

超音速流中の楔周りの流れと後退翼理論についての考察

酒 井 謙 二

第一工業大学 航空工学科 (〒899-4395 鹿児島県霧島市国分中央1-10-2)

E-mail:k-sakai@daiichi-koudai.ac.jp

The Study of the Supersonic Flow around the Wedge and the Study of the Swept Wing Theory.

Daiichi Institute of Technology
Kenji SAKAI

The supersonic flow around the wedge by using the Mach wave analysis and the Prandtl Meyer expansion analysis with the shock wave analysis has been studied. The analysis error for the two methods was studied. And swept wing theory has been studied by the additional effect of the lateral flow. The result of this new analysis with considering the lateral flow shows the good agreement with the experimental results.

Key Words: Supersonic flow around the wedge, Mach wave analysis, Prandtl Meyer expansion analysis, Shock wave analysis, New method for the Swept wing theory.

1. はじめに

超音速流にある代表的な楔周りの流れ計算を「マッハ波ベース」と、「斜めの衝撃波とプラントルマイヤーの膨張理論の組み合わせ」の両方で解析し、これら解析法による解析精度を検討する。また、航空機の巡航マッハ数を増加させるために後退角が付けられているが、その理論ベースとなる後退翼理論について、横流れを考慮することで、単純後退翼理論の限界と、実験式の意味づけを検討する。

2. 楔まわりの超音速流れについて

解析モデルとしては、下図に示す左右対称な楔を検討例として採用した。

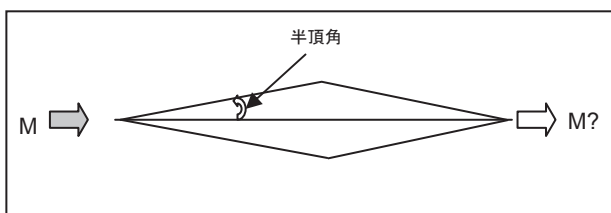


図2. 1 解析楔モデル

楔の周りの超音速流れは、最初の半頂角を流れるときに圧縮されて、マッハ数が減少し、次の角を回るときには膨張されて、マッハ数は増加する。その後、後縁で再度圧縮されてマッハ数が減少し、後縁を過ぎるときには、前方マッハ数と等しくなる。

超音速流れでは、後方の流れの影響は受けないため、解析は前から順次解くことができる。

従って、求められた後縁後方のマッハ数が楔前方のマッハ数と同じになるかどうかで、解析方法の精度を検討することができる。

2. 1 マッハ波による解析

2. 1. 1 解析方法

解析方法としては、弱い圧縮、膨張を仮定したマッハ波の発生によって、楔上で圧縮、膨張、圧縮が起こると仮定する。マッハ波について詳細は省略するが、次の図で説明される。

微小擾乱の伝播とマッハ円錐

$$\sin \mu = a/q = 1/M$$

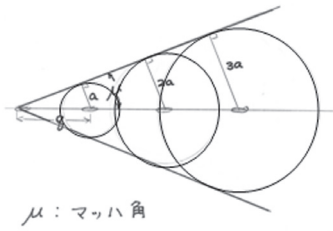


図2.2 マッハ波について

また、楔周りのマッハ数、角度の定義について下図で示す。

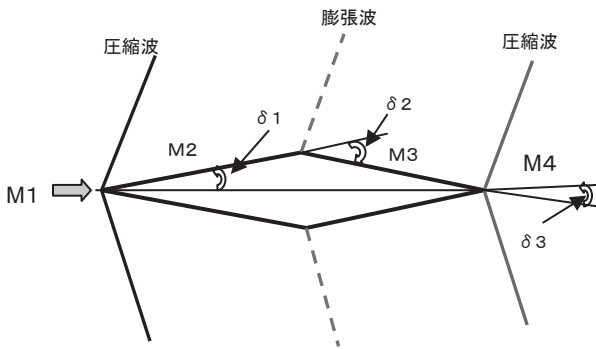


図2.3 マッハ波仮定の流れ

楔前方のマッハ数をM1とし、楔の半頂角をδ1とする。最初の圧縮波後のマッハ数をM2とし、次の膨張角をδ2とする。膨張後のマッハ数をM3とし、後縁での圧縮角度をδ3とする。後縁後方のマッハ数をM4とする。

左右対称の楔の今回の場合は、δ2 = 2δ1となり、δ3 = δ1となる。

マッハ波理論の誤差がないと、M4 = M1となる。

マッハ波の場合、角度変化δが小さいとすると、角度変化δとマッハ数変化δMとの関係は以下の式で表わされる。

$$\frac{\delta M}{M} = \pm \delta \times \frac{1+0.5(\gamma-1)M^2}{\sqrt{(M^2-1)}} \quad (1)$$

ここで+は膨張波の場合、-は圧縮波の場合を表す。またγは比熱比で空気の場合は1.4となる。

今回の場合、(1)式をベースに、M1とδ1が与えられると、圧縮後の楔上のマッハ数M2は以下の式で求められる。

$$M2 = M1 + \delta M \quad (2)$$

次に、このマッハ数M2と膨張角度δ2が与えられると、同様に、楔上のM3を求めることができ、同じように後縁後方のマッハ数M4も順次求めることができる。

2.1.2 解析結果

解析マッハ数としては、M1 = 2.0、2.5、3.0、3.5の4種類とした。また、計算した半頂角δ1は、半頂角δ1は3°、5°、7.5°、10°、12.5°の5ケースとした。

代表的な例として、楔角度δ1 = 12.5°とし、前方マッハ数を2.5、3.5とした時の解析結果を図2.4と図2.5に示す。

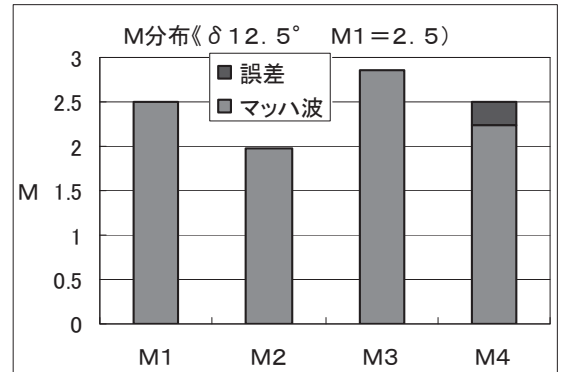


図2.4 M分布 (M1 = 2.5)

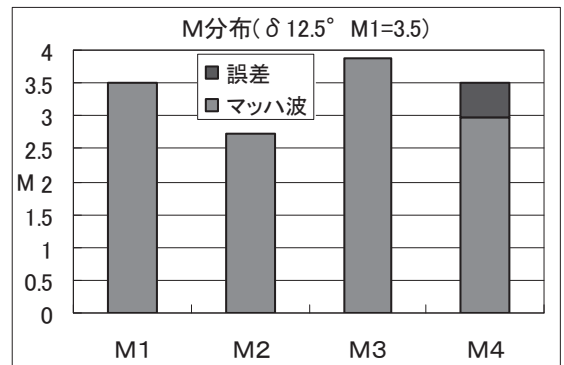


図2.5 M分布 (M1 = 3.5)

M1とM4との差が、解析誤差となる。計算した全ケースの誤差とM1との計算結果を図2.6に示す。

この図から全てのδ1で、M1に対しほぼ直線的に誤差は大きくなり、またδ1が大きくなるにつれて、誤差が大きくなっていることが分かる。

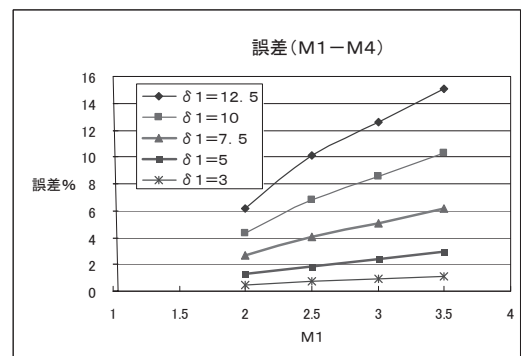


図2.6 誤差~M1 (δ1)

M1 = 2.5 のケースについて、δ1 を変えた結果を図 2.7 に示す。

誤差は δ1 のおおむね 2 乗に比例して大きくなっていることが分かる。

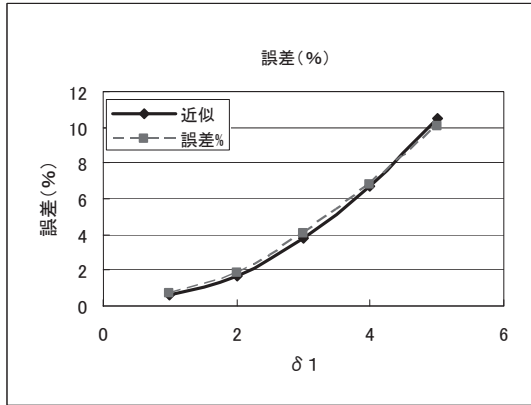


図 2.7 誤差 ~ δ1 (M1 = 2.5)

2.2 斜めの衝撃波とプラントルマイヤーの膨張との組み合わせ解析

この解析では、マッハ波一本ではなく、その集合体である斜めの衝撃波とプラントルマイヤーの膨張理論との組み合わせで、流れが変化するとして解析を行う。解析モデルを図 2.8 に示す。

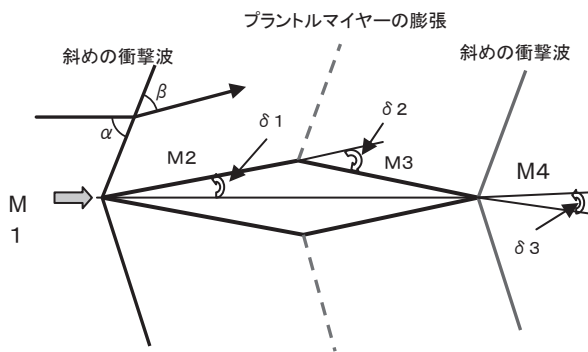


図 2.8 解析概要

2.2.1 斜めの衝撃波の解析手順

図 2.8 に示すような斜めの衝撃波を考えると前方マッハ数 M1 と衝撃波前方角 α と角度変化 δ1 との関係は以下の式で表わされる。

$$M1^2 = \frac{2(\cot \alpha + \tan \delta 1)}{2 \cot \alpha \sin^2 \alpha - \tan \delta 1 (\gamma + \cos 2 \alpha)} \quad (2)$$

この式から、δ1 が固定されると、M1 に対する斜めの衝撃波角 α を求めることができる。

δ = 12.5° の衝撃波の角度 α とマッハ数 M1 との関係を図 2.9 に示す。

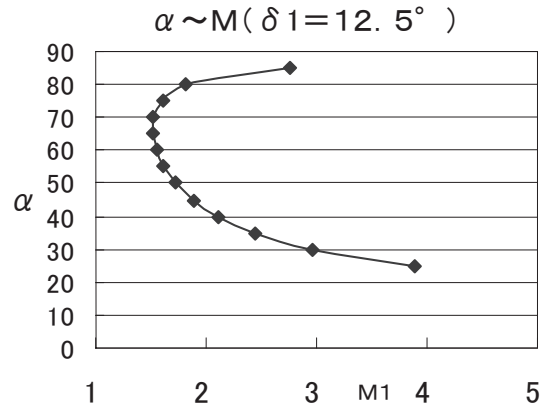


図 2.9 α ~ M (δ1)

斜めの衝撃波後のマッハ数を M2、衝撃波後方角を β とすると、M1 と α との関係は以下の式で求められる。

$$M2^2 \sin^2 \beta = \frac{(\gamma - 1)M1^2 \sin^2 \alpha + 2}{2\gamma M1^2 \sin^2 \alpha - (\gamma - 1)}$$

また、β = α - δ1 であるから、この式から、斜めの衝撃波後方の M2 を求めることができる。

2.2.2 プラントルマイヤーの膨張解析手順

詳細は省略するが、あるマッハ数 M に対応するプラントルマイヤー角度 ν と M との関係式は以下に示す式で示される。

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \sqrt{M^2 - 1} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad (4)$$

この式を計算した結果を図 2.10 に示す。

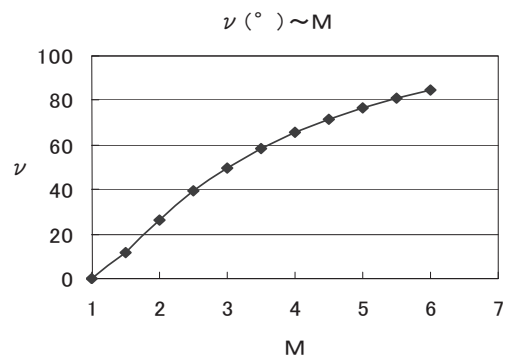


図 2.10 ν ~ M

膨張前のマッハ数 M1 と偏向角 δ が与えられると、膨張後のマッハ数 M2 との関係は

$$v (M2) = v (M1) + \delta$$

で与えられる。

すなわち、 $v (M1)$ と δ を足した値になるように、 $M2$ を求めることができる。

2. 3 解析結果の比較検討

組み合わせによる、代表的な例として、楔角度 $\delta 1 = 12.5^\circ$ 、前方マッハ数を 2.5, 3.5 とした時の解析結果の比較を図 2. 11 に示す。

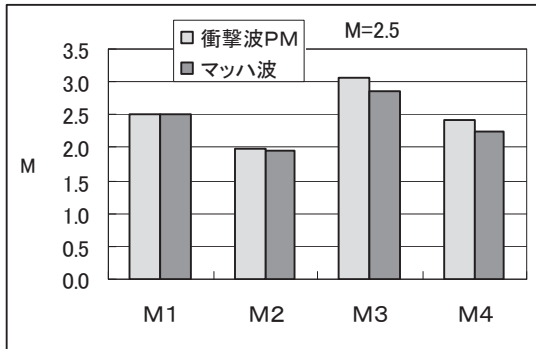


図 2. 11 M比較 (M1 = 2.5)

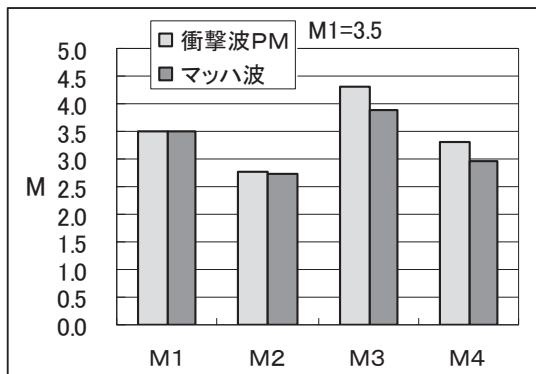


図 2. 12 M比較 (M1 = 3.5)

この図から、マッハ波解析と、衝撃波/プラントルマイヤーの膨張の組み合わせ解析との差の多くは膨張部で発生していると考えられる。

次に、楔角度 $\delta 1 = 12.5^\circ$ の場合のマッハ波解析と衝撃波/プラントルマイヤーの膨張の組み合わせ解析との誤差の比較と、各々の直線近似の比較を図 2. 13 に示す。

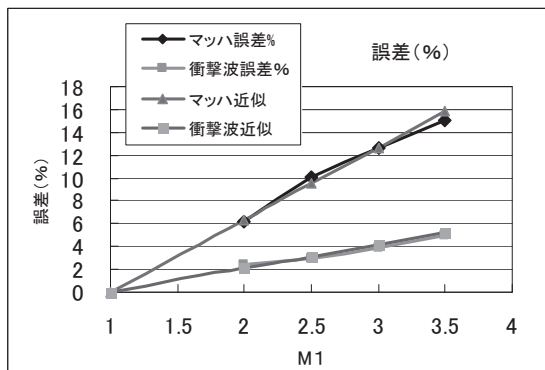


図 2. 13 誤差~M1 ($\delta = 12.5^\circ$)

この図から、組み合わせ解析にすることにより、誤差はおおむね $1/3$ に減少するが分かった。

ただし、組み合わせ解析の方も、依然と誤差は発生しており、その主原因は、この計算では粘性効果を見逃していることにあると考えられる。この効果については粘性を含むナビエ-ストークス方程式を解く必要があり、計算空気力学 (CFD) を行う必要があると考えられる。

3. 後退翼理論に対する検討

翼前方のマッハ数 M_∞ を上げていくと、翼面上で局所マッハ数が 1.0 に達する。

この時の翼前方のマッハ数 M_∞ を臨界マッハ数 (M_{cr}) と呼ぶ。通常、これ以上 M_∞ を上げると、翼面上に衝撃波が発生して、空気抵抗が増大する。

3. 1 単純後退翼理論

後退角効果概要を図 3. 1 に示す。

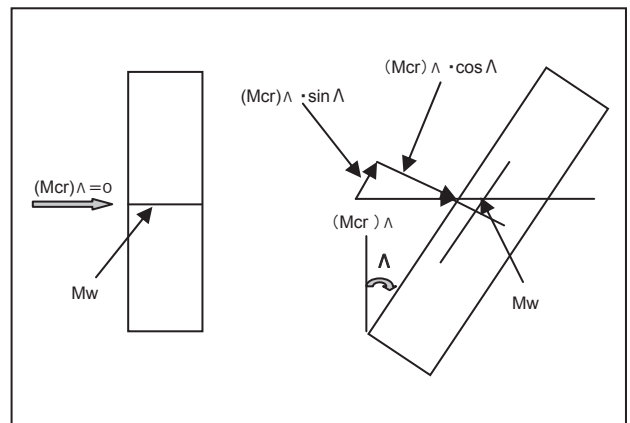


図 3. 1 後退角効果概要

単純後退翼理論とは、後退角を付けたときの臨界マッハ数を $(M_{cr})_\Lambda$ とすると、図 3. 1 のように、後退角を付けると実質 $(M_{cr})_\Lambda \times \cos \Lambda$ の流れが翼に直角に当たることとなり、後退角の無い M_{cr} を $(M_{cr})_\Lambda = 0$ とすると

$$(M_{cr})_\Lambda \times \cos \Lambda = (M_{cr})_\Lambda = 0$$

の関係式が求められる。すなわち、

$$(M_{cr})_\Lambda = (M_{cr})_\Lambda = 0 / \cos \Lambda$$

となり、後退角をつけることで、後退角ありの臨界マッハ数 $(M_{cr})_\Lambda$ は後退角の無い臨界マッハ数 $(M_{cr})_\Lambda = 0$ の $1 / \cos \Lambda$ 倍となる。これが、一般的に言われている単純後退翼理論である。しかし、実際の計測では、

$$(M_{cr})_\Lambda = (M_{cr})_\Lambda = 0 / \sqrt{\cos \Lambda}$$

となることが知られている。この差は、単純後退

翼理論では考慮されていない横流れ成分が効いていると考えられる。

3. 2 横流れ成分の考慮

後退角を付けると、マッハ数 $(Mcr)_{\Lambda}$ は翼に直角な成分 $(Mcr)_{\Lambda} \times \cos \Lambda$ と横流れ成分 $(Mcr)_{\Lambda} \times \sin \Lambda$ とに分けられる。

単純後退翼理論では、この横流れ成分 $(Mcr)_{\Lambda} \times \sin \Lambda$ を省略したといえる。

後退角の無い翼の場合の臨界マッハ数 $(Mcr)_{\Lambda=0}$ と、翼面上の局所マッハ数 (Mw) との比を K と置く。
マッハ数の増加率 K は

$$K = Mw / (Mcr)_{\Lambda=0}$$

と考えてよい。

後退角 Λ の場合、 $(Mcr)_{\Lambda} \times \cos \Lambda$ に対する増加率は同じであるため、垂直成分による翼面上の増加は

$$(Mcr)_{\Lambda} \times \cos \Lambda \times K \quad \text{となる。}$$

このマッハ数に横流れ成分の $(Mcr)_{\Lambda} \times \sin \Lambda$ を加わえたものが、翼面上のマッハ数となる。速度ベクトルの関係式から以下の式が求められる。

$$((Mcr)_{\Lambda=0} \times K)^2 = ((Mcr)_{\Lambda} \times \cos \Lambda \times K)^2 + ((Mcr)_{\Lambda} \times \sin \Lambda)^2$$

この式から

$$\frac{(Mcr)_{\Lambda}}{(Mcr)_{\Lambda=0}} = \frac{K}{\sqrt{K^2 \cos^2 \Lambda + \sin^2 \Lambda}}$$

となる。

この式で、横流れを考慮しないと、 $\sin \Lambda = 0$ となり、単純後退翼理論と一致する。

今、 $Mw = 1.0$ において、後退角 Λ を 20° 、 25° 、 30° 、 35° と変え、

$(Mcr)_{\Lambda=0}$ をパラメータとして、

$(Mcr)_{\Lambda=0}$ を 0.6 、 0.7 、 0.8 として計算した結果を図 3. 2 に示す。

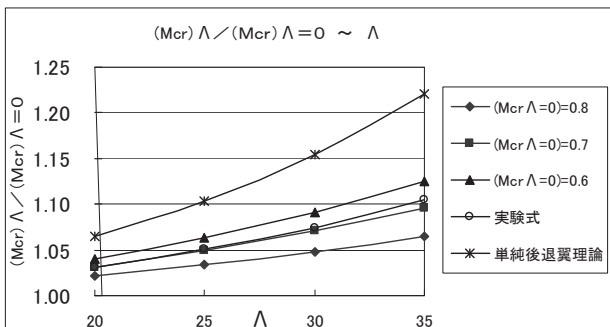


図 3. 2 $(Mcr)_{\Lambda} / (Mcr)_{\Lambda=0} \sim \Lambda$
($Mw = 1.0$)

この結果から、実験結果は $(Mcr)_{\Lambda=0}$ を 0.7 とし、 $Mw = 1$ とした時と良い一致を示す。

このことから、実験式は $(Mcr)_{\Lambda=0}$ を 0.7 として得られたデータを基本としていることが予想される。

また、最近のスパークリティカル翼型の採用などにより、翼面上の局所マッハ数が 1 を超えても、大きな衝撃波が発生しないということを考慮して、 $Mw = 1.1$ にしたときの解析結果を図 3. 3 に示す。

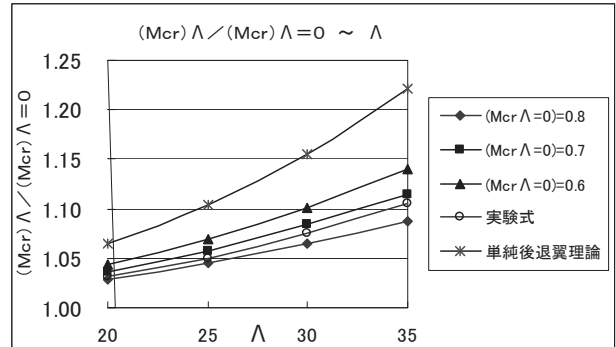


図 3. 3 $(Mcr)_{\Lambda} / (Mcr)_{\Lambda=0} \sim \Lambda$
($Mw = 1.1$)

この結果からは、実験式が概ね $(Mcr)_{\Lambda=0}$ を 0.75 と求められたものと考えられる。

B727、B737、B747、B757 などの旅客機の後退角の平均値はおおよそ 28° 程度であり、その後退角に対して、今回の結果を使って、検討された臨界マッハ数 $(Mcr)_{\Lambda}$ を推算すると、 $(Mcr)_{\Lambda=0}$ が 0.7 の場合は、

$(Mcr)_{\Lambda}$ が 0.75 となり、 $(Mcr)_{\Lambda=0}$ が 0.75 の場合は、 $(Mcr)_{\Lambda}$ が 0.80 となる。これは多くの旅客機が検討すると考えられる巡航マッハ数にほぼ近くなる。

4. まとめ

授業で教えている高速空気力学について、日頃、確認したい以下の 2 つの事項について検討をおこなった。

- ① 超音速流中の楔周りの流れ解析
- ② 後退翼理論

その結果、理論の限界や、理論と実験式との差を明らかにすることができた。

5. 参考文献

- (1) 流体力学序論：内田茂男（森北出版）
- (2) 高速流体力学：永田雅人（森北出版）