積形非線形フィードバックシステムの拡張リアプノフ関数

宮城　雅夫*　宮城　隼夫**

Expanded Lyapunov Function for Product–Type Nonlinear Feedback Systems

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

In many physical situations, the null solution of the system may not be asymptotically stable for all possible initial states but only for initial states contained in a region around the origin. In such cases, computation of a stability boundary is of great interest to system designers and the Lyapunov function may be used to estimate stability boundaries.

The stability boundaries obtained by the Lyapunov method are more or less conservative, because they give, generally, only the sufficient conditions for obtaining stability. Hence, considerable effort has been devoted to finding a suitable Lyapunov function which will give an extended stability boundary.

This paper tries to extend the quadratic-type Lyapunov function for the product-type nonlinear feedback systems, introducing a particular nonlinear function into the quadratic-type function. To accomplish this, alternative stability theorems which rigorously allow for this particular function are derived.

Key Words: Product-Type Nonlinear System, Generalized Lyapunov Function, Stability

1．緒　言

工学で頻出する非線形システムの安定性はほとんどの場合局所的であり，平衡点近傍に安定領域が存在する。リアプノフ法は平衡点の安定性のみならず，このような安定領域まで評価できる特長を持っている。しかしながら，アリプノフの安定定理が単に安定のための十分条件しか与えないことから，対象システムのリアプノフ関数が保証する安定領域もかなり控えめであることが多い。したがって，工学的には，より真の安定領域に近い安定領域を評価することができる優れたリアプノフ関数を構成することが重要な課題となる。

本論文では，システムの安定解析にリアプノフ法を適用する際に解析の糸口となるリアプノフ関数の構成法について論じる。ここでは，非線形要素が積形で与えられる積形非線形フィードバックシステムを対象とし，従来のリアプノフ関数より広い安定領域を保証できる拡張リアプノフ関数の構成法を提案する。まず，従来この種のシステムの安定性の解析によく用いられる二次形式形リアプノフ関数を一般化する。一般化は，既に筆者らによって報告されている拡張二次形式形リアプノフ関数に特殊な制約を持つ任意関数を導入することによってなされるが，この任意関数の導入によって，二次形式にとらわれないリアプノフ関数を得ることができる。また，任意関数が保証する安定領域の拡張に重要な働きをすることも示される。さらに，このように一般化されたリアプノフ関数に拡張項が加わった拡張リアプノフ関数を構成する手法を提案する。

2．問題の設定

本研究で対象とするシステムは，非線形要素が状態変数の線形結合と非線形関数の積で与えられるシステムであり，次式で表される。

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} - \mathbf{b}f(u)v \\ u &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ v &= \mathbf{d}^T\mathbf{x}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ただし，$\mathbf{A}$ は $n \times n$ の行列であり，$u \neq v$ とする。ま

*　機械工学科

**琉球大学工学部（〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原1）

た $f(u)$ は次の条件を満足する非線形関数とする。

Ⅰ) $f(u)$ は微分可能かつ原点近傍で正

Ⅱ) $u \neq 0$ に対して，$u\gamma(u) = u\int_0^u f(u)\,du \geqq 0$

ただし，$\gamma(u) = \int_0^u f(u)\,du$ (2)

(1) 式で表されるシステムのブロック線図を Fig. 1 に示す。

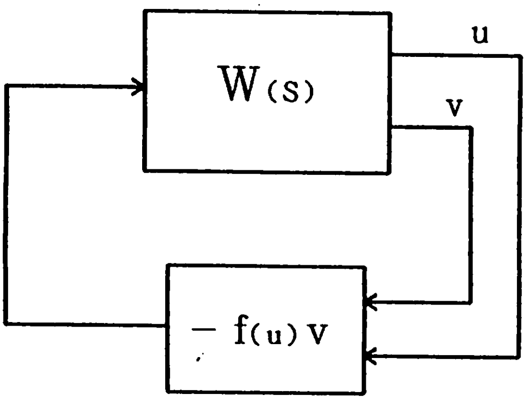

fig. 1 Product-Type Nonlinear System

$W(s)$ は(1)式のシステムの線形部分の伝達関数であり，次式で表される。

$$W(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$

3．二次形式形リアプノフ関数

ここでは，(1)式のシステムに対し，Willems[1]によって用いられた二次形式リアプノフ関数を基盤とする安定定理を示す。

【定理1】

(1)式で与えられるシステムは，もし

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - (\mathbf{d}\mathbf{b}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{d}^T)f(u) = -\,\mathbf{s}(u)\mathbf{s}^T(u) \tag{4}$$

を満足する $\mathbf{P} > 0$，$\mathbf{s}(u)$ が存在するならば，安定である。 ■

《証明》

定理1は，次の二次形式で与えられるリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{5}$$

(5)式の時間導関数を求め，(4)式によって整理すると

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{s}(u)\mathbf{s}^T(u)\mathbf{x} \tag{6}$$

となる。(6)式より $V(\mathbf{x})$ は半負定置，$V(\mathbf{x})$ は $\mathbf{P} > 0$ のもとに正定値となる。よって，リアプノフの安定定理に従い，(1)式のシステムは安定となる。

4．二次形式の拡張

定理1は状態変数の二次形式を基盤とした安定定理であるが，システムによっては(5)式の二次形式を構成する行列 $\mathbf{P}$ がうまく見つからないことがある。著者らはこの点を考慮し，非線形要素の非線形関数 $f(u)$ を考慮したアプノフ関数の構成法を提案しており[2]，ここでは，この関数を基盤とする安定定理を示す。

【定理2】

(1) 式で与えられるシステムは，もし

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \{(\mathbf{d}\mathbf{b}^T\mathbf{P} - \mathbf{r}\mathbf{c}^T\mathbf{A}) + (\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{d}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{c}\mathbf{r}^T)\}$$
$$f(u) - (\mathbf{r}\mathbf{c}^T\mathbf{b}\mathbf{d}^T + \mathbf{d}\mathbf{b}^T\mathbf{c}\mathbf{r}^T)^2 f(u) = -\,\ell(u)\ell^T(u) \tag{7}$$

を満足する $l(u)$ が存在し，かつ

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}^T\mathbf{A} &= -\,n_1\mathbf{c}^T \\ \mathbf{r}\mathbf{b}\mathbf{d}^T - m\mathbf{c}^T\mathbf{A} &= n_2\mathbf{c}^T \\ m\mathbf{c}^T\mathbf{b}\mathbf{d}^T &= n_3\mathbf{c}^T \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

を満足する定数 n_1，n_2，n_3 に対して

$$n_1 + n_2 f(u) + n_3 f^2(u) = T_0(u) \tag{8}$$

となる $T_0(u) \geqq 0$　および

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^T & m \end{bmatrix} \geqq 0 \tag{10}$$

を満足する対称行列 $\mathbf{P}$，$\mathbf{r}$，m が存在するなら安定である。ただし，(10)式の等号成立時に構成した関数は正定値になるものとする。 ■

《証明》

定理2は(5)式の二次形式に非線形関数 $f(u)$ の積分 $\gamma(u)$ を考慮した次の拡張二次形式形リアプノフ関数によって証明される。

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\,\mathbf{x}^T\ \gamma(u)]\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^T & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \gamma(u) \end{bmatrix} \tag{11}$$

(11)式の時間導関数を求め(7)，(9)式の関係を考慮すると

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\ell(u)\ell^T(u)\mathbf{x} - u\gamma(u)T_0(u) \tag{12}$$

となる。ここで $\dot{V}(\mathbf{x})$ は $f(u)$ の条件Ⅱ) および，$T_0(u) \geqq 0$ の条件下で半負定値となる。よってリアプノフの定理に従い，(1)式のシステムは安定である。

5．任意関数の導入による一般化

ここでは，(11)式のリアプノフ関数で導入した $\gamma(u)$ を，任意関数 $\phi(u)$ に置き換えることによって拡張し，(11)式のリアプノフ関数を一般化する。まず，(11)式で与えられるリアプノフ関数を次のように変形する。

$$V(x)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{r}\gamma(u)+m\int_0^u\gamma(u)f(u)du \tag{13}$$

ただし，

$$\frac{1}{2}m\gamma^2(u)=m\int_0^u\gamma(u)f(u)du$$

である。また，微分可能な任意関数 $\phi(u)$ に対して，次式で定義される $\theta(u)$ を導入する。

$$\theta(u)=\int_0^u\phi(u)\,du \tag{14}$$

(13)式の $\gamma(u)$ を(14)式で置き換えると

$$V(x)=\frac{1}{2}[\mathbf{x}^T\ \theta(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{P} & \mathbf{r}\\ \mathbf{r}^T & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \theta(u)\end{bmatrix}+m\int_0^u\theta(u)\,[f(u)-\phi(u)]\,du \tag{15}$$

となる。ここで(15)式が正定値となる条件は，$\theta(u)$ が奇関数であり，任意関数 $\phi(u)$ が $f(u)-\phi(u)\geqq 0$ を満足することとなる。

次に(15)式の時間導関数が半負定値となるための条件について検討する。定理2の(7)，(8)，(9)式を用いて(15)式の時間導関数を整理すると次式のようになる。

$$\dot{V}(x)=-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\{\iota(u)\iota^T(u)+(\mathbf{rc}^T\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\mathbf{cr}^T)[f(u)-\phi(u)]-(\mathbf{rc}^T\mathbf{bd}^T+\mathbf{db}^T\mathbf{cr}^T)[f(u)-\phi(u)]\,f(u)\}\,\mathbf{x}-u\theta(u)T_0(u) \tag{16}$$

(16)式で任意関数 $\phi(u)$ を $f(u)$ に選ぶと，結果は(12)式に一致することから(12)式が一般化されていることがわかる。ここで，(16)式が半負定値となるには $\theta(u)$ が次の条件を満足する必要がある。

$$u\theta(u)=u\int_0^u\phi(u)\,du\geqq 0\qquad(u\neq 0) \tag{17}$$

この条件下で(15)式の拡張リアプノフ関数を基盤とする安定定理を導く。

【定理3】

(1)式のシステムは，もし，(7)，(9)，(10)式から得られる $\iota(u)\iota^T(u)$，$T_0(u)\geqq 0$，$\mathbf{P}$，$\mathbf{r}$，m に加え $f(u)-\phi(u)\geqq 0$ となる任意関数 $\phi(u)$ および

$$\iota(u)\iota^T(u)+(\mathbf{rc}^T\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\mathbf{cr}^T)[f(u)-\phi(u)]-(\mathbf{rc}^T\mathbf{bd}^T+\mathbf{db}^T\mathbf{cr}^T)[f(u)-\phi(u)]\,f(u)=\mathbf{g}(u)^T\mathbf{g}(u) \tag{18}$$

を満足する $g(u)$ が存在するなら安定である。■

(18)式より，(15)式の時間導関数である(16)式を改めて整理すると次のようになる。

$$\dot{V}(x)=-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{g}(u)\mathbf{g}^T(u)\mathbf{x}-u\boldsymbol{\theta}(u)\mathbf{T}_0(u) \tag{19}$$

(19)式は $u\theta(u)\geqq 0$ および $T_0(u)\geqq 0$ のときで半負定値となり，リアプノフの定理に従い(1)式のシステムは安定となる。

6．拡張リアプノフ関数

本章では(15)式の一般化リアプノフ関数に，拡張項を任意関数を含む形で導入し，拡張リアプノフ関数を構成する。まず，(15)式の一般化リアプノフ関数に拡張項を導入した次式を考える。

$$V(x)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{r}\theta(u)+m\int_0^u\theta(u)f(u)du+2\sqrt{q}\int_0^u\sqrt{f(u)-\mu\phi(u)}\,\sqrt{u\theta(u)}\,du \tag{20}$$

そこで，(20)式がリアプノフ関数となるための条件について考察する。まず，(20)式を次式のように変形し，正定値性について検討する。

$$V(x)=\frac{1}{2}=[\mathbf{x}^T\ \theta(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{P}-\frac{q}{m}\mathbf{cc}^T & \mathbf{r}\\ \mathbf{r}^T & m\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \theta(u)\end{bmatrix}+\int_0^u\delta(u)\,du \tag{21}$$

ただし，

$$\delta(u)=\frac{q}{m}u+2\sqrt{q[f(u)-\mu\phi(u)]u\theta(u)}+m\,[f(u)-\mu\phi(u)]\,\theta(u) \tag{22}$$

(21)が正定値となるためには，(17)式の条件に加え，任意関数 $\phi(u)$ が $f(u)-\mu\phi(u)\geqq 0$ を満足する必要がある。この条件下で(22)式は次式のように変形でき，(21)式の積分項は正定値になることが保証される。

i）$u\geqq 0$ のとき

$$\left[\sqrt{\frac{q}{m}}\sqrt{u}+\sqrt{m[f(u)-\mu\phi(u)]}\,\sqrt{\theta(u)}\right]^2 \tag{23}$$

ii）u＜0のとき

$$-\left[\sqrt{\frac{q}{m}}\sqrt{-u}-\sqrt{m[f(u)-\mu\phi(u)]}\,\sqrt{-\theta(u)}\right]^2 \qquad (24)$$

なお，(21)式に導入された定数 q，μ は(15)式の第一項から拡張項と結合して正定関数を構成する項を抜き出す役割を果たしている。

次に(21)式の時間導関数を求め，(18)式の関係を用いて整理すると

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T\{&g(u)g^T(u) - 2\mathbf{A}^T\mathbf{cc}^T\mathbf{A}\,[f(u)-\mu\phi(u)]\\ &+ 4\mathbf{A}^T\mathbf{cc}^T\mathbf{bd}^T\,[f(u)-\mu\phi(u)]\,f(u)\\ &- 2\mathbf{db}^T\mathbf{cc}^T\mathbf{bd}^T\,[f(u)-\mu\phi(u)]\,f^2(u)\}\,x\\ &- u\theta(u)\,[T_0(u)-q]\\ &- \{\sqrt{f(u)-\mu\phi(u)}\,\dot{u}-\sqrt{q}\,\sqrt{u\theta(u)}\}^2\end{aligned} \qquad (25)$$

となる。そこで一般化リアプノフ関数を基盤とする次の安定定理を導く。

【定理4】

(1)式で与えられるシステムは，(17)式と $f(u)-\mu\phi(u)\geqq 0$ を満足する任意関数 $\phi(u)$ の条件下で，もし(7)，(9)，(18)式から得られる $\iota(u)\iota^T(u)$，$T_0(u)$，$g(u)g^T(u)$ の他に

$$\begin{aligned}&g(u)g^T(u) - 2\mathbf{A}^T\mathbf{cc}^T\mathbf{A}\,[f(u)-\mu\phi(u)]\\ &+ 4\mathbf{A}^T\mathbf{cc}^T\mathbf{Abd}^T\,[f(u)-\mu\phi(u)]\,f(u)\\ &- 2\mathbf{db}^T\mathbf{cc}^T\mathbf{bd}^T\,[f(u)-\mu\phi(u)]\,f^2(u) = \mathbf{h}(u)\mathbf{h}^T(u)\end{aligned} \qquad (26)$$

$$T_0(u) - q = T(u) \qquad (27)$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}-\dfrac{q}{m}\mathbf{cc}^T & \mathbf{r}\\ \mathbf{r}^T & m\mu\end{bmatrix} \geqq 0 \qquad (28)$$

を満足する $\mathbf{h}(u)$，$T(u)\geqq 0$ および $\mathbf{P}$，$\mathbf{r}$，m，μ，q が存在するならば安定である。 ■

(26)，(27)式を用いて(25)を整理すると

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x^T\mathbf{h}(u)\mathbf{h}^T(u)x - u\theta(u)T(u) - [\sqrt{f(u)-\mu\phi(u)}\,\dot{u}\,\sqrt{q}\,\sqrt{u\theta(u)}\,]^2 \qquad (29)$$

となり，半負定値となることがわかる。

(21)式のリアプノフ関数は任意関数 ϕ (u) を f (u) と選ぶことにより得られる。

7．例題システム

ここでは，(21)式の拡張リアプノフ関数を次の例題システムに適用する。

$$\ddot{x} + \varepsilon(1-x)(2+x)\dot{x} + ax = 0 \qquad (30)$$

ただし，ε，a は正の定数。

(30)式を(1)式の形式に書き改めると

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} f(u)v\\ &u = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\ &v = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\ &f(u) = \varepsilon(1-u)(2+u)\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

を得る。

定理4を適用すれば結果的に(21)式の拡張リアプノフ関数は

$$\begin{aligned}V(x) = &\frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}[x_2 + \alpha\theta(x_1)]^2\\ &+ \alpha\int_0^{x1}\theta(x_1)[f(x_1) - \alpha\phi(x_1)]\,dx_1\\ &+ 2\int_0^{x1}\sqrt{f(x_1)-\alpha\phi(x_1)]ax_1\theta(x_1)}\,dx_1\end{aligned} \qquad (32)$$

となる。また，時間導関数は

$$\dot{V}(x) = -[\sqrt{f(x_1)-\alpha\phi(x_1)}\,x_2 - \sqrt{a\alpha}\,\sqrt{x_1\theta(x_1)}\,]^2$$

となる。(32)式中の任意関数 $\phi(x_1)$ を 0 および $f(x_1)$ に選ぶとそれぞれ二次形式リアプノフ関数（エネルギー関数），文献3で提案されているリアプノフ関数を得ることができる。

8．結　言

本報告では，非線形要素が積形の関数で与えられる積形非線形フィードバックシステムを対象に、拡張リアプノフ関数の構成法を提案した。構成法は安定定理の形で与えた。提案する手法は評価できる安定領域の拡張を目指したものであり，これによって得られる拡張リアプノフ関数は，文献3の結果に任意関数を導入したものになっている。この任意関数を適当に選択すれば，これまでにない安定領域を評価できるとともに，既に提案されてきたリアプノフ関数を得ることもできる。

文　献

〔1〕 J.L.Willems, "The Conputation of Finite Stability Regions by Means of Open Liapunov Surfaces", Int. J.Control, Vol.10, No.5, pp. 537-544, 1969

〔2〕 宮城・宮城, 積形の非線形フィードバックをもつシステムのリアプノフ関数" 計自論, Vol. 25. No2, 1989

〔3〕 N.Miyagi and H.Miyagi, "Stability Studies of Product-Type Nonlinear Systems" Trans. of ASME DS. Vol. 113, 1991