ラグランジュ・シャルピ法によるリエナール形非線形システムのリアプノフ関数構成

宮 城 雅 夫*, 宮 城 隼 夫**

Construction of Lyapunov Function for Liénard-Type Nonlinear Systems Using the Lagrange-Charpit Method

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

Abstract

The direct method of Lyapunov is uset to study the stability of a system with liénard-type nonlinearities. The Lyapunov function, which is based on a solution obtained from a linear partial dif-ferential equation, is given by using the Lagrange-Charpit method. The liénard-type nonlinear system is originated from a generator system, taking into account the effects of variable damping and field flux decay. The Lyapunov function obtained in this paper is employed in estimating the stability boundary of the system, showing the superiority of the proposed function.

Keywords : *Lyapunov function, Lagrange-Charpit method, Lienard-type nonlinear system*

1. 緒 言

非線形システムのリアプノフ関数構成法にはポポフの条件から導かれる安定条件と等価な結果を与えるルーリエ形リアプノフ関数を得るポポフの方法[1]や級数近似によらない一般化されたZubov法[2]などがある。しかしながら，ポポフの方法は適用システムがいわゆる非線形フィードバック制御システムに限られ，独特な非線形項を有するリエナール形システムにただちに応用することはできない。また，一般化されたZubov法ではZubovの偏微分方程式に現われるスカラー関数を求めるための変換式を見いだすのは容易ではない。一方，文献5の可変勾配法は，上述の方法がリアプノフ関数の形やその時間導関数を選定するのに対し，リアプノフ関数の勾配$\partial V/\partial x$を最初に選定し，リアプノフ関数を構成する方法であるが，選定された勾配の各成分の係数を決めた後，リアプノフ関数の時間導関数や得られたリアプノフ関数の安定条件を繰り返し調べる必要がある。

1個の簡単なリエナール形非線形システムいわゆるリエナールの方程式[3]に対しては，これまでいくつかのリアプノフ関数が報告されているが本論文では，それらのリアプノフ関数をすべて包含する任意関数を含む一般化リアプノフ関数[4]を文献6で提案されたラグランジュ・シャルピー法を用いて構成する。この手法によれば，リアプノフ関数の時間導関数を任意に選べる利点がある。その任意関数の傾きがある値より小さくなるように選ぶことによって，これまで報告されているリアプノフ関数をすべて得ることができる。また，選ばれたそれぞれの任意関数に対するリアプノフ関数が保証する漸近安定領域は異なるので，その任意関数とリアプノフ関数が保証する漸近安定領域の関係を考察する。さらに，得られた漸近安定領域とその境界上におけるリアプノフ関数の時間微分値の関係，またおのおののリアプノフが与える漸近安定領域とリアプノフ関数のしきい値との

*機械システム工学科
College of Technology, Dai-Ichi University
**琉球大学工学部（〒903-0129 沖縄県西原町字千原1）
Faculty of Engineering, Ryukyu University

関係も考察する。

2. リエナールの方程式[3)]

リエナールの方程式は，次式で与えられる。

$$\ddot{y} = g(y)\dot{y} + f(y) = 0 \qquad (1)$$

ここで，g(y), f(y) は連続で微分可能な関数であり，次の性質を満足するものとする。

Ⅰ. g(y) > 0，かつ g(y) は原点近傍で偶関数数の性質を有する。

Ⅱ. y f(y) > 0, y ≠ 0

Ⅲ. | y | →∞ のとき | ϕ(y) | →∞

ただし，

$$\phi(y) = \int_0^y g(y)dy$$

次に，$y = x_1$, $\dot{y} = x_2$ と置き換えて，式(1)を次式の連立方程式に変形する。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}) \qquad (2)$$

3. ラグランジュ・シャルピ法[6)]

リアプノフ関数構成法はいくつか提案されているが，ここでは，リアプノフ関数の時間導関数を任意に選べるラグランジュ・シャルピ法を用いる。

ラグランジュ・シャルピ法によれば，リアプノフ関数 V は偏微分方程式

$$F(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}) = \mathbf{P}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x}) = 0 \qquad (3)$$

を解くことによって求められる。ここで，

$$\mathbf{P} = \partial V/\partial\mathbf{x} = \left[\mathbf{P}_1^T, \mathbf{P}_2^T\right]^T, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T\right]^T$$

$$\mathbf{x} = \left[\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T\right]^T$$

であり，ϕ (=—V) は任意の非負値関数である。

ただし，

$\mathbf{x_i}$ = [x_{i1}, x_{i2}, …, x_{in}]^T

$\mathbf{Pi}$ = [P_{i1}, P_{i2}, …, P_{in}]^T

$\mathbf{h_i}$ = [h_{i1}, h_{i2}, …, h_{in}]^T

とする。

式 (3) を解くことは困難なので，解きやすくするため，次の特性微分方程式を考える。

$$\frac{dx_{11}}{\frac{\partial F}{\partial P_{11}}} = \cdots \frac{dx_{1n}}{\frac{\partial F}{\partial P_{1n}}} = \frac{dx_{21}}{\frac{\partial F}{\partial P_{21}}} = \cdots = \frac{dx_{2n}}{\frac{\partial F}{\partial P_{2n}}}$$

$$= \frac{-dP_{11}}{\frac{\partial F}{\partial x_{11}} + P_{11}\frac{\partial F}{\partial V}} = \cdots = \frac{-dP_{1n}}{\frac{\partial F}{\partial x_{1n}} + P_{1n}\frac{\partial F}{\partial V}}$$

$$= \frac{-dP_{21}}{\frac{\partial F}{\partial x_{21}} + P_{21}\frac{\partial F}{\partial V}} = \cdots = \frac{-dP_{2n}}{\frac{\partial F}{\partial x_{2n}} + P_{2n}\frac{\partial F}{\partial V}} \qquad (4)$$

このとき $\partial F/\partial x_{11}, \partial F/\partial x_{12}, \cdots, \partial F/\partial x_{2n}$ はそれぞれ $\partial\phi/\partial x_{11}, \partial\phi/\partial x_{12}, \cdots, \partial\phi/\partial x_{2n}$ を含む。

式 (4) より少なくとも P の一つの成分を含む 2 n — 1 個の式

$$Z_1(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}, \partial\phi/\partial\mathbf{x}) = 0$$
$$Z_2(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}, \partial\phi/\partial\mathbf{x}) = 0$$
$$\vdots$$
$$Z_{2n-1}(\mathbf{x}, V, \mathbf{P}, \partial\phi/\partial\mathbf{x}) = 0 \qquad (5)$$

が導出されるならば，この Z と式(3)の F が共通解を有するために

$$[Z_i, F] = \sum_{k=1}^{2}\left(\left[\frac{dZ_i}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial F}{\partial\mathbf{P}_k} - \left[\frac{dF}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial Z_i}{\partial\mathbf{P}_k}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dZ_i}{d\mathbf{x}_k} = \frac{\partial Z_i}{\partial\mathbf{x}_k} + \mathbf{P}_k\frac{\partial Z_i}{\partial V}\right) \qquad (6)$$

が成立しなければならない。ここで $[Z_i, F]$ が P の関数ならば，さらに $[Z_i, F]$= Z と置き，このすべての Z が F と共通解をもつようにする。したがって未知関数 $\partial\phi/\partial\mathbf{x}, \phi$ は次のヤコビの括弧式が零になる条件

$$[Z_l, Z_m] = \sum_{k=1}^{2}\left(\left[\frac{dZ_l}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial Z_m}{\partial\mathbf{P}_k} - \left[\frac{dZ_m}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial Z_l}{\partial\mathbf{P}_k}\right) = 0$$

$$[Z_s, F] = \sum_{k=1}^{2}\left(\left[\frac{dZ_s}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial F}{\partial\mathbf{P}_k} - \left[\frac{dF}{d\mathbf{x}_k}\right]^T\frac{\partial Z_s}{\partial\mathbf{P}_k}\right) = 0$$

$$l, m = 1, 2, \cdots, \max[s], s > n-1, l \neq m \qquad (7)$$

を満足し，かつ ϕ が非負値関数となるように決定される。ϕ はその非負値性の証明の容易さから x に関する 2 次形式の項を含むことが望ましいので，[Z_l, F] = Z の置き換えは式(7)の偏微分方程式が

ϕについての2階偏微分形を含むまで続けられる。

ϕが決定されたあと，もし式(3)，(5)から

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathrm{V}) \tag{8}$$

として求められるならば

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{dx}=(\nabla \mathrm{V})^{\mathrm{T}}\mathbf{dx} \tag{9}$$

は積分可能であり，所望のリアプノフ関数Vとその時間微分 dV/dt は

$$\mathrm{V}(\mathbf{x})=\int_0^{\mathbf{x}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{dx} \qquad \frac{d\mathrm{V}(\mathbf{x})}{dt}=-\phi(\mathbf{x}) \tag{10}$$

として与えられる。ただし，この時点でVはリアプノフの条件を満たしているものとする。

4．リエナールの方程式のリアプノフ関数[4)]

式(1)のシステムの簡単な例として，1節の条件Ｉの性質を満足する g (y) として正の関数Dを用いた次のシステムを考える。

$$\ddot{y}+D\dot{y}+f(y)=0 \tag{11}$$

上式を $y=x_1$，$\dot{y}=x_2$ と置き換えて式(2)の形に書き直せば

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -Dx_2-f(x_1)\end{bmatrix} \tag{12}$$

となる。

上式のシステムに対しいくつかのリアプノフ関数が報告されているが，それらを包含するような一般化されたリアプノフ関数はまだ報告されていない。

そこで，上述のリアプノフ関数の構成法の一つであるラグランジュ・シャルピ法を用い，それらを包含する一般化リアプノフ関数Vを式(3)を解いて求める。

このとき式(4)の特性微分方程式は$\partial F/\partial V=0$となるので

$$\frac{dx_1}{h_1(\mathbf{x})}=\frac{dx_2}{h_2(\mathbf{x})}$$
$$=\frac{dP_1}{f'(x_1)P_2-\partial\phi/\partial x_1}=\frac{dP_2}{DP_2-P_1-\partial\phi/\partial x_2} \tag{13}$$

となり，これより2個の偏微分方程式

$$\begin{aligned}Z_1&=\alpha\varphi(x_1)+\beta x_2-P_2=0\\ Z_2&=\alpha\varphi'(x_1)x_2-\beta\{Dx_2+f(x_1)\}\\ &\quad -DP_2+P_1+\partial\phi/\partial x_2=0\end{aligned} \tag{14}$$

を得る。ここでα，βは任意定数，$\varphi(x_1)$は任意関数，$\varphi'(x_1)=d\varphi(x_1)/dx_1$である。これまで$\varphi(x_1)$は$x_1$の一次関数で表されていたが，ここでは，$\varphi(x_1)$を任意関数と置くことにより，$x_1$の一次関数以外の形もとることができる。

次に，FとZ_1，Z_2に対して式(7)を適用すれば

$$[Z_1,Z_2]=2\{\beta D-\alpha\varphi'(x_1)\}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=0$$

$$\begin{aligned}[Z_2,F]&=\alpha\varphi''(x_1)x_2^2+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}x_2-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\\ &\quad+\alpha\{\varphi(x_1)f'(x_1)+\varphi'(x_1)f(x_1)\}=0\end{aligned} \tag{15}$$

ただし，

$$f'(x_1)=df(x_1)/dx_1,\ \varphi''(x_1)=d\varphi'(x_1)/dx_1$$

が導かれる。上式よりϕを決定すれば

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2}=2\{\beta D-\alpha\varphi'(x_1)\}x_2+\Phi(x_1)$$

$$\phi=\{\beta D-\alpha\varphi'(x_1)\}x_2^2+\Phi(x_1)x_2+\alpha\varphi(x_1)f(x_1) \tag{16}$$

となる。ここで，$\Phi(x_1)$は任意関数であり

$$\beta D-\alpha\varphi'(x_1)>0 \quad x_1\alpha\varphi(x_1)>0 \tag{17}$$

を満足するものとする。

そこで，ϕを平方形にするように$\Phi(x_1)$を

$$\Phi(x_1)=-2\sqrt{K(x_1)\alpha\varphi(x_1)f(x_1)}$$

$$\text{ただし，}\ K(x_1)=\beta D-\alpha\varphi'(x_1) \tag{18}$$

に選定すれば，ϕは次式のようになる。

$$\phi=\left[\sqrt{K(x_1)}x_2-\sqrt{\alpha\varphi(x_1)f(x_1)}\right]^2 \tag{19}$$

また，式(14)，(16)の関係を用いて

$$\begin{aligned}P_1&=\alpha D\varphi(x_1)+\alpha\varphi'(x_1)x_2+\beta f(x_1)\\ &\quad+2\sqrt{K(x_1)\alpha\varphi(x_1)f(x_1)}\\ P_2&=\alpha\varphi(x_1)+\beta x_2\end{aligned} \tag{20}$$

を得る。ここで，得られるリアプノフ関数の形を整えるため$\alpha=1$，$\beta=1$と置き換え，上式に式(10)の第1式を適用して次式の一般化リアプノフ関数Vを得る。

$$V=\frac{1}{2}\{x_2+\varphi(x_1)\}^2+\int_0^{x_1}f(x_1)dx_1$$
$$+\int_0^{x_1}\varphi(x_1)L(x_1)dx_1$$
$$+2\int_0^{x_1}\sqrt{\varphi(x_1)L(x_1)f(x_1)}dx_1 \quad (21)$$

ただし，$L(x_1)=D-d\varphi(x_1)/dx_1$

ここで，$\varphi(x_1)$は任意関数，式(17)より$\varphi(x_1)$と$L(x_1)$は条件

$$x_1\varphi(x_1)>0 \qquad (x_1\neq 0)$$
$$L(x_1)=D-d\varphi(x_1)/dx_1\geq 0 \quad (22)$$

を満足するものとする。また，式(21)のVの時間導関数は式(19)より

$$\dot{V}=-\left[\sqrt{Lx_1)}x_2-\sqrt{\varphi(x_1)f(x_1)}\right]^2\leq 0 \quad (23)$$

となる。

次に，Vの正定値性について証明する。式(21)のVにおける右辺第2項以下の項の和を V_0と置けば

$$V_0=\int_0^{x}H(x_1)dx_1 \quad (24)$$

ただし，$H(x_1)=\varphi(x_1)L(x_1)+f(x_1)$
$$+2\sqrt{\varphi(x_1)L(x_1)f(x_1)}$$

と書くことができ，さらに$H(x_1)$は

$$H(x_1)=\begin{cases}\left[\sqrt{\varphi(x_1)L(x_1)}+\sqrt{f(x_1)}\right]^2 & (x_1\geq 0)\\ -\left[\sqrt{-\varphi(x_1)L(x_1)}-\sqrt{-f(x_1)}\right]^2 & (x_1\leq 0)\end{cases} \quad (25)$$

の形に変形できるので，$x_1H(x_1)\geq 0$ が成り立つ領域内においてV0は正の値をとる。従ってVは正定値となる。

また，得られた式(21)のリアプノフ関数Vがこれまで報告されているリアプノフ関数の一般形となっていることを示すため，任意関数$\varphi(x_1)$を次のように選ぶ。すなわち，

$\varphi_1=0$と置けばよく知られた次式のエネルギー関数となる。

$$V_1=\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}f(x_1)dx_1 \quad (26)$$

次に，$\varphi_2=Dx_1$と置けば

$$V_2=\frac{1}{2}(x_2+Dx_1)^2+\int_0^{x_1}f(x_1)dx_1 \quad (27)$$

となり，Zubovの方法によって得られる結果[3]と一致する。また，$\varphi_3=\eta Dx_1$（η 定数，$0\leq\eta\leq 1$）と置けば

$$V_3=\frac{1}{2}(x_2+\eta Dx_1)^2+\int_0^{x_1}f(x_1)dx_1$$
$$+\frac{1}{2}\eta D^2(1-\eta)x_1^2$$
$$+2D\sqrt{\eta(1-\eta)}\int_0^{x_1}\sqrt{x_1f(x_1)}dx_1 \quad (28)$$

となり，宮城・谷口[6]氏らの結果と一致する。

さらに，$\varphi_4=\lambda(x_1)Dx_1$〔$\lambda(x_1)$：$\varphi_4$が条件(22)式を満足するような関数〕と置けば

$$V_4=\frac{1}{2}\{x_2+\lambda(x_1)Dx_1\}^2+\int_0^{x_1}f(x_1)dx_1$$
$$+\int_0^{x_1}\lambda(x_1)Dx_1L(x_1)dx_1$$
$$+2\int_0^{x_1}\sqrt{\lambda(x_1)Dx_1L(x_1)f(x_1)}dx_1 \quad (29)$$

となり，川本氏らの結果[7]と一致する。

そして，上述の式(26)～(29)における$\varphi_i(x_1)$はx_1と任意のx_1の関数との積の形が，式(22)の条件を満足するように選んだものであり，その形以外の例として任意関数$\varphi_i(x_1)$を次のように選ぶ。すなわち，$\varphi_5=D\tanh(x_1)$と置けば文献8で求めた結果（$=V_5$）と一致する。

これより，式(21)のVがこれまで報告されているリアプノフ関数の一般形となっていることが分かる。

5．任意関数と漸近安定領域

前節において，式(22)の条件を満足するように選ばれた任意関数φ_iに対するリアプノフ関数V_iが与える漸近安定領域との関係を考察するために，任意関数φ_i（$i=1,2,\cdots,5$）をFig.1に，そのφ_iに対するV_iが与える漸近安定領域をFig.2に示す。

このとき，式(11)のシステムにおいて，D＝0.3，$f(x_1)=\sin(x_1+\delta)\sin\delta$　（$\delta=0.412$）とした。さらに，おのおののV_iが保証する漸近安定領域の境界上における時間導関数$\dot{V}_i$の値を求めた。結果をFig.3に示した。

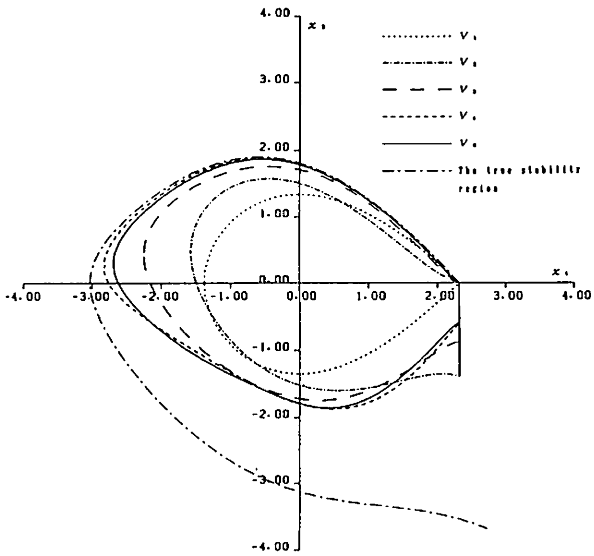

Fig. 1 Asymptotic stability regions

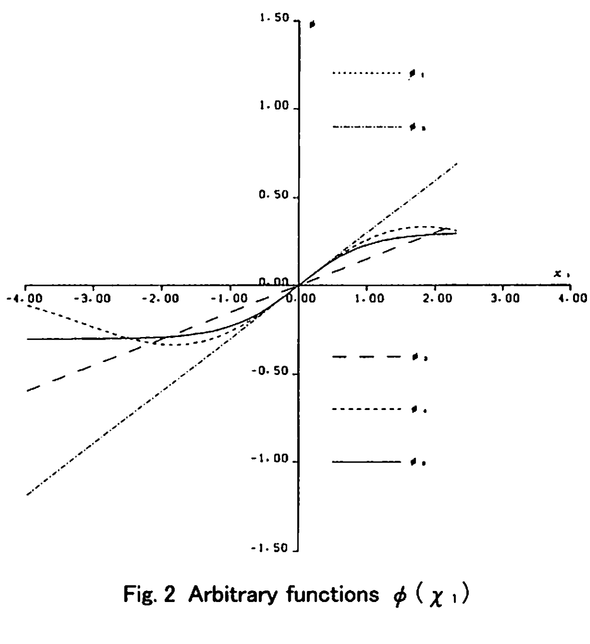

Fig. 2 Arbitrary functions $\phi(\chi_1)$

Fig.1とFig.2からわかるように，第一，第三象限に存在する任意関数φの選び方によって漸近安定領域は変化し，直線であるφ_1,φ_2,φ_3が与えられるリアプノフ関数よりも，むしろひずんだφ_4,φ_5が与えられるそれぞれのリアプノフ関数の保証する漸近安定領域が広いことがわかる。また，Fig.3から，漸近安定領域の境界が真の安定領域の境界

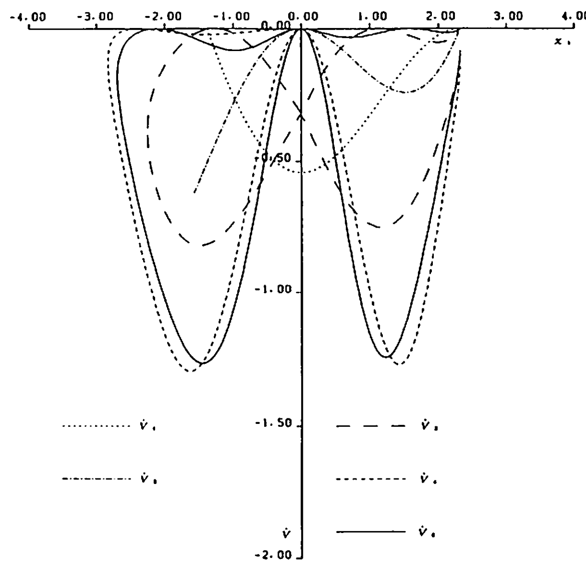

Fig. 3 Values of $\dot{V}$ on the asymptotic stability regions

に近接するほど，リアプノフ関数の時間微分値が0に近いことがわかる。これは，真の安定境界がシステムの解曲線の一つであり，$\dot{V}(x)=0$となるリアプノフ関数Vがシステムの解と密接な関係にあると思われるからである。したがって，広い漸近安定領域を得るためには，リアプノフ関数の時間微分値が0に近くなるように任意関数φを選ぶようにするとよい。

また，ラグランジュの乗数法[9]を用いて，$\dot{V}(x)=0$の点で$\dot{V}(x)$を最小化することにより，それぞれのφ_i($i=1,2,\cdots,5$)に対して，$V_i(x)$のしきい値$V_{ic}(x)$を求めた。結果をTable.1に示した。このとき，しきい値$V_c(x)$を与えるxは$x_c=[x_c, 0]^T$となるので，しきい値$V_c(x)$は$\varphi(x_c)$に依存する。

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
V_{ic}	0.90	1.15	1.47	1.62	1.60

Tablie.1 Values of V_c

Fig.1とTable.1からわかるように，しきい値V_{ic}の値が大きいリアプノフ関数V_iほど，そのV_iが与える漸近安定領域が広くなっていることがわかる。したがって，しきい値$V_c(x)$は$\varphi(x_c)$に依存するので，しきい値$V_c(x)$が大きくなるように任意関数φを選ぶことも広い漸近安定領域を得る

一つの目安となる。

しかしながら，Fig.1からもわかるように式(21)の一般化リアプノフ関数Vから得られる漸近安定領域は第三，四象限において控えめであり，上述のように，$\dot{V}$を小さくするφを選んでもまた，しきい値V_cを大きくするφを選んでもこれを改善することはできない。これは式(21)のVから，漸近安定領域とx_2軸（$x_1=0$）が交わるx_2軸上の値を求めると

$$V(x_1=0, x_2)-V_c=0$$

$$\frac{1}{2}x_2^2-V_c=0$$

$$x_2=\pm\sqrt{2V_c}$$

となり，漸近安定領域とx_2軸の二つの交点はつねに原点から等しい距離にあるためである。したがって，式(21)のVが与えられる漸近安定領域には限度があり，漸近安定領域とx_2軸の二つの交点が原点から等しい距離にならないリアプノフ関数を見つけることが今後の課題である。

参考文献

1）M.A.Pai, M.Ananda Mohan and J.Gopala Rao : IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, PAS-89-5, 788/794 (1970)

2）F.S.Prabhakara, A.H.El-Abiad, and A.J.Koivo: INT.J. CONTROL, Vol.20, NO, 2, 203/212 (1974)

3）J・ラ サール，S・レフシェッツ；山本 稔訳：リアプノフの方法による安定性理論, 産業図書, 17/65 (1975)

4）宮城・山城・宮城：計測自動制御学会学術講演会予稿集, 487/488 (1991)

5）D.G.Schultz, J.E.Gibson :Trans.AIEE,Vol.81 II, pp.203/210 (1962)

6）H.Miyagi and T.Taniguchi: INT.J. CONTROL, Vol.32, NO.2, 371/379 (1980)

7）S.Kawamoto, A.Ishigame, T.Taniguchi: Trans.IEE of Japan, Vol. 109, NO.3/4, 38/39 (1989)

8）宮城・山城・山下：Dynamical System Theory シンポジウム予稿集, 227/230 (1991)

9）J.L.Willems: INT.J.CONTROL, Vol.10, NO.5, 537/544 (1969)