最適レギュレータの一計算法

出川 喬庸*

A Computation Method of Optimal Regulator

Tadayasu DEGAWA*

In designing a control system, it is often required that controlled variables arrive at a disired value in minimum time and with minimum consumption of energy, and that the effect of disturbance on the system behavior is minimum.

Those requests is represented as a performance index which involve controlled variable and control input. Design problem of a control system which minimize such a performance index is called optimal control problem. This problem has been treated for both nonlinear and linear system, and various solution techniques has been proposed.

Linear optimal control is a special sort of optimal control. The system that is controlled is assumed linear, and the controller that generates the optimal control, is constrained to be linear. Linear controllers are achieved by working with performance indices which are quadratic in the control and regulation/tracking error variables.

This report consider the design of the optimal regulator for linear time invariant system with performance indices which involve quadratic state and input.

The objective of a regulator is to keep the system variables within an acceptable error of selected operational values in spite of system disturbances and plant parameter variation. In other words, the problem is to apply a control to take the plant from a nonzero state to the zero state. This problem may typically occur where the plant is subjected to unwanted disturbances that perturb its output.

The control law of an optimal regulator is given by constant gain state feedback. Such a feedback gain is normally obtained by solving Ricatti equation which is consisted of parameters of the performance index and state equation. Although many different solution methods of Ricatti equation has been proposed, any method require complex computation and so the relationship between obtained gains and selected parameters tend to be not clear.

In this report, a method, by which feedback gain of optimal regulator can be directly computed from parameters of the system and the performance index, is proposed. For single input system, it is already known that the gain can be directly obtained from Kalman equation. This study expand that method to multi- input system. In this method, it is not required to solve Ricatti equation, computation becomes simple and so the relationship between gains and parameters tend to be more clear.

Finally, as for numerical example, the state variable feedback gain of an optimal regulator are computed by the proposed method,

Key words: linear system, state variable feedback, optimal regulator, Kalman equation

---

* 航空工学科

1．まえがき

制御系の設計においては，できる限り少ない入力量を用いて，できる限り短時間に制御量を一定の目標値にスムーズに到達させることや外乱の影響をできる限り少なくすることが要求されることが多いが，これらを制御量と入力量を用いて評価関数として表し，この評価関数を最小にする制御系を設計する問題を最適制御問題と呼ぶ。

この問題は非線形システムと線形システムの両方を対象に取り扱われてきており，解法もいろいろ提案されているが，ここでは定係数線形系に対して，状態量と入力量の2次形式で表される評価関数を最小にする最適レギュレータ問題を考える。

最適レギュレータはできる限り少ない入力量と状態量で，状態量を零に戻すことを目的とする制御装置である。

最適レギュレータの設計目的は制御量と入力量の2次形式評価関数を最小にするような制御則を求めることである。

最適レギュレータの制御則は定係数の状態フィードバックで与えられる。その定係数のフィードバック・ゲインは評価関数の選定パラメータと状態方程式のパラメータからなるリカッチ方程式の解から一般には得られる。リカッチ方程式を解く方法はいろいろ提案されているが，いずれもかなりの手順を経る必要があり，複雑なものとなっており，結果として出てくるゲインと評価関数の選定パラメータの関数が不明確になる傾向がある。

本研究では，多入力系について最適レギュレータのフィードバックゲインを状態方程式のパラメータと評価関数のパラメータからリカッチ方程式を解くことなく計算する方法を提案している。ただし，単入力系についてはKalman方程式からゲインが直接求められることは既に知られているが，本研究ではその方法を多少修正している。また，その方法を多入力系に拡張している。本方法では，リカッチ方程式を解く必要がないのでフィードバック・ゲインを求める手順が簡単になり，計算量も少なくなる。

最後に，本方式の有効性と計算手順を示すために，ある数値例を用いて，状態フィードバック・ゲインを求め，従来の方法と解が一致することを確認している。

2．問題の記述

制御対象は m 入力 n 次線形固定係数系であり，つぎの微分方程式で記述される。

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t) \qquad (1)$$

ここで，$x(t) \epsilon \mathrm{R}^n$ は状態，$u(t) \epsilon \mathrm{R}^m$ は入力である。

A, B はそれぞれ $n \times n$, $n \times m$ の定数マトリクス，系は完全可制御であるとする。

最適レギュレータの設計問題は，つぎのような評価関数

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt \qquad (2)$$

ここで，R は対称正定マトリクス，Q は対称準正定マトリクスである。

を最小にする状態フィードバック制御則 $u = Kx$，すなわち，状態フィードバックゲイン K を求めることである。

この問題は既に解かれており，つぎのように得られる。

$$K = R^{-1} B^T P x \qquad (3)$$

P はつぎのリカッチ方程式の正定対称な解である。

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \qquad (4)$$

本研究の目的はこのフィードバック・ゲインをリカッチ方程式を解くことなく，簡単に求める方法を導き出すことである。

なお，リカッチ方程式を変形するとつぎのようなKalman方程式が得られることが知られている。

$$\left[I - R^{1/2} K(-sI-A)^{-1} BR^{-1/2}\right]^T \left[I - R^{1/2} K(sI-A)^{-1} BR^{-1/2}\right]$$
$$= I + R^{-1/2} B^T (-sI-A)^{-1} Q (sI-A)^{-1} BR^{-1/2} \qquad (5)$$

3．最適ゲインの一計算法

最適レギュレータのフィードバック・ゲインの計算法は単入力系と多入力系に分けて記述する。単入力系については従来の方法を多少修正したものである。

(1) 単入力系（$m = 1$）の場合

$u(t)$ はスカラ，B, K はそれぞれ $n \times 1$, $1 \times n$ の定数ベクトル，R はスカラとなるので B を b，K を k^T，R を r と書くことにする。

このとき，Kalman方程式はつぎのように書ける。

$$\left[1 - b^T(-sI-A^T)^{-1} k\right] \left[1 - k^T(sI-A)^{-1} b\right]$$
$$= 1 + (1/r) b^T (-sI-A^T)^{-1} Q (sI-A)^{-1} b \qquad (6)$$

また，簡単のため，$r=1$として考える。$r\neq 1$のときは，Q/rをQと置き換えることによって，同様に解くことができる。上式はさらにつぎのように書きかえることができる。

$$\begin{aligned}&\left[1-b^T(-sI-A^T)^{-1}T^TT^{-1}\right]\left[1-k^TT^{-1}T(sI-A)^{-1}b\right]\\&=1+b^T(-sI-A^T)^{-1}T^TT^{-T}QT^{-1}(sI-A)^{-1}b\end{aligned}\tag{7}$$

ここで，

$$T=\begin{bmatrix}g^T\\g^TA\\g^TA^2\\\vdots\\g^TA^{n-1}\end{bmatrix}$$

g^T は $C=[b\ Ab\ A^2b\cdots A^{n-1}b]$ の逆マトリクスC^{-1}の最下行ベクトルをである。

g^Tを用いるとつぎの2つの式が成り立つ。

$$g^TA^i(sI-A)^{-1}b=s^ig^T(sI-A)^{-1}b \quad \text{for}\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\tag{8}$$

$$g^T(sI-A)^{-1}b=1/|sI-A|\tag{9}$$

したがって，$T(sI-A)^{-1}b$はつぎのように書ける。

$$T(sI-A)^{-1}b=s(s)/|sI-A|\tag{10}$$

この式を(7)式に適用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}&[1-s^T(-s)k_c/|-sI-A^T|][1-k_c^Ts(s)/|sI-A|]\\&=1+s^T(-s)Q_cs(s)/|-sI-A^T||sI-A|\end{aligned}\tag{11}$$

ここで，$k_c=T^{-1}k$, $Q_c=T^{-T}QT^{-1}$

また，制御対象の特性多項式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}a(s)&=|sI-A|\\&=s^n+a^Ts(s)\\&=\tilde{a}^T\tilde{s}(s)\end{aligned}\tag{12}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\tilde{a}^T&=[a^T\quad 1]\\s(s)&=[1\ s\ s^2\ \cdots\ s^{n-1}]^T\\\tilde{s}(s)&=[s^T(s)\ \ s^n]^T\\a^T&=-g^TA^nT^{-1}\end{aligned}\tag{13}$$

いま，1を

$$1=|sI-A|/|sI-A|=\tilde{a}^T\tilde{s}(s)/|sI-A|\tag{14}$$

と表すと(11)式はさらにつぎのようになる。

$$\begin{aligned}&\tilde{s}^T(-s)\tilde{f}\tilde{f}^Ts(s)/|-s-A^T||sI-A|\\&=\tilde{s}^T(-s)\tilde{P}s(s)/|-s-A^T||sI-A|\end{aligned}\tag{15}$$

ここで，$\tilde{f}=\tilde{a}-\tilde{k}_c$, $\tilde{k}_c{}^T=[k_c^T\ 0]$

$$\tilde{P}=\tilde{a}\tilde{a}+\tilde{Q}_c=\begin{bmatrix}Q_c&0\\0&0\end{bmatrix}$$

上式が成り立つには次式が成り立てばよい。

$$\tilde{s}^T(-s)\tilde{f}\tilde{f}^Ts(s)=\tilde{s}^T(-s)\tilde{P}s(s)\tag{16}$$

この式の両辺はs^2に関するn次の（sに関する$2n$次）の多項式になる。右辺の$\tilde{P}$は$(n+1)\times(n+1)$定数マトリクス，左辺の$\tilde{f}$は未知の$(n+1)$ベクトルであり，上式から求められる。そうすると，$\tilde{f}$から$\tilde{k}_c$が求められ，最後にk_cからフィードバック・ゲインkが求められる。

(16)式の右辺を展開してできる多項式を

$$\begin{aligned}d(s)=&(-1)^ns^{2n}+d_{n-1}s^{2(n-1)}+d_{n-2}s^{2(n-2)}+\\&\cdots+d_1s^2+d_0s^0\end{aligned}\tag{17}$$

とし，$P=[p_{ij}]$とすると，

$d(s)$の係数とPの要素との関係はつぎのように表される。

$$d_k=\sum_{i-j=2(k-1)}(-1)^{i-1}P_{ij}\quad\text{for}\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

すなわち，d_kは，対角方向と直交する右上から左下方向にPの対角要素$p_{(k-1)(k-1)}$を通って，要素p_{ij}に$(-1)^{i-1}$を掛けて加えたものであり，簡単に求められる。係数d_kが求められると$d(s)$が得られる。方程式$d(s)=0$の実数部が負のn個の根をs_i $i=1,2,\cdots,n$とすると，それらは，閉ループ系の特性方程式$\tilde{f}^T\tilde{s}(s)=0$の根である。したがって，次式が成り立つ。

$$\tilde{f}^T\tilde{s}(s_i)=0\quad\text{for}\quad i=1,2,\cdots,n\tag{18}$$

これは，$\tilde{s}(s_i)$を係数ベクトル，$\tilde{f}$を未知ベクトルとする連立方程式であり，未知数の個数がn，方程式の個数がnであるから，$\tilde{s}(s_i)$が線形独立であるならば，容易に解くことができる。そして，s_iがすべて異なっているならば，$\tilde{s}(s_i)$がすべて線形独立であることは，容易に示すことができる。さらに，もしs_iにℓ個の等しいものがあるならば，$\tilde{s}(s)$のsによる$\ell-1$階微分までを求め，それらのsにs_iを代入したものを係数ベクトルとして用いればよい。明らかに，

それらは線形独立である。

(2) 多入力系の場合

単入力系の結果を多入力系に拡張する。

また，簡単のため，$R=I$として考える。$R\neq I$のときは，$BR^{-1/2}$をB，$R^{1/2}K$をKと置き換えることによって，同様に解き，最後に実際のBとRを求めればよいからである。

Kalman 方程式はつぎのように書きかえることができる。

$$
\begin{aligned}
&[I-KT^{-1}T(-sI-A)^{-1}B]^T[I-KT^{-1}T(sI-A)^{-1}B] \\
&=I+B^T(-sI-A^T)^{-1}T^TT^{-T}QT^{-1}T(sI-A)^{-1}B
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ここで，

$$
T=\begin{bmatrix} g_1^T \\ g_1^TA \\ \vdots \\ g_1^TA^{\rho_1-1} \\ q_2^T \\ \vdots \\ g_2^TA^{\rho_2-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_m^TA^{\rho_m-1} \end{bmatrix}
\tag{20}
$$

(A,B)が完全可制御ならば，マトリクス

$V=[B\ AB\ A^2B\cdots A^{n-1}B]$

から左に先着順にn個の独立な列ベクトルを選ぶことができ，つぎのようなマトリクスCができる。

$$
\begin{aligned}
C=[&b_1\ Ab_1\cdots A^{\rho_1-1}b_1\ b_2\ Ab_2 \\
&\cdots A^{\rho_2-1}b_2\cdots b_m\ Ab_m\cdots A^{\rho_m-1}b_m]
\end{aligned}
\tag{21}
$$

ここで，$B=[b_1\ b_2\ b_3\cdots b_m]$である。いま，

$$
h_i=\sum_{k=1}^{i}\rho_k \quad \text{for} \quad i=1,2,\cdots,m
\tag{22}
$$

とするとき，C^{-1}の第h_i行ベクトルがg_i^Tである。

g_i^Tを用いるとつぎの式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&g_i^TA^j(sI-A)^{-1}B=s^jg_i^T(sI-A)^{-1}B \\
&\qquad \text{for} \quad j=0,1,\cdots,\rho_i-1
\end{aligned}
\tag{23}
$$

したがって，$T(sI-A)^{-1}B$はつぎのように書ける。

$$
T(sI-A)^{-1}B=S(s)G(sI-A)^{-1}B
\tag{24}
$$

ここで，$G=\begin{bmatrix} g_1^T \\ g_2^T \\ \vdots \\ g_m^T \end{bmatrix}$

$$
|G(sI-A)^{-1}B|=1/|sI-A|
\tag{25}
$$

$$
S(s)=\begin{bmatrix} S_1(s) \\ S_2(s) \\ \vdots \\ S_m(s) \end{bmatrix}
$$

$$
S_i(s)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & s & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s^{\rho_i-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
$$

↑
第 i 例

この式を(19)式に適用すると次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&[I-K_cS(-s)G(-sI-A)^{-1}B]^T[I-K_cS(s)G(sI-A)^{-1}B] \\
&=I+B^T(-sI-A^T)^{-1}G^TS^T(s)Q_cS(s)G(sI-A)^{-1}B
\end{aligned}
\tag{26}
$$

ここで，$K_c=T^{-1}K$，$Q_c=T^{-T}QT^{-1}$

また，制御対象の特性多項式は次式で与えられる。

$$
|sI-A|=|A(s)|
\tag{27}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
A(s)&=\begin{bmatrix} s^{\rho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{\rho_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\rho_m} \end{bmatrix}+A_rS(s) \\
&=\widetilde{A_r}\widetilde{S}(s)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
A_r=\begin{bmatrix} g_1^TA^{\rho_1} \\ g_2^TA^{\rho_2} \\ \cdots \\ g_m^TA^{\rho_m} \end{bmatrix}T^{-1}
\tag{29}
$$

$A_r=[A_{r1}\ A_{r2}\cdots A_{ri}\cdots A_{rm}]$

↑
$m\times\rho_i$ マトリクス

$e_i=[0\cdots 0\ 1\ 0\cdots 0]^T$

↑
i 番目

e_iは第 i 番目の要素が 1 の単位ベクトルである。

$\tilde{A}_r = [A_{r1}\ e_1\ A_{r2}\ e_2 \cdots A_{rm}\ e_m]$

$$\tilde{S}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1(s) \\ \tilde{S}_2(s) \\ \vdots \\ \tilde{S}_m(s) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S}_i(s) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & s & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & s^{\rho_i-1} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s^{\rho_i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

次式が成り立つことは容易に示すことができる。

$$I = B_r^{-1}A(s)G(sI-A)^{-1}B \tag{30}$$

ここで，

$$B_r = \begin{bmatrix} g_1^T A^{\rho_1-1}B \\ g_2^T A^{\rho_2-1}B \\ \cdots \\ g_m^T A^{\rho_m-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

と表すと(26)式はさらにつぎのようになる。

$$\begin{aligned} &B^T(-sI-A^T)G^T\tilde{S}^T(s)\tilde{F}^T\tilde{F}\tilde{S}(s)G(sI-A)^{-1}B \\ &= B^T(-sI-A^T)^{-1}G^T\tilde{S}^T(s)\cdot\tilde{P}\tilde{S}(s)G(sI-A)^{-1}B \end{aligned} \tag{32}$$

ここで，$\tilde{F} = \tilde{A} - \tilde{K}$,

$F_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ を $m\times\rho_i$ マトリクスとし，

$F = [F_1\ F_2 \cdots F_m]$ と表すとき，

$\tilde{F} = [F_1\ e_1\ F_2\ e_2 \cdots F_m\ e_m]$

$K_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ を $m\times\rho_i$ マトリクスとし，

$K = [K_1\ K_2 \cdots K_m]$ と表すとき，

$\tilde{K} = [K_1\ 0\ K_2\ 0 \cdots K_m\ 0]$

$\tilde{P} = \tilde{A}\tilde{A}^T + \tilde{Q}_c$, $\widetilde{Q_c}$ は

$Q_{cij}(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ を $\rho_i\times\rho_j$ マトリクスとし，

$$Q_c = \begin{bmatrix} Q_{c11} & Q_{c12} & \cdots & Q_{c1m} \\ Q_{c21} & Q_{c22} & \cdots & Q_{c2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{cm1} & Q_{cm2} & \cdots & Q_{cmm} \end{bmatrix}$$ とするとき，

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{c11} & 0 & Q_{c12} & 0 & \cdots & Q_{c1m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ Q_{c21} & 0 & Q_{c22} & 0 & \cdots & Q_{c2m} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{cm1} & 0 & Q_{cm2} & 0 & \cdots & Q_{cmm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式が成り立つには次式が成り立てばよいことがわかる。

$$\tilde{S}^T(-s)\tilde{F}\tilde{F}^T S(s) = \tilde{S}^T(-s)\tilde{P}\tilde{S}(s) \tag{33}$$

上式の両辺は対角要素が s^2 に関する ρ_i (for $i = 1, 2, \cdots, m$) 次（s に関する $2\rho_i$ 次）で，(i, j) 非対角要素が s に関する $(\rho_i+\rho_j-1)$ 次の $m\times m$ 多項式マトリクスになる。右辺の $\tilde{P}$ は $(n+m)\times(n+m)$ 定数マトリクス，左辺の $\tilde{F}$ は $m\times n$ 個の未知パラメータを含む，$m\times(n+m)$ ベクトルであり，上式から求められる。そうすると $\tilde{F}$ から $\widetilde{K_c}$ が求められ，最後に K_c からフィードバック・ゲイン K を求められる。

(32)式の右辺を展開してできる多項式マトリクス $D(s)$ の対角要素を

$$\begin{aligned} d_{ii}(s) = (-1)^{\rho_i}s^{2\rho_i} &+ (d_{ii})_{\rho_i-1}s^{2(\rho_i-1)} \\ &+ (d_{ii})_{\rho_i-2}s^{2(\rho_i-2)} + \cdots (d_{ii})_1 s^2 + (d_{ii})_0 s^0 \end{aligned} \tag{34}$$

とし，$P_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ を $(\rho_i+1)\times(\rho_j+1)$ マトリクスとし，

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} (P_{ij})_{11} & (P_{ij})_{12} & \cdots & (P_{ij})_{1(\rho_j-1)} \\ (P_{ij})_{21} & (P_{ij})_{22} & \cdots & (P_{ij})_{2(\rho_j+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (P_{ij})_{(\rho_i+1)1} & (P_{ij})_{(\rho_i+1)2} & \cdots & (P_{ij})_{(\rho_i-1)(\rho_j+1)} \end{bmatrix}$$

と表すと，$d_{ii}(s)$ の係数と P_{ii} の要素との関係はつぎのように表される。

$$\begin{aligned} (d_{ii})_k &= \sum_{m+n=2(k-1)} (-1)^{m-1}(P_{ij})_{mm} \\ &\text{for } k = 0, 1, \cdots, \rho_m - 1 \end{aligned} \tag{35}$$

すなわち，$(d_{ij})_k$ は，対角方向と直交する右上から左下方向に P_{ii} の対角要素 $(P_{ii})_{(k-1)(k-1)}$ を通って，要素 $(P_{ij})_{mm}$ に $(-1)^{m-1}$ を掛けて加えたものであり，簡単に求められる。

$$d_{ij}(s) = (d_{ij})_{\rho_i-\rho_j-1}\, s^{\rho_i-\rho_j-1)} + (d_{ij})_{\rho_i-\rho_j-2}\, s^{\rho_i-\rho_j-2)} + (d_{ij})_{\rho_i-\rho_j-3}\, s^{\rho_i-\rho_j-3} + \cdots (d_{ij})_1 s + (d_{ij})_0\, s^0 \tag{36}$$

$d_{ij}(s)$ の係数と P_{ij} の要素との関係はつぎのように表される。

$$(d_{ij})_k = \sum_{m-n=k-2} (-1)^{m-1}(P_{ij})_{mm} \quad \text{for } k = 0, 1, \cdots, \rho_i+\rho_j-1 \tag{37}$$

なお，$d_{ji}(s) = -d_{ij}(s)$

すなわち，$(d_{ij})_k$ は，対角方向と直交する右上から左下方向に，要素 $(P_{ij})_{mm}$ に $(-1)^{m-1}$ を掛けて加えたものであり，簡単に求められる。

多項式マトリクスの要素多項式の係数が求められると多項式マトリクス $D(s) = \tilde{S}^T(-s)\tilde{P}\tilde{S}(s)$ が得られる。方程式 $|D(s) = 0|$ の実数部が負の n 個の根を $s_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ とすると，それらは閉ループ系の特性方程式 $|\tilde{F}\tilde{S}(s) = 0|$ の根である。

したがって，ϖ_i を $D(s_i)$ に対する零空間の基底とするならば，すなわち $D(s_i)\varpi_i = 0,\ \varpi_i \neq 0$ が成り立つならば，$\tilde{F}\tilde{S}(s_i)\varpi_i = 0$ を満たさなければならない。というのは，方程式 $|\tilde{S}^T(-s)\tilde{F}| = 0$ の根の実数部は正であるから，実数部が負の n 個の根を $s_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ はその根ではなくマトリクス $\tilde{S}^T(-s_i)\tilde{F}$ は正則であり，その零空間の次元は零になるからである。

したがって，$S(s_i)\varpi_i = \nu_i$ とおくと，次式が成り立つ。

$$\tilde{F}\nu_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{38}$$

これは，ν_i を係数ベクトル，$\tilde{F}$ を未知マトリクスベクトルとする連立方程式であり，未知数の個数が mn，方程式の個数が mn であるが，互いに独立な m 個の n 元連立1次方程式となり，S_i がすべて異なっているならば ν_i は線形独立であるから，解くことができる。s_i がすべて異なっているならば ν_i は線形独立であることは，容易に示すことができる。

s_i に等しいものがある場合には ν_i は線形独立ではなくなるから，(38)式を解くことができなくなるが，その場合は重み行列 Q の対角要素に非常に小さな正の定数 ε を加え，s_i がすべて異なるようにして解くことによって実用上差し支えない近似的な解を得ることができる。

4．最適レギュレータゲインの数値計算例

提案した最適レギュレータゲインの計算法を示すために，簡単な数値例を用いて標準的な方法と本方法の両方でフィードバック・ゲインを計算し，両者を比較する。

制御対象を次のように仮定する。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最適レギュレータの重み行列をつぎのように設定する。

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

標準的な方法で求めるとゲインはつぎのようになる。

$$K = \begin{bmatrix} -0.723 & -3.27 & 1.38 & -2.41 \\ -0.691 & -2.41 & -0.446 & -7.22 \end{bmatrix}$$

本方式ではつぎのように求められる。

C をつくる。

$$C = [b_1\ Ab_1\ b_2\ Ab_2]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\rho_1 = 2,\ \rho_2 = 2$

C^{-1} を求める。

$$C^{-1} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow h_1 \text{行} \\ \\ \leftarrow h_2 \text{行} \end{array} \end{array}$$

$g_1^T = [1\ 0\ -1\ \ 1]$

$g_2^T = [0\ 0\ \ 1\ -1]$

T と T^{-1} を求める。

$$T = \begin{bmatrix} g_1^T \\ g_1^T A \\ g_2^T \\ g_2^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} g_1^T A^{\rho_1} \\ g_2^T A^{\rho_2} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_a = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_a^T \tilde{A}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & -2 & 29 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \tilde{A}_a^T \tilde{A}_a + \tilde{Q}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & -2 & 33 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D(s) = \tilde{S}^T(-s) P \tilde{S}(s)$$
$$= \begin{bmatrix} 1-6s^2+s^4 & -10s^2-5s^3 \\ -10s^2+5s^3 & 4-31s^2+s^4 \end{bmatrix}$$

$$|D(s)| = 4-55s^2+91s^4-12s^6+s^8 = 0$$

上の方程式の実数部が負の根 s_1, s_2, s_3, s_4 は

$$s_1 = -0.753,\ s_2 = -0.290,$$
$$s_3 = -2.72-j1.32,\ s_4 = -2.72+j1.32$$

である。

$D(s_1)$, $D(s_2)$, $D(s_3)$, $D(s_4)$ の零空間の基底 ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 を求めると,

$$\varpi_1 = \begin{bmatrix} 0.861 \\ -.507 \end{bmatrix},\ \varpi_2 = \begin{bmatrix} 0.821 \\ -.570 \end{bmatrix},$$

$$\varpi_3 = \begin{bmatrix} 0.727 \\ -.589-j0.352 \end{bmatrix},\ \varpi_4 = \begin{bmatrix} 0.727 \\ -.589+j0.352 \end{bmatrix}$$

となる。さらに $\nu_i = S(s_i)\varpi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ を

$$\nu_1 = \begin{bmatrix} 0.862 \\ -0.649 \\ 0.489 \\ -0.507 \\ 0.382 \\ -0.288 \end{bmatrix},\ \nu_2 = \begin{bmatrix} 0.821 \\ -0.239 \\ 0.0693 \\ 0.570 \\ -0.166 \\ 0.0481 \end{bmatrix}$$

$$\nu_3 = \begin{bmatrix} 0.727 \\ -1.98-j0.957 \\ 4.13+j5.21 \\ -0.589-j0.352 \\ 1.14+j1.73 \\ -0.825-j6.22 \end{bmatrix},\ \nu_4 = \begin{bmatrix} 0.727 \\ -1.98+j0.957 \\ 4.13-j5.21 \\ -0.589+j0.352 \\ 1.14-j1.73 \\ -0.825+j6.22 \end{bmatrix}$$

いま,

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 1 & f_{13} & f_{14} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 & f_{23} & f_{24} & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [\nu_1\ \nu_2\ \nu_3\ \nu_4]$$

とすると, 方程式

$$FV = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つので, これを解いて,

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.723 & 1.27 & -1.38 & -2.58 \\ 0.691 & 2.41 & 1.45 & 5.22 \end{bmatrix}$$

が得られる。したがって,

$$K = \bar{A} - \bar{F} = \begin{bmatrix} -0.723 & -3.27 & 1.38 & -2.41 \\ -0.691 & -2.41 & -0.45 & -7.22 \end{bmatrix}$$

以上のように別にリカッチ方程式を解いて求めたものと一致するが, 本方式では計算手順が簡単になっている。

5．あとがき

本報告では，定係数線形系に対して，状態量と入力量の２次形式で表される評価関数を最小にする最適レギュレータ問題を考え，その定係数の状態フィードバック・ゲインをリカッチ方程式を解くことなく計算する方法を提案している。

単入力系については Kalman 方程式からゲインが直接求められることは既に知られているが，本研究ではその方法を多少修正し，また多入力系に拡張した。本方法では，リカッチ方程式を解く必要がないのでフィードバック・ゲインを求める手順が簡単になった。

最後に，提案した方法の計算手順を具体的に示すために，本方程式の有用性を示すために，数値計算例を示した。

ただし，多変数系の場合，閉ループ系の根に重根がある場合，近似的な解き方が得られるのみであり，実用上差し支えない解は得られるが，方式による正確な解き方はまだ導くことができなかった。今後の課題として研究していくつもりである。

参考文献

1）W.A. Wolovich: Linear Multivariable Systems. New York: Spring Verlag, 1974
2）出川，金井，内門：多変数モデル・フォロイング制御系の一構成法，計測自動制御学会論文集，第18巻，第12号，1982年，pp.1132～1139