Fourier 積分公式の直観的理解の方法について

山元　完二　　航空工学科

On methoh of intuitive understanding of Fourier's integral formula

Kanji Yamamoto

It is difficult for students to understand Fourier's integral formula.
This report would help students to understand that formula.
It is based on quadrature by partion, infinite integral and Fourier series.

1．はじめに

Fourier 積分を始めて学ぶ者にとって，Fourier 積分の定義式の理解は難しいように思われる。

というのは，Fourier 積分の定義式とはいってもそれが定理としての色あいを帯びているからである。

すなわち，

「関数$f(x)$に対して，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right)e^{i\omega x}\,d\omega$$

を定める。この式を$f(x)$の Fourier 積分という」

………①

「関数$f(x)$がある条件を満足していれば

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right)e^{i\omega x}\,d\omega$$

が成立する」………②

①は確かに定義であるが，②は定理である。

しかし，②の証明は初等的なテキストではあまり目にしない。

初等的なテキストにおいては，Fourier 積分の導入は次のようになされる。

「周期性を持たない関数$f(x)$においても，区間$(-\infty,\ \infty)$を1周期と考え，Fourier 級数展開すると，その式が Riemann 積分の定義式に似ている。

それゆえ

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right)e^{i\omega x}\,d\omega$$

………①

が成り立つことが予想され，事実成り立つ」という具合である。

もちろんこの事実の証明は存在し，本論文では5章で与えるのだが，ここでの目的は Fourier 積分公式①の直観理解への方策ということである。

2．区分求積法

区分求積法とは，連続関数$f(x)$に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

は必ず収束し，その極限値を$\int_a^b f(x)\,dx$という。

次の問題を用意する。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n}^{4n}\frac{1}{k}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{3n}k\sin\frac{kn}{n}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}+\cdots+\frac{1}{6n-1}\right)$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+k}+\cdots\cdots\right)$

(1)の解

$$与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(0+\frac{1-0}{n}k\right)}\cdot\frac{1-0}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \Big[\log|1+x|\Big]_0^1$$

$$= \log 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (答)$$

(2)の解

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\left(0+\frac{2-0}{2n}k\right)}\cdot\frac{2-0}{2n}$$

$$= \int_0^2\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \log 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (答)$$

(3)の解

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\cdots+\frac{1}{2n+n}+\frac{1}{3n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{3+\frac{n}{n}}\right)$$

$$+\frac{1}{3+\frac{1}{n}}+\frac{1}{3+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{3+\frac{n}{n}}\Big)$$

$$= \int_0^1\frac{1}{2+x}dx+\int_0^1\frac{1}{3+x}dx$$

$$= \Big[\log|2+x|\Big]_0^1+\Big[\log|3+x|\Big]_0^1$$

$$= (\log 3-\log 2)+(\log 4-\log 3)$$

$$= \log 4-\log 2$$

$$= \log 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (答)$$

(4)の解

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{k}{n}\sin\frac{\pi}{n}k\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi-0}{3n}k\sin\frac{\pi}{n}k\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi-0}{3n}k\cdot\sin\left(3\frac{\pi-0}{3n}\right)$$

$$\times\frac{\pi-0}{3n}\times\frac{3}{\pi}$$

$$= \frac{9}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin 3x dt$$

$$= \frac{3}{\pi}$$

(5)の解

$$K_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}+\cdots\cdots+\frac{1}{6n-1}$$

$$T_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{6n}$$

$$G_n = \frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\frac{1}{2n+6}+\cdots\cdots+\frac{1}{6n}$$

とおく。

$$K_n = T_n - G_n$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{2n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$$

$$G_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}T_n = \int_0^4\frac{1}{2+x}dx = \log 3$$

$$\lim_{n\to\infty}G_n = \frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}\log 3$$

$$\lim_{n\to\infty}K_n = \lim_{n\to\infty}T_n - \lim_{n\to\infty}G_n$$

$$= \log 3-\frac{1}{2}\log 3$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (答)$$

以上の解はすべて正統的な解法である。

筆者は，この種の問題に以下に述べるような形の解法を与える。

（Ｉ）与式から $\frac{k}{n}$, $\frac{1}{n}$ を作る。

（Ⅱ）$\sum_{k=p}^{q}$ より，$\frac{k}{n}$ の k に p と q を代入し，$n\to\infty$ とすると，それぞれが定積分の下端と上端になる。

（Ⅲ）$\frac{k}{n}$ を x, $\frac{1}{n}$ を dx とする。

以上

筆者の方法で(1)から(5)まで別解として与える。

(1)の別解

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$$

よって，与式 $=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log\ 2$ ………(答)

(2)の別解

$$与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2$$

よって，与式 $=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\log 2$…………(答)

(3)の別解

$$与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n}^{4n}\frac{1}{k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n}^{4n}\frac{1}{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n}=4$$

よって，与式 $=\int_0^4\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_2^4=\log 2$ ………(答)

(4)の別解

$$与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}\pi\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n}=3$$

よって，与式 $=\int_0^3 x\sin\pi x\,dx$

$=\frac{3}{\pi}$ ………………………………(答)

(5)の別解

$$与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+(2k-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+2\cdot\frac{k}{n}-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2$$

よって，与式 $=\int_0^2\frac{1}{2+2x}dx$

$=\frac{1}{2}\log 3$ …………………………(答)

区分求積法は，積分区間や被積分関数を一意的に定められないことが，難しく感じることの原因である。

筆者の方法によると積分区間や被積分関数が一意的に定まる。

この方法を用いて(6)の解法を試みると，

$$与式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+k}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x}dx$$

もちろん，問題(6)の級数は収束しないが、要は区分求積分における区間と被積分関数の決め方を確認したかったのである。

3．Fourier 積分の定義

$f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で定義されており，

(1) $f(x)$ と $f'(x)$ はともに区分的に連続である。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ が有限確定である。

この条件の下で，$f(x)$ を $(-\infty,\infty)$ が1周期の関数と考えるが，とりあえず $[-L,L]$ で1周期の関数とみなして Fourier 級数展開する。

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{L}x+b_n\sin n\frac{\pi}{L}x\right)$$

ただし，
$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos n\frac{\pi}{L}tdt\\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin n\frac{\pi}{L}tdt\end{cases}$$

a_n，b_n を上式に代入すると

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt\right\}\right.$$

$$\left.\times\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)+\left\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt\right\}\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L}f(t)\left\{\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)+\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dt\right\}\frac{1}{L}\right.$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L}f(t)\cos\left\{\left(n\frac{\pi}{L}\right)(t-x)\right\}dt\right]\frac{1}{L}$$

ここで便宜上，①の n を k で，L を $n \leqq L < n+1$ なる自然数 n で置き換える。
すると①は

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-n}^{n} f(t)\cos\left\{\left(k\frac{\pi}{n}\right)(t-x)\right\}dt\right]\frac{1}{n}$$

となる。すなわち，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-n}^{n} f(t)\cos\left\{\pi(t-x)\frac{k}{n}\right\}dt\right]\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$L\to\infty$ とすると，$n\to\infty$。このとき，

$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$ だから仮定より $a_0\to 0$

よって，$f(x)$ を $(-\infty,\infty)$ を1周期とする周期関数と考えると

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-n}^{n} f(t)\cos\left\{\pi(t-x)\frac{k}{n}\right\}dt\right]\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots\text{③}$$

となる。この式で区分求積法の定式化を考えると，$\frac{k}{n}$ が μ，$\frac{1}{n}$ が $d\mu$ に置き換わって③の右辺は

$$\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left\{\pi(t-x)\mu\right\}dt\right]d\mu$$

となる。よって

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left\{\pi(t-x)\mu\right\}dt\right]d\mu$$

となる。

次の考察も一考に値すると思う。

②の右辺の［　］の部分から μ についての関数

$$\int_{-n}^{n} f(t)\cos\{\pi(t-x)\mu\}\,dt$$

を考える。μ についてのこの関数で，区間 $[0,n]$ を n^2 等分してリーマン和を作ると

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left[\int_{-n}^{n} f(t)\cos\left\{\pi(t-x)\cdot\frac{n-0}{n^2}k\right\}dt\right]\frac{n-0}{n^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n^2}\left[\int_{-n}^{n} f(t)\cos\left\{\pi(t-x)\frac{k}{n}\right\}dt\right]\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑤}$$

n を大きくしていくと，分割は限りなく細かくなり

⑤は $\int_0^{n}\left[\int_{-n}^{n} f(t)\cos\{\pi(t-x)\mu\}\,dt\right]d\mu$

に収束すると考えられる。

$n\to\infty$ だから $a_0\to 0$ と合わせて

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\{\pi(t-x)\mu\}\,dt\right]d\mu$$

となることがわかる。

以上

④，⑥式において，$\pi\mu=\lambda$ とおくと，④，⑥は

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\{(t-x)\lambda\}\,dt\right]d\lambda$$

となる。次に，

$$A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\{(t-x)\lambda\}\,dt\right]d\lambda \quad \cdot\text{⑦}$$

とおき，オイラーの公式により

$$\cos(t-x)\lambda=\frac{e^{i(t-x)\lambda}+e^{-i(t-x)\lambda}}{2}$$

を⑦の右辺に代入すると

$$A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{f(t)\frac{e^{-i(x-t)\lambda}+e^{i(x-t)\lambda}}{2}\right\}d\lambda$$

よって

$$\pi A=\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i(x-t)\lambda}}{2}dt\right\}d\lambda +\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{-i(x-t)\lambda}}{2}dt\right\}d\lambda$$

上式，右辺第二項で，$-\lambda=\omega$ とおくと

$$\pi A=\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i(x-t)\lambda}}{2}dt\right\}d\lambda +\int_0^{-\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i(x-t)\omega}}{2}dt\right\}(-d\omega)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i(x-t)\omega}}{2}dt\right\}d\omega$$

$\frac{1}{2\pi}$ を $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ として2重積分の両方に分けると，④，⑥は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega$$

となる。

右辺が Fourier 積分の定義式であり，以上の議論が $f(x)$ に対して Fourier 積分を定義することの妥当性である。

4．Fourier 積分公式の証明

Fourier 積分公式とは次の命題である。

$f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で定義されていて，$f(x)$，$f'(x)$ ともにすべての区間で区分的に連続かつ

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ が有限確定となるとする。このとき，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\{(t-x)\lambda\}\,dt\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

上の命題を証明するのに次の4つの命題は基本的である。

命題1

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

以下の命題の$f(x)$はすべて任意の区間で区分的に連続かつ$f'(x)$も区分的に連続であるものとする。

命題2

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$$

命題3

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^a f(x-u)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du = f(x-0)\cdot\frac{\pi}{2}$$

ただし，$u>0$とする。

命題4

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt = \frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}$$

命題1は複素関数論の手法を使って証明できる。ここでは証明は略する。

（命題2の略証明）

仮定により，区間(a,b)を適当に有限個の細区間に分割すると，そのおのおので$f(x)$は連続となる。今，その1つを(c,d)とする。(c,d)で$f(x)$は連続である。

$$\int_c^d f(x)\sin\lambda x\,dx = \frac{-1}{\lambda}\Big[f(x)\cos\lambda x\Big]_c^d$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_c^d f'(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$\left|\Big[f(x)\cos\lambda x\Big]_c^d\right|,\ \left|\int_c^d f'(x)\cos\lambda x\right|$$

はともに有界であるから，$\lambda\to\infty$とすれば

$$\int_c^d f(x)\sin\lambda x\,dx\to 0$$

このことは，有限個のすべての区間についていえるから，仮定の下で

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$$

が成り立つ。

（終）

（命題3の証明）

$$\int_0^a f(x-u)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du$$

$$=\int_0^a \frac{f(x-u)\sin\lambda u - f(x)\sin\lambda u + f(x)\sin\lambda u}{u}\,du$$

$$=\int_0^a \frac{f(x-u)-f(x)}{u}\sin\lambda u\,du + f(x)\int_0^a\frac{\sin\lambda u}{u}\,du$$

ここで

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(x-u)-f(x)}{u} = f'(x-0)$$

$f'(x-0)$の存在は，仮定より保証されている。

よって，$\dfrac{f(x-u)-f(x)}{u}$は$(0,a)$で区分的に連続である。

それゆえ，命題2より，

$\lambda\to\infty$のとき，$\displaystyle\int_0^a\frac{f(x-u)-f(x)}{u}\sin\lambda u\,du\to 0$

また，$\displaystyle f(x)\int_0^a\frac{\sin\lambda u}{u}\,du$

で，$\lambda u = v$とおくと，

$$f(x)\int_0^a\frac{\sin\lambda u}{u}\,du$$

$$=f(x)\int_0^{\lambda a}\frac{\sin v}{\frac{v}{\lambda}}\frac{1}{\lambda}\,dv$$

$$=f(x)\int_0^{\lambda a}\frac{\sin v}{v}\,dv$$

$\lambda\to\infty$とすると，命題1より

$$\int_0^{\lambda a}\frac{\sin\lambda v}{v}\,dv\to\frac{\pi}{2}$$

よって，

$$\int_0^a f(x-u)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}f(x-0)$$

（終）

（命題4の証明）

$$\int_a^b f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt$$

$$=\int_a^x f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt + \int_x^b f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt$$

ここで，

$$\int_a^x f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt = \mathrm{I}_1$$

$$\int_x^b f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt = \mathrm{I}_2$$

とおく。

I_1，I_2において，それぞれ$x-t=u$，$t-x=v$とおくと

$$\mathrm{I}_1 = \int_{x-a}^0 f(x-u)\frac{\sin\lambda(-u)}{-u}(-du)$$

$$= \int_0^{x-a} f(x-u)\frac{\sin\lambda u}{u}du$$

同様に

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{b-x} f(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv$$

ここで，$\lambda\to\infty$ とすると，命題3により

$$\mathrm{I}_1\to\frac{\pi}{2}f(x+0),\ \mathrm{I}_2\to\frac{\pi}{2}f(x-0)$$

よって，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}dt=\frac{\pi}{2}\left\{f(x-0)+f(x-0)\right\}$$

（終）

定理（Fourier 積分公式）

$f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で定義されていて，$f(x)$，$f'(x)$ ともにすべての区間で区分的に連続かつ

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)\,dx|$ が有限確定とする。このとき，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left\{\lambda(t-x)\right\}dt\right]d\alpha$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}$$

（証明）

命題4より，$a<x<b$ において

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}dt=\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}dt$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{a}+\int_a^b+\int_b^{\infty}\right)f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}dt$$

上式の右辺の3つの積分を左からそれぞれ，J_1, J_2，J_3 とおくと，

$$|J_1|=\left|\int_{-\infty}^{a}f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}dt\right|$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{a}\left|\frac{f(t)\sin\alpha(t-x)}{t-x}\right|dt$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{a}\left|\frac{f(t)}{t-x}\right|dt$$

$\int_{-\infty}^{a}|f(t)|\,dt$ は仮定から収束する。

また，$t<a<x$ だから $inf|t-x|>0$

よって

$\int_{-\infty}^{a}\left|\frac{f(t)}{t-x}\right|dt$ は収束する。

ゆえに，J_1 は収束する。

全く同様な議論によって J_3 も収束する。

これより，任意の $\varepsilon>0$ に対して，a を十分小さく，また，b を大きくすると，

$$|J_1|<\frac{\varepsilon}{3},\ |J_3|<\frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。

また，J_2 は λ を大きくとると

$$\left|J_2-\frac{\pi}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。

よって，十分大きな α に対して，

$$\left|J_1+\left(J_2-\frac{\pi}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}\right)+J_3\right|$$

$$=\left|J_1+J_2+J_3-\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}\right|<\varepsilon$$

となる。それゆえ，

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}dt-\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}\right|<\varepsilon$$

ゆえに，

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}dt=\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}$$

ここで，

$$f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}=\int_0^{\alpha}f(t)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda$$

であるから，

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\alpha(t-x)}{t-x}dt$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\alpha}f(t)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda\right)dt\cdots\cdots(※)$$

ここで，$0\leqq\lambda<\infty$ で

$\int_0^{\alpha}f(t)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda$ は λ に関して

一様に収束するから（※）は積分の順序が変更できて

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda$$

このことを

$$\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda$$

と書くから

$$\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}$$

が証明された。

$f(x)$ が $t=x$ において連続ならば，

$$\frac{f(x+0)+(x-0)}{2}=\frac{2f(x)}{2}=f(x)$$

となり，通常の Fourier 積分公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\{(t-x)\lambda\}dt\right]d\lambda$$

が得られる。この式から

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega x}\,dt\right)e^{i\omega x}\,d\omega$$

への変形は，3の後半で見た通りである。

1．むすび

Fourier 積分公式の本来の証明は4．で述べたが，この証明は参考文献(1)，(2)より筆者が工夫して考えたものである。

いずれにせよ，かなり面倒なステップを経ねばならず，数学専攻ででもなければここまでやる必要があるのかと思う。

筆者は Fourier 積分公式の意味を感覚的に理解する方策をこの論文で示そうとした次第である。

参考文献

(1)　一松信：解析学序説上・下，裳華房1962
(2)　矢野健太郎・石原繁：解析学概論，裳華房1965
(3)　野邑雄吉：応用数学，内田老鶴圃，1957