exists x(H(x)\wedge F(x))$	P
(2)	3	$H(f)\wedge G(f)$	2 EI
(1)	4	$F(f)\to G(f)$	1 UI
(1,2)	5	$H(f)\wedge G(f)$	3, 4 TF
(1,2)	6	$\exists x(H(x)\wedge G(x))$	5 EG

以上

これがライン1とライン2の論理式を仮定し，ライン6の論理式を得る演繹である。本論文の主題は，例えば上の演繹でいうならば，暫定定項の入っていないライン1，2，6はそれぞれ

$\forall x(F(x)\to G(x))\to\forall x(F(x)\to G(x))$,

$\exists x(H(x)\wedge F(x))\to\exists x(H(x)\wedge F(x))$,

$\forall x(F(x)\to G(x))\wedge\exists x(H(x)\wedge F(x))\to\exists x(H(x)\wedge G(x))$

が妥当であり，暫定定項の入っているライン3，4，5については，それぞれ

$\exists x(H(x)\wedge F(x))\wedge(\exists x(H(x)\wedge F(x)\to H(z)\wedge F(z))\to H(z)\wedge F(z)$,

$\forall x(F(x)\to G(x))\wedge(\exists x(H(x)\wedge G(x))\to H(z)\wedge G(z))\to(F(z)\to G(z))\to H(z)\wedge F(z)$,

$\forall x(F(x)\to G(x))\wedge\exists x(H(x)\wedge F(x))\wedge(\exists x(H(x)\wedge F(x))\to H(z))\wedge F(z))\to H(z)\wedge F(z)$

が妥当であることの一般的な証明をするところにある。

なお，ここで暫定定項fは変項を表す記号 z に置き換えておくことにする。というのは，暫定定項は演繹の過程の中での暫定的な命名であって論理式の妥当性というのは一般的な対象について述べるべきことだからである。

7．自然演繹法の健全性について

命題A

演繹中のライン番号 n の部分

$(i_1, \cdots, i_r)$ n χ

が，EI をたかだか m 回用いることによって得られたラインとする。このとき，

〔a〕 $\phi'_{i1}\wedge\cdots\wedge\phi'_{ir}\wedge(\exists Y_1\phi'_1(Y_1)\to\phi'_1(z_m))\wedge\cdots\wedge(\exists Y_m\phi'_m(Y_m)\to\phi'_m(z_1))\to\chi'$

は妥当である。ただし，$\phi'_{i1}, \cdots, \phi'_{ir}$ および $\phi'_1, \cdots, \phi'_m, \chi'$ はそれぞれ，χ の前提 $\phi_{i1}, \cdots, \phi_{ir}$ および $\phi_1, \cdots, \phi_m, \chi$ の中の暫定定項 $T_1, \cdots, T_m$ をそれぞれ変項 $Z_m, \cdots, Z_1$ で置き換えた結果を表すものとする。

（証明）演繹のラインの数に関する帰納法で証明を行う。

〔I〕 ライン1については，このとき用いられる規

則はP－規則かまたはTF－規則である。

(i) P－規則のとき

(1) 1 χ P

の形であるが，$\chi \to \chi$ は妥当であるから〔a〕は成り立つ。

(ii) TF－規則のとき，

( ) 1 χ TF

の形であるが，χ は恒真な論理式の代入例であるから χ は妥当である。よって〔a〕は成り立つ。

〔II〕 ラインnに対してライン$n-1$までは〔a〕が成立していると仮定する。この仮定の下で

(i) ラインnがP－規則のとき，

ライン$n-1$までにEIが用いられている可能性があるから$\chi \to \chi$の中に暫定定項が現れている可能性がある。しかし，$\chi' \to \chi'$ は真理関数的に妥当だから〔a〕は成立する。

(ii) ラインnがTF－規則であるとき，

ラインnを

$(i_1, \cdots, i_r)$ n χ $j_1, \cdots, j_\ell$ TF

の形であるとしよう。ライン$j_1, \cdots, j_\ell$の論理式を$\chi_1, \cdots, \chi_\ell$ そしてそれらの前提の連言をそれぞれ$\phi_1, \cdots, \phi_\ell$とする。ライン$n$は$TF$－規則による帰結だから，$\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_\ell \to \chi$ は真理関数的に妥当である。よって各$\chi_i (1 \leqq i \leqq \ell)$の中の暫定定項$T_j$を対応する$Z_s$ $(s = \ell - i + 1)$で置き換えた結果をχ'_iとしたときの$\chi'_1 \wedge \cdots \wedge \chi'_\ell \to \chi'$ も妥当である。さらにまた，各ϕ_i $(1 \leqq i \leqq \ell)$の中の暫定定項を対応するZ_sで置き換えたϕ'_iに，それに関連する$\exists Y_{ji} \phi'_j(Y_{ji}) \to \phi'_j(Z_s)$を連言で結んだ式から帰納法の仮定によって$\chi'_i$を結論として得ることができる。すなわち，次の式

$\phi'_i \wedge (\exists Y_j \phi'_j(Y_{ji}) \to \phi'_j(Z_s)) \to \chi'_i$

は妥当である。よって

$\phi'_1 \wedge \cdots \wedge \phi'_\ell \wedge (\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'_1(Z_\ell)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_\ell \phi'_\ell(Y_\ell) \to \phi'_\ell(Z_1)) \to \chi'$

が妥当となる。ここで$\phi'_i, \cdots, \phi'_\ell$, $\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'_1(Z_\ell), \cdots, \exists Y_\ell \phi'_\ell(Y_\ell) \to \phi'_\ell(Z_1)$はすべて〔a〕の前件の中に含まれるから結局〔a〕の妥当性がいえることになる。

(iii) ラインnがC－規則であるとき

(j_1) j_1 χ_1 P
⋮ ⋮ ⋮
$(i_1, \cdots, i_r, j_1)$ j_2 χ_2
⋮ ⋮ ⋮
$(i_1, \cdots, i_r)$ n $\chi_1 \to \chi_2$ j_1, j_2 C

の形である。χ'_1, χ'_2をχ_1, χ_2からの例の置き換えによる結果とすればラインj_2については帰納法の仮定から

([a]の前件) $\wedge \chi'_1 \to \chi'_2$

は妥当である。また，

(([a]の前件) $\wedge \chi'_1 \to \chi'_2) \to$ (([a]の前件) $\to (\chi'_1 \to \chi'_2))$

は真理関数に妥当であるから

([a]の前件) $\to (\chi'_\chi \to \chi'_2)$

は妥当である。

(iv) ラインnがUI－規則のとき，

$(i_1, \cdots, i_r)$ j $\forall X \chi(X)$
⋮ ⋮
$(i_1, \cdots, i_r)$ n $\chi(T)$ j UI

の形である。$\forall X \chi'(\chi)$を例の置き換えの結果とすれば，帰納法の仮定により

([a]の前件) $\to \forall X \chi'(X)$

は妥当である。また，

$\forall X \chi'(X) \to \chi'(Z)$

も妥当であるから

([a]の前件) $\to \chi'(Z)$

は妥当である。

(iv) ラインnがEI－規則であるとき，

$(i_1, \cdots, i_r)$ j $\exists X \chi(X)$
⋮ ⋮ ⋮
$(i_1, \cdots, i_r)$ n $\chi(T)$ T j EI

の形である。ライン$n-1$までにEI規則は$m-1$回用いられているとしてよい。すると帰納法の仮定によって

$\phi'_i \wedge \cdots \wedge \phi'_{ir} \wedge (\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'_1(Z_m)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_{m-1} \phi'_{m-1}(Y_{m-1}) \to \phi'_{m-1}(Z_2)) \to \exists X \chi'(X)$

は妥当である。よって

$\phi'_i \wedge \cdots \wedge \phi'_{ir} \wedge (\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'_1(Z_m)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_{m-1} \phi'_{m-1}(Y_{m-1}) \to \phi'_{m-1}(Z_2)) \wedge (\exists X \chi'(X) \to \chi'(Z_1)) \to \chi'(Z_1)$

は真理関数的に妥当である。この式はまさに〔a〕の形であり，よって〔a〕が証明された。なお，これが真理関数的に妥当であることは，この論理式が恒真な論理式$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \wedge (q \to r) \to r)$への代入例であることによってわかる。

(v) ラインnがUG－規則であるとき，

$(i_1, \cdots, i_r)$ j $\chi(X)$
⋮ ⋮
$(i_1, \cdots, i_r)$ n $\forall X \chi(X)$ j UG

の形である。ライン n を得るまでに EI －規則が m 回用いられているとする。いま，UG －規則についての条件から X は $\phi_{i1}, \cdots, \phi_{ir}$ の中で自由で現れていることはなく，また，$\phi_{i1}, \cdots, \phi_{ir}$ および χ の中のどれかに現れるどの暫定定項 $T_j(1 \leqq j \leqq m)$ の添字としてもマークされていないことを確認しておく。

帰納法の仮定により，

([a]の前件) $\rightarrow \chi'(X)$

は妥当である。そこで，これから先

([a]の前件) $\rightarrow \forall X\chi'(X)$

の妥当性を述べることになる。それには暫定定項 $T_1, \cdots, T_m$ が χ の中に現れる可能性によって場合分けをする必要がある。

(場合1) χ の中に $T_1, \cdots, T_m$ のすべてが現れている場合

([a]の前件) $\rightarrow \chi'(X)$

が妥当であったから

$\forall X$ (([a]の前件) $\rightarrow \chi'(X)$)

は妥当である。今，場合分けの仮定により X は T_j $(1 \leqq j \leqq m)$ の添字ではない。よって，X はどの $\exists Y_j\phi'_j(Y_j) \rightarrow \phi'_j(Z_s)$ の中でも自由でない。さらに X は $\phi_{i1}, \cdots, \phi_{ir}$ の中でも自由でないから〔a〕の前件では自由で現れることはない。よって，

$\forall X$ (([a]の前件) $\rightarrow \chi'(X)$) に補題2の(1)式が適用でき，

([a]の前件) $\rightarrow \forall X\chi'(X)$

の妥当性がいえることになる。

(場合2) χ の中に $T_1, \cdots, T_m$ のすべてではなく，いくつかが現れている場合

一般的には複雑になるので，一般性を失わない程度，ここでは $m=5$ とし，この場合の証明をもって一般的な場合の証明に代えることにする。

今，T_1, T_3 が $\chi(X)$ の中に現れているとしよう。もし残りの T_2, T_4, T_5 の添字として X がマークされていなければ UG －条件の規則(ii)によって，X は $T_1, \cdots, T_5$ のすべての暫定定項の添字としてマークされていない。また，X は UG －条件の(i)により $\phi_{i1}, \cdots, \phi_{ir}$ の中で自由で現れることはないから X は〔a〕の前件の中で自由で現れてはいない。よって，(場合1)のときと同様の理由から〔a〕の妥当性が得られる。

そこで，$\chi(X)$ の中に現れない T_2, T_4, T_5 の中の少なくとも1つ，例えば，T_2 と T_4 は X を添字としてもつとしよう。すると暫定定項 $T_1, \cdots, T_5$ は次の3種類に分類される。

① $\chi(X)$ の中に現れているもの；T_1, T_3

② $\chi(X)$ の中に現れておらず，しかも X を添字としてもたないもの；T_5

③ $\chi(X)$ の中に現れておらず，しかも X を添字としてもつもの；T_2, T_4

結局，分類③に属する T_2, T_4 のみが X を添字としてもつということになる。

ここで次の2つのことを確認しておく。

先ず，ここでは $m=5$ としてそれの妥当性の証明を行おうというのだから，〔a〕は次のようになる。

〔イ〕 $\phi'_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi'_{ir} \wedge (\exists Y_1\phi'_1(Y_1) \rightarrow \phi'_1(Z_5)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_5\phi'_5(Y_5) \rightarrow \phi'_5(Z_1)) \rightarrow \forall X\chi'(X)$

すなわち，この論理式の妥当性を証明しようというのである。

もう一つは，第 n 行が

$(i_1, \cdots, i_r)$ n χ

であるとき，これに対し

〔a〕 $\phi'_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi'_{ir} \wedge (\exists Y_1\phi'_1(Y_1) \rightarrow \phi'_1(Z_m)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_m\phi'_m(Y_m) \rightarrow \phi'_m(Z_1)) \rightarrow \chi$

を作るのであるが，論理式〔a〕は暫定定項 T_i を Z_{m-i-1} で置き換えた式であるからこの中の $Z_m, \cdots, Z_1$ は自由な変項ということになる。それゆえ〔a〕の妥当性は，本来は $Z_1, \cdots, Z_m$ を普遍量化した式

$\forall Z_1, \cdots, \forall Z_m$ 〔a〕

の妥当性のことなのであるが，(i)から(iv)までの証明では次の明らかなメタ定理

ϕ が X を自由な変項とするとき，

$\vdash \phi$ ならば $\vdash \forall X\phi$

によって〔a〕が妥当であることを示すことで十分としたのである。しかし以下の証明では本来の意味での

$\forall Z_1, \cdots, \forall Z_m$ 〔a〕

の妥当性の証明をする必要がでてくる。

以上，二つの確認をしておく。

さて，ここで帰納法の仮定より

〔ロ〕 $\phi'_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi'_{ir} \wedge (\exists Y_1\phi'_1(Y_1) \rightarrow \phi'_1(Z_5)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_5\phi'_5(Y_5) \rightarrow \phi'_5(Z_1)) \rightarrow \chi'(X)$

は妥当である。これからの仕事は〔ロ〕式から分類③に属する T_2, T_4 の導入に使われた EI －規則 $\exists Y_2\phi'_2(Y_2) \rightarrow \phi'_2(Z_4)$ と $\exists Y_4\phi'_4(Y_4) \rightarrow \phi'_4(Z_2)$ を消去することにある。

X は T_1, T_2 の添字としてマークされていないから ϕ_1, ϕ_3 の中で自由で現れてはいない。また X を添字としてもつものの中で後の方の T_4 は ϕ_5 の中では現れ

ていない。なぜなら，もし現れていれば T_4 の添字 X は T_5 の添字としてもマークされているはずだからである。さらに T_5 は ϕ_1, …, ϕ_4 までには現れていない新しい暫定定項であり，また UG －規則の条件(ii)によって T_4 は ϕ_{i1}, …, ϕ_{ir} の中に現てれいない。ゆえに T_4 が現れるのは

$\exists Y_4\phi_4(Y_4)\rightarrow\phi_4(T_4)$

のみである。それゆえ，T_4 に置き換わる Z_2 が現れるのは

$\exists Y_4\phi'_4(Y_4)\rightarrow\phi'_4(Z_2)$

のみということになる。

このことから〔ロ〕は真理関数的に

〔ハ〕 $\phi'_{i1}\wedge\cdots\wedge\phi'_{ir}\wedge(\exists Y_1\phi'_1(Y_1)\rightarrow\phi'_1(Z_5))\wedge\cdots\wedge(\exists Y_3\phi'_3(Y_3)\rightarrow\phi'(Z_3)\wedge(\exists Y_5\phi'_5(Y_5)\rightarrow\phi'_5(Z_1))\rightarrow((\exists Y_4\phi'_4(Y_4)\rightarrow\phi'_4(Z_2))\rightarrow\chi'(X))$

と等値ということになる。この式で Z_2 に普遍量化を施すと

$\forall Z_2$(〔ハ〕)

は前に述べた z_2 の現れている場所より補題２の(1)式が使えて

(〔ハ〕の前件) $\rightarrow\forall Z_2((\exists Y_4\phi'_4(Y_4)\rightarrow\phi'_4(Z_2))\rightarrow\chi'(X))$

と等値である。また，

$\forall Z_2((\exists Y_4\phi'_4(Y_4)\rightarrow\phi'_4(Z_2))\rightarrow\chi'(X))$

は補題２の(2)式より

$\exists Z_2(\exists Y_4\phi'_4(Y_4)\rightarrow\phi'_4(Z_2))\rightarrow\chi'(X)$

と等値である。

よって

$\forall Z_2$(〔ハ〕) は

$\phi'_{i1}\wedge\cdots\wedge\phi'_{ir}\wedge(\exists Y_1\phi'_1(Y_1)\rightarrow\phi'_1(Z_5))\wedge\cdots\wedge(\exists Y_3\phi'_3(Y_3)\rightarrow\phi'_3(Z_3))\wedge(\exists Y_5\phi'_5(Y_5)\rightarrow\phi'_5(Z_1))\rightarrow(\exists Z_2(\exists Y_4\phi'_4(Y_4)\rightarrow\phi'_4(Z_2))\rightarrow\chi'(X))$

と等値ということになる。ところが

$\exists Z_2(\exists Y_4\phi'_4(Y_4)\rightarrow\phi'_4(Z_2))$

は補題３より妥当な式だから

$\forall Z_2$(〔ハ〕) は

〔ニ〕 $\phi'_{i1}\wedge\cdots\wedge\phi'_{ir}\wedge(\exists Y_1\phi'_1(Y_1)\rightarrow\phi'_1(Z_5))\cdots\wedge(\exists Y_3\phi'_3(Y_3)\rightarrow\phi'_3(Z_3)\wedge(\exists Y_5\phi'_5(Y_5)\rightarrow\phi'_5(Z_1))\rightarrow\chi'(X)$

と等値となる。

同様の議論を T_2 にも適用する。

まず，T_2 は $\phi_3(T_3)$, $\phi_4(T_5)$ の中では現れていない。なぜなら，もし現れているとすれば X は T_3, T_5 の添字としても現れているはずだから。

次に T_2 は $\phi_1(T_1)$ でも現れていない。なぜなら T_2 は新しい暫定定項だから。

また，T_2 は ϕ_{i1}, …, ϕ_{ir} でも現れていない。なぜなら，UG －条件(ii)より

以上のことにより，T_2 に代わる変項 Z_4 は〔ニ〕の前件では $\exists Y_2\phi'_2(Y_2)\rightarrow\phi'_2(Z_4)$ の中だけに現れており，かつ $\chi(X)$ の中には現れていない。それゆえ〔ニ〕の Z_4 に関する普遍量化

$\forall Z_4$(〔ニ〕)

は前と同じ議論により

〔ホ〕 $\phi'_{i1}\wedge\cdots\wedge\phi'_{ir}\wedge(\exists Y_1\phi'_1(Y_1)\rightarrow\phi'_1(Z_5))\wedge\cdots\wedge(\exists Y_3\phi'_3(Y_3)\rightarrow\phi'_3(Z_3))\wedge(\exists Y_5\phi'_5(Y_5)\rightarrow\phi'_5(Z_1))\rightarrow(\exists Z_4(\exists Y_2\phi'_2(Y_2)\rightarrow\phi'_2(Z_4))\rightarrow\chi'(X))$

となる。そして

$\exists Z_4(\exists Y_2\phi'_2(Y_2)\rightarrow\phi'_2(Z_4))$

は妥当だから〔ホ〕は結局

〔ヘ〕 (〔ホ〕の前件) $\rightarrow\chi'(X)$

と等値となる。このとき，X は ϕ_{i1}, …, ϕ_{ir} の中で自由でなく，T_1, T_3, T_5 の添字としてもマークされていないから，〔ホ〕の前件の中では自由ではない。よって，

〔ト〕 $\forall X$((〔ホ〕の前件) $\rightarrow\chi'(X)$)

は

〔チ〕 (〔ホ〕の前件) $\rightarrow\forall X\chi'(X)$

と等値となる。そこで，ライン j について〔a〕が妥当であるならば〔ヘ〕は妥当，すると〔ト〕が妥当，よって〔チ〕が妥当ということになる。

ところが〔ホ〕の前件は〔イ〕の前件の一部の連言であるから真理関数的に

(〔イ〕の前件) $\rightarrow$ (〔ホ〕の前件)

は妥当。したがってライン j について〔ロ〕が妥当ならば

(〔イ〕の前件) $\rightarrow\forall X\chi'(X)$

は妥当となる。以上の議論により $m=5$ のときとしてではあるが，(v)が証明された。

命題Ｂ

演繹にライン番号 n をもつライン

$(i_1, \cdots, i_r)\quad n\quad \chi$

があり，ライン番号 i_1, …, i_r をもつ前提 ϕ_{i1}, …, ϕ_{ir} と χ の中にはライン n までの演繹の中の EI の使用によって導入される暫定定項がひとつも現れていないとする。このとき，

〔b〕 $\phi_{i1}\wedge\cdots\wedge\phi_{ir}\rightarrow\chi$

は妥当である。

(証明) ライン n を得るまでに EI が m 回用いられ

ているし，その各々を

$$\exists Y_j \phi_j(Y_j) \to \phi_j(T_j) \quad (1 \leqq j \leqq m)$$

とする。これにより

（イ） $\phi_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ir} \wedge (\exists Y_1 \phi_1(Y_1) \to \phi_1(T_1)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_m \phi_m(Y_m) \to \phi_m(T_m)) \to \chi$

という論理式を作る。そして，その中の T_1, …, T_m を与えられた演繹に現れていない互いに異なる変項 Z_m, …, Z_1 で $Z_s = T_j (j = m-s+1,\ 1 \leqq s \leqq m)$ という関係での対応の下に置き換えることにする。この Z_s は新しい変項であるが，命題Bの条件によってどの T_j も ϕ_{i1}, …, ϕ_{ir}, χ に現れていないから Z_s も ϕ_{i1}, …, ϕ_{ir}, χ の中にも現れていない。しかし，$\phi_j(T_j)$ には T_j 以前の $T_i (1 \leqq i \leqq j)$ が現れている可能性がある。その場合も含めてすべての T_j を $s = m-j+1$ の関係で Z_s に置き換えた結果を $\phi'_j(Z_s)$ と表すことにすると〔イ〕は次の〔イ′〕になる。

〔イ′〕 $\phi_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ir} \wedge (\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'(Z_m)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_m \phi'_m(Y_m) \to \phi'_m(Z_1)) \to \chi$

ところで，〔イ′〕は命題Aより妥当であった。ゆえにこの〔イ′〕から

$$\exists Y_j \phi'_j(Y_j) \to \phi'_j(Z_s) \quad (1 \leqq j \leqq m)$$

を消去できれば命題Bが証明できることになる。この技術はすでに命題Aの証明の中でも用いているが，改めて行うことにする。

自由な変項 Z_1, …, Z_n が入っている〔イ′〕が妥当であるということは

$$\forall Z_m \cdots \forall Z_1 \ (〔イ′〕)$$

が妥当ということである。

いま〔イ′〕は真理関数的に

〔イ″〕 $\phi_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ir} \wedge (\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'_1(Z_m)) \wedge \cdots \wedge ((\exists Y_m \phi'_m(Y_m) \to \phi'_m(Z_1)) \to \chi)$

と等値である。そこで $\forall Z_1$（〔イ″〕）を考えると Z_1 は〔イ″〕の前件では現れていないから，これは

〔ロ〕 $\phi_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ir} \wedge (\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'_1(Z_m)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_{m-1} \phi'_{m-1}(Y_{m-1}) \to \phi'_{m-1}(Z_2)) \to \forall Z_1((\exists Y_m \phi'_m(Y_m) \to \phi'_m(Z_1)) \to \chi)$

と等値である。（補題2の(1)より）。ところで，χ の中には Z_2 は現れていないので

$$\forall Z_1((\exists Y_m \phi'_m(Y_m) \to \phi'_m(Z_1)) \to \chi)$$

は

$$\exists Z_1(\exists Y_m \phi'_m(Y_m) \to \phi'_m(Z_1)) \to \chi$$

と等値である。（補題2の(2)より）。ここで，補題3により

$$\exists Z_1(\exists Y_m \phi'_m(Y_m) \to \phi'_m(Z_1))$$

は妥当であるから，〔ロ〕は

〔ハ〕 $\phi_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ir} \wedge (\exists Y_1 \phi'_1(Y_1) \to \phi'_1(Z_m)) \wedge \cdots \wedge (\exists Y_{m-1} \phi'_{m-1}(Y_{m-1}) \to \phi'_{m-1}(Z_2)) \to \chi$

と等値となる。

同様に，Z_2 についても普遍量化を施し，

$$\forall Z_2 (〔ハ〕)$$

を作ると，全く同じ手法で

$$\exists Y_{m-1} \phi'_{m-1}(Y_{m-1}) \to \phi'_{m-1}(Z_2)$$

が消去できる。よって，〔イ′〕が妥当ならば

$$\phi_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ir} \to \chi$$

が妥当であることが証明された。そして，先ほど述べたように，命題Aより〔イ′〕は妥当であった。このことにより

〔b〕 $\phi_{i1} \wedge \cdots \wedge \phi_{ir} \to \chi$

は妥当であることが証明された。

8．結　言

数学は自然科学の言葉であり，論理学は数学の言葉であるといわれる。

日常言語に日本語，英語などがあるように論理学にもいくつかの種類がある。また，あらゆる日常言語が状況の表現を目的としているように，あらゆる論理学は推論の正しさの認識化を目的としている。

ここで，論理学のいくつかの種類の中のひとつである自然演繹法の健全性が示された以上，この言語の上に展開される数学は健全であるということになる。筆者は機会があればこの論理を使い，集合論を展開したいと思っている。

参考文献

(1) W. V. D. クワイン　論理学の方法
(2) ヒルベルト，アッケルマン　論理学の基礎
(3) KLEENE MATHEMATICAL LOGIC
(4) ELIOT. MENDELSON INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC
(5) 近藤洋一，好並英司　論理学概論