最大特異値のピークの一指定法

出川　喬庸

An assignment method of the peak of the largest singular value

Tadayasu DEGAWA

This report considers an assignment method of the peak of the largest singular value and its frequency of linear time invariant multivariable system via state variable feedback. Because the gain of the system lies between the largest and the smallest singular value of frequency transfer function matrix, singular values are used as a measure of the gain of the multivariable systems. Specially, the peak of the largest singular value for stable system is called as H_∞ norm. It plays an important part in H_∞ control which belongs to robust control. For H_∞ control it is important to suppress H_∞ norm below an assigned value. It is known that, if conditions are satisfied, it is possible to suppress H_∞ norm below an assigned value. However, in that case, although it is possible to suppress H_∞ norm of the resultant closed system below an assigned value, the peak of the largest singular value and its frequency are previously unknown.

In proposed method, the peak of the largest singular value and its frequency can be previously assigned and state variable feedback gains can be directly computed based on polynomial matrix which is derived from state matrix, input matrix and output matrix of the system under investigation. This computation is executed based on static and analytic expression formula and it is not necessary to use dynamic or recursive expression.

Finally, state feedback gains are computed by the proposed method for the numerical example of the system. Its computation results are checked by computing the peak of the largest singular value and its frequency of the closed system.

Keywords: linear system, multivariable system, singular value, H_∞ norm

1　まえがき

本報告では，状態フィードバックによる線形固定多変数系の最大特異値のピークとその周波数の一指定法を検討する。伝達関数行列のゲインはその最大特異値と最小特異値の間に存在するので，特異値は多変数系のゲインの尺度として用いられ，特に安定な系の最大特異値のピークは H_∞ ノルムと呼ばれ，ロバスト制御に含まれる H_∞ 制御に重要な役割を担っている。H_∞ 制御ではノルムを指定した値以下に抑えることが重要であり，条件が満たされる場合，そのことは状態フィードバックまたは出力フィードバックによって実行可能であることは知られている。しかしながら，その場合 H_∞ ノルムを指定した値以下にすることはできても，最大特異値のピークとその周波数はどうなるかは不明である。

本報告では，系の外部入力と制御入力の行列が等しい場合に限定されるが，閉ループ系の最大特異値のピークとその周波数を指定する状態フィードバック・ゲインの一計算法を紹介する。状態フィードバック・ゲインは系の状態方程式から得られる多項式行列を用いて表現した静的かつ解析的な計算式から直接求められ，動的な漸化式による繰り返し計算などは必要としない。

最後に，本方法による閉ループ系の最大特異値のピークとその周波数を指定する状態フィードバック・ゲインの数値計算例を示し，その結果も確認している。

2　問題の記述

対象となる系は，つぎの方程式で記述される。

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \qquad z = Cx + Du \tag{1}$$

ここで，$x \in \mathbf{R}^n$ は状態，$w \in \mathbf{R}^m$ は外部入力，$u \in \mathbf{R}^m$ は制御入力，$z \in \mathbf{R}^r$ は評価出力である。A，B_1，B_2，C，D はそれぞれ $n\times n$，$n\times m$，$n\times m$，$r\times n$，$r\times m$ の定数マトリクスである。今回は $B_1 = B_2 = B$ とする。

つぎの状態フィードバック則を考える。

$$u = K_p x \tag{2}$$

閉ループ系はつぎのようになる。

$$\dot{x} = A_c x + Bw \qquad z = C_c x \tag{3}$$

ここで，$A_c = A + BK_p$，$C_c = C + DK$　(4)

系の伝達行列はつぎのようになる。

$$G(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B \tag{5}$$

行列 A の特異値とは A^*A の固有値の平方根として定義されている。ここで，* は共役転置を表す。

したがって，周波数伝達行列 $G(j\omega)$ の特異値 σ_i はつぎのように定義される。

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \tag{6}$$

ここで，$\lambda_i (i = 1,2\cdots,m)$ は行列 $G^*(j\omega)G(j\omega)$ の固有値である。特異値は非負の実数である。

安定な伝達関数マトリクス $G(s)$ に対して H_∞ ノルム $\|G\|_\infty$ はつぎのように定義される。

$$\|G\|_\infty = \max_{\omega\in R} \overline{\sigma}(G(j\omega)) \tag{7}$$

ここで，$\overline{\sigma}(A)$ はマトリクスの A の最大特異値である。すなわち $\overline{\sigma}(A)$ は A^*A の最大固有値の平方根である。

したがって，H_∞ ノルム $\|G\|_\infty$ は $G(j\omega)$ の最大特異値の周波数に関するピークであり，非負の実数値をとる。

問題は状態フィードバックによる w から z までの閉ループ系の最大特異値のピークが予め指定する周波数のとき指定する値で得られるゲインの計算法を導き出すことである。

3　最大特異値のピークの一計算法

H_∞ ノルムについて，つぎの補題がある。

式(3)の系が可制御のとき，正の定数 γ に対して，$\|G\|_\infty \le \gamma$ であるための必要十分条件はリカッチ代数方程式

$$A_c^T P + PA_c + (1/\gamma^2)\,PBB^T P + C_c^T C_c = 0 \tag{8}$$

を満たす実準正定解 P が存在することである。

上の補題を満たす最小の γ が $\|G\|_\infty$ の値を与える。(8)式を基にすると次式が得られる。

$$F^T(-s,L)F(s,L) = \Gamma(s,\mu) \tag{9}$$

ここで，L は μ によって決まる $m\times n$ 定数行列

$$F(s,L) \equiv B_m^{-1}A_c(s) + LS(s) \tag{10}$$

$$\Gamma(s,\mu) \equiv A_c^T(-s)B_m^{-T}B_m^{-1}A_c(s) - \mu S^T(-s)C_{cm}^T C_{cm}S(s) \tag{11}$$

$$S(s) \equiv [S_1^T(s) \quad S_2^T(s)\cdots S_m^T(s)]^T \tag{12}$$

$$S_i(s) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & s & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s^{\rho_i-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$B_m \equiv -\begin{bmatrix} g_1^T A_c^{\rho_1-1}B \\ g_2^T A_c^{\rho_2-1}B \\ \cdots \\ g_m^T A_c^{\rho_m-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m\}$ は可制御性指数

$$A_c(s) \equiv H(s) + A_{cm}S(s) = H(s) + A_m S(s) - B_m KS(s) = A(s) - B_m KS(s) \tag{15}$$

$$A(s) \equiv H(s) + A_m S(s) \tag{16}$$

$$H(s) \equiv \begin{bmatrix} s^{\rho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{\rho_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\rho_m} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$A_{cm} \equiv -[(A_c^T)^{\rho_1}g_1 \quad (A_c^T)^{\rho_2}g_2 \cdots (A_c^T)^{\rho_m}]^T\, T^{-1} \tag{18}$$

$$A_m \equiv -[(A^T)^{\rho_1}g_1 \quad (A^T)^{\rho_2}g_2 \cdots (A^T)^{\rho_m}]^T\, T^{-1} \tag{19}$$

$$K \equiv \mathrm{K}_p T^{-1},\ C_{cm} = C_c T^{-1},\ C_m = CT^{-1} \tag{20}$$

$$h_i \equiv \sum_{k=1}^{i} \rho_k \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{21}$$

$$B \equiv [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m] \tag{22}$$

$$C_0 \equiv [b_1\ Ab_1 \cdots A^{\rho_1-1}b_1\ b_2\ Ab_2 \cdots A^{\rho_2-1}b_2 \cdots b_m\ Ab_m \cdots A^{\rho_m-1}b_m] \tag{23}$$

g_i^T は C_0^{-1} の第 h_i 行ベクトルである。

(9)式での $0\leq\mu<\mu_c$ とき $|F(s,L)|=0$ がすべての根を左半平面内に持ち，$\mu=\mu_c=1/\gamma_c^2$ のとき，$|F(s,L)|=0$ が虚軸上すなわち $s=\pm j\omega_c$ をもち，他の根は左半平面に根を持つならば，γ_c が最大特異値のピーク値（H_∞ ノルム）でその周波数は ω_c である。ただし，ω_c は正の実数とする。

4　最大特異値のピークの一指定法

最大特異値のピーク指定は閉ループ系の最大特異値のピークを予め指定する周波数で指定する値に一致させるゲインの求めることを意味する。(1)式の開ループ系に対して，(2)式の状態フィードバック則が与えられるとき，(9)式を用いて(3)式の閉ループ系の最大特異値のピークの値とその周波数を求めることができる。逆に(1)式の開ループ系に対して，先に閉ループ系の最大特異値のピークとその周波数を指定して，それを与える(2)式の状態フィードバック・ゲインを求めるのが最大特異値のピーク指定の問題である。

(1)式の開ループ系に対して，指定する閉ループ系の最大特異値のピークとその周波数をそれぞれ γ_c と ω_c とするとき，$m\times n$ 定数ゲイン行列 K はつぎの方程式満たさなければならない。

$$A_c^T(-s)B_m^{-T}B_m^{-1}A_c(s)=\Lambda(s) \tag{24}$$

ここで，

$$\Lambda(s)\equiv F^T(-s)F(s)+\mu_cS^T(-s)C^T{}_{cm}C_{cm}S(s) \tag{25}$$

$F(s)$ は $F(s,L)$ で $L=L_c$ と置くことによって得られる多項式行列であり，L_c は方程式 $|F(s)|=0$ が虚軸上の根 $s=\pm j\omega$ をもち，それ以外の根は左半平面内に存在するように指定する。

$$\mu_c=1/\gamma_c^2 \tag{26}$$

このとき，閉ループ系の最大特異値のピークとその周波数がそれぞれ γ_c, ω_c になることはつぎの補題を使って示すことができる。

補題

多項式行列 $F(s)$ と $C_{cm}S(s)$ において，方程式 $|F(s)|=0$ と $|C_{cm}S(s)|=0$ が共通の純虚数根を持たないとすれば，有限な正の定数 μ_c に対し，方程式

$$|F^T(-s)F(s)+\mu_cS^T(-s)C_{cm}^TC_{cm}S(s)|=0 \tag{27}$$

は純虚数根 $j\omega$（ω は実数）を持たない。

証明

純虚数根 $j\omega$ をもつとすると，つぎの式が成り立つ。

$$|F^T(-j\omega)F(j\omega)+\mu_cS^T(-j\omega)C_{cm}^TC_{cm}S(j\omega)|=0 \tag{28}$$

したがって，つぎの式を満たす零でないベクトル v が存在する。

$$\{F^T(-j\omega)F(j\omega)+\mu_cS^T(-j\omega)C_{cm}^TC_{cm}S(j\omega)\}v=0 \tag{29}$$

上式に左から，v^* を掛けるとつぎの式を得る。

$$v^*\{F^T(-j\omega)F(j\omega)+\mu_cS^T(-j\omega)C_{cm}^TC_{cm}S(j\omega)\}v=0 \tag{30}$$

上式を展開して，書きかえると，つぎの式を得る。

$$v^*\{F^T(-j\omega)F(j\omega)v=-\mu_cv^*S^T(-j\omega)C_{cm}^TC_{cm}S(j\omega)\}v \tag{31}$$

$v^*F^T(-j\omega)$ と $F(j\omega)v$，および $v^*S^T(-j\omega)C_{cm}^T$ と $C_{cm}S(j\omega)v$ は互いに零でない共役転置ベクトルであるから，$j\omega$ が方程式 $|F(s)|=0$ の根でも $|C_{cm}(s)|=0$ の根でもないとすると

$$0<v^*F^T(-j\omega)F(j\omega)v \tag{32}$$

$$0<v^*S^T(-j\omega)C_{cm}^TC_{cm}S(j\omega)v \tag{33}$$

したがって，(30)式が成り立つためには，$\mu_c<0$ でなければならない。これは，仮定に反する。

また，$j\omega$ が方程式 $|F(s)|=0$ の根であるが，$|C_{cm}(s)|=0$ の根でないとすると(30)式が成り立つためには，$\mu_c=0$ でなければならない。これも仮定に反する。

さらに，$j\omega$ が方程式 $|C_{cm}(s)|=0$ の根であるが，$|F(s)|=0$ 根でないとすると(30)式が成り立つためには，$\mu_0=\infty$ でなければならない。これも仮定に反する。

したがって，方程式(27)は純虚数根 $j\omega$（ω は実数）を持たない。

証明終り

補題は(27)式の根が虚軸に関して対称であり，半分の n 個の根が左半平面内にあり，もう半分の n 個の根が対称な右半平面内にあることを示している。

したがって，方程式 $|\Lambda(s)|=0$ には実数部が負の根が n 個存在し，A_{cm} はつぎのように得られる。

$$A_{cm}=-\Psi N^{-1} \tag{34}$$

ここで，$N\equiv[v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n]$ (35)

$$\Psi\equiv[\Psi_1\ \ \Psi_2\ \ \cdots\ \ \Psi_n] \tag{36}$$

$\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ を方程式 $|\Lambda(s)|=0$ の実数部が負の n 個の根とすると，s_i が単根の場合 v_i，Ψ_i はつぎのように求められる。

$$v_i=S(s_i)\overline{\omega}_i \tag{37}$$

$$\Psi_i=H(s_i)\overline{\omega}_i \tag{38}$$

$\overline{\omega}_i$ はつぎの式を満たすベクトルである。

$$\Lambda(s_i)\overline{\omega}_i=0\ \wedge\ \overline{\omega}_i\neq0 \tag{39}$$

したがって，(A,C^T) が可制御ならば，$\mu_c>0$ である限り(34)式と(15)式から求められる $A_c(s)$ が方程式 $|A_c(s)|=0$ のすべての根を左半平面内におくので，(9)式から求められる $F(s,L)$ は方程式 $|F(s,L)|=0$ の根を $\mu_c>\mu>0$ である限りすべて左半平面内にもち，$\mu=\mu_c$ のとき，初めて虚軸上の根 $s=\pm j\omega_c$ をもち，他の根は左半平面内にもつ。

しかしながら，実際には，(24)式の右辺の C_{cm} にもゲイン K が含まれるので，(34)式からではゲイン K を求めることができない。それで，(24)式に $C_{cm}=C_m+DK$ と $A_c(s)=A(s)-B_mKS(s)$ を代入して整理すると，$I-\mu_cD^TD$ の逆行列が存在する場合，つぎの式が得られる。

$$\{S^T(-s)K^T-J^T(-s)(I-\mu_cD^TD)^{-1}\}(I-\mu_cD^TD)\cdot\{KS(s)-(I-\mu_cD^TD)^{-1}J(s)\}=R(s) \tag{40}$$

ここで，

$$J(s)\equiv B_m^{-1}A(s)+\mu_cD^TCS(s) \tag{41}$$

$$R(s)\equiv F_c^T(-s)F_c(s)+\mu_cS^T(-s)C^TCS(s)-A^T(-s)B_m^{-T}B_m^{-1}A(s)+J^T(-s)(I-\mu_cD^TD)^{-1}J(s) \tag{42}$$

ゲイン行列 K はつぎの式を使って求められる。

$$K=-PQ^{-1} \tag{43}$$

ここで，$P\equiv[p_1\ \ p_2\ \ \cdots\ \ p_n]$ (44)

$$Q\equiv[q_1\ \ q_2\ \ \cdots\ \ q_n] \tag{45}$$

$(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ を方程式 $|R(s)|=0$ の実数部が負の n 個の根とすると，s_i が単根の場合 p_i，q_i はつぎのように求められる。

$$p_i=(I-\mu_cD^TD)^{-1}J(s_i)t_i \tag{46}$$

$$q_i=S(s_i)t_i \tag{47}$$

t_i はつぎの式を満たすベクトルである。

$$R(s_i)t_i=0\ \ \wedge\ \ t_i\neq 0 \tag{48}$$

なお，$I-\mu_cD^TD$ の逆行列が存在しない場合のゲイン行列 K の求め方は現在不明である。

また，方程式 $|R(s)|=0$ の実数部が負の n 個の根に対応して，ゲイン行列 K の求めているが，そのゲイン行列が必ずしも，方程式 $|A_c(s)|=0$ のすべての根を左半平面内におくとは限らない。そこで，(43)式で求められたゲイン行列 K が方程式 $|A_c(s)|=0$ のすべての根を左半平面内におくことを確かめることが必要である。この点はさらに改善を検討しなければならない。

5　数値計算例

最大特異値のピーク指定の数値計算例を示す。

［例1］対象となる系は2入力2出力の4次系とする。

$$A=\begin{bmatrix}5&-4&0&0\\0&0&-3&0\\1&2&-4&0\\6&-4&5&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\4&2\\6&-3\\8&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&0&1&3\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

固有値は3，$-2.11\pm j1.89$，5.22であり，系は不安定である。$D=0$ であるから，$I-\mu_cD^TD=I$ は常に正則行列になり，また $J(s)=B_m^{-1}A(s)$ となるから，$R(s)=\Gamma(s)$ であり，本方法で求めたゲイン行列 K は閉ループ系を常に安定にする。したがって，任意の最大特異値のピーク値とその周波数を指定することができる。ただし，指定する最大特異値のピーク値が小さければ小さいほど，ゲイン行列は大きくなる。

(1)　比較のため，周波数 ω が2のとき最大特異値のピーク値を γ_c を1.0，0.5と0.1の3通りの最大特異値のピーク値を指定してゲイン行列 K_p を計算する。

(2)　$F(s)$ の固有値は周波数に対応する $\pm j2$ と他の左半平面内で任意に指定する2つの根 -2，-2.83 とする。各固有値に対する固有ベクトルを $\pm j2$ に対して $[1\ \ 2\pm j2.24]^T$，-2 に対して $[1\ \ -2.24]^T$，-2.83 に対して $[1\ \ 2.83]^T$ とする。

$$F(s)=\begin{bmatrix}s^2+4.76s+4.47&-1.00s-2.47\\9.42s+17.4&s^2+0.0627s-4.54\end{bmatrix}$$

(3)　$A(s)$，B_m と $CS(s)$ はそれぞれつぎのようになる。

$$A(s)=\begin{bmatrix}s^2-.813s-3.09&-2.78s+8.93\\-2.68s-13.1&s^2-3.19s-3.04\end{bmatrix},$$

$$B_m=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad CS(s)=\begin{bmatrix}4.00s+64.0&4.00+20.9\\30.0s+81.7&3.00s-108.\end{bmatrix}$$

(4)　各場合のゲイン行列 K_p と閉ループ系の固有値はつぎのようになった。

$\gamma_c=1.0$ のとき，

$$K_p=\begin{bmatrix}2.77&1.29&-0.946&3.07\\18.3&10.7&3.54&1.76\end{bmatrix}$$

閉ループ系の固有値

$-7.73 \pm j6.28,\ -31.0,\ -4.58$

$\gamma_c = 0.5$ のとき，

$$K_p = \begin{bmatrix} 6.04 & 2.75 & -1.42 & 5.72 \\ 29.1 & 16.3 & 5.50 & 3.31 \end{bmatrix}$$

閉ループ系の固有値

$-61.0,\ -7.30 \pm j6.90,\ -5.61$

$\gamma_c = 0.1$ のとき，

$$K_p = \begin{bmatrix} 31.5 & 13.8 & -5.75 & 27.1 \\ 108. & 55.4 & 18.6 & 15.1 \end{bmatrix}$$

閉ループ系の固有値

$-41.4,\ -304.,\ -7.26,\ -9.42$

特に，$\gamma_c = 0.1$ のとき，ゲイン行列 K_p が大きくなり過ぎている。固有値にも左半平面内ではあるが絶対値の大き過ぎるものがある。したがって，任意の最大特異値のピーク値を指定することはできるが，無制限に小さな値を指定することはゲイン行列の大きさの制約などから得策ではない。

［例2］ A，B は例1と同じで，

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{の系，}$$

$C = 0$，$D \neq 0$ の場合である。

$I - \mu_c D^T D$ は $\mu_c = 1.0$ $(\gamma_c = 1.0)$ および $\mu_c = 0.25$ $(\gamma_c = 2.0)$ で特異行列になるから，本方法ではこれらの最大特異値のピーク値を指定することはできない。

(1) 周波数 ω が2のとき最大特異値のピーク値 γ_c を 2.05，1.95 および 1.85 の3通りに指定するフィードバック・ゲインを計算する。

(2) $F(s)$，$A(s)$ と B_m は例1と同じであり，$CS(s) = 0$，$J(s) = A(s)$ である。

(3) 各場合のゲイン K_p と閉ループ系の固有値はつぎのようになった。

$\gamma_c = 2.05$ のとき，

$$K_p = \begin{bmatrix} 25.4 & -16.7 & 5.77 & 1.16 \\ 84.3 & 55.3 & 22.2 & 6.58 \end{bmatrix}$$

閉ループ系の固有値

$-98.0,\ -1.63 \pm 0.909,\ -10.5$

$\gamma_c = 1.95$ のとき

$$K_p = \begin{bmatrix} 327. & -215. & 87.3 & 25.9 \\ 1040. & -685. & 281. & 85.0 \end{bmatrix} \text{のとき}$$

閉ループ系の固有値

$-1290.,\ -1.62 \pm j0.936,\ -11.0$

$\gamma_c = 1.85$ のとき

$$K_p = \begin{bmatrix} -36.4. & 24.2 & -11.1 & -3.99 \\ -111. & 73.8 & -30.8 & -9.46 \end{bmatrix} \text{のとき}$$

閉ループ系の固有値

$145.,\ -1.61 \pm j0.961,\ -11.4$

指定できる限界付近の最大特異値のピーク値を指定しているので，ゲインは大きくなっている。$\gamma_c = 2.05$ と $\gamma_c = 1.95$ のとき，閉ループ系が安定で，その周波数と最大特異値のピーク値とその周波数は指定どおりの値が得られた。$\gamma_c = 1.85$ のときは閉ループ系が不安定になり，指定できていない。この場合，指定できる最大特異値のピーク値の下界は $\gamma_c = 1.95$ 付近である。

［例3］ A，B，C は例1と同じで $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の系であり，

(1) 周波数 ω が2のとき最大特異値のピーク値 γ_c を 1.1，および 0.9 の2通りに指定するフィードバック・ゲインを計算する。

(2) $F_c(s,L)$，$A(s)$，B_m と $CS(s)$ は例1と同じであり，

$$J(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2.49s - 56.0 & 0.526s + 8.31 \\ -2.68s - 13.1 & s^2 - 3.19s - 3.04 \end{bmatrix} \text{である。}$$

(3) 各場合のゲイン K_p と閉ループ系の固有値はつぎのようになった。

$\gamma_c = 1.1$ のとき

$$K_p = \begin{bmatrix} 54.7 & -19.3 & -2.90 & -5.16 \\ 23.3 & -13.4 & 4.68 & 2.82 \end{bmatrix}$$

閉ループ系の固有値

$-92.5,\ -7.28 \mp j6.70,\ -7.34$

$\gamma_c = 0.9$ のとき

$$K_p = \begin{bmatrix} -89.0 & 36.5 & -12.1 & -7.49 \\ 36.7 & -20.9 & 7.69 & 5.93 \end{bmatrix}$$

閉ループ系の固有値

−36.9，−23.1，−16.3，−8.12

$\gamma_c = 1.1$ のとき，閉ループ系が安定で指定どおりの値が得られた。$\gamma_c = 0.9$ のときは閉ループ系が不安定になり，指定できていない。この場合，指定できる最大特異値のピーク値の下界は $\gamma_c = 1.0$ 付近である。

6 あとがき

本研究では，外部入力と制御入力の行列が等しい場合に限定して，状態フィードバックによる閉ループ系のための最大特異値のピークとその周波数を指定するゲインの計算法を考えた。

$D = 0$ の場合，指定できる最大特異値のピーク値に下限は無いが，$D \neq 0$の場合の指定できる最大特異値のピーク値に下限が存在する。指定できる最大特異値のピーク値の下限は $D^T D$ の最大の固有値付近にあることは分かっているが，正確な下限を計算する方法はまだ不明であり，今のところ閉ループ系の固有値を計算した結果で得られるだけである。下限より大きい最大特異値のピーク値の指定については，数値計算により，意図した結果が得られることを確認した。

今後は未解決の $I - \mu_c D^T D$ の逆行列が存在しない場合のゲイン行列 K の求め方，指定できる最大特異値のピーク値の下限の計算方法および評価入力と制御入力の行列が異なる場合の状態フィードバックによる最大特異値のピーク値とその周波数の指定についても検討していくつもりである。

参考文献

1）出川：最適レギュレータの一計算法，第28回制御理論シンポジウム資料，pp219～222，1999

2）出川：線形最適レギュレータの一計算法，第22回 Dynamical System Theory シンポジウム，pp187～190，1999

3）出川：H_∞ ノルムの一計算法，第29回制御理論シンポジウム資料，pp223～226，2000

4）出川：H_∞ ノルム計算と指定，第23回 Dynamical System Theory シンポジウム，pp275～278，2000

5）出川：H_∞ ノルム指定の一計算法，第1回制御部門大会資料，pp455～458，2001

6）出川：H_∞ ノルムの一指定法，第44回自動制御連合講演会前刷，pp510～513，2001

7）W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems. New York: Spring Verlag, 1974

8）Kemin Zhou: Essentials of Robust Control, Prentice Hall, 1998

9）吉川，井村：現代制御論，昭晃堂，1996

10）木村，藤井，森：ロバスト制御，コロナ社，1994