第一工業大学研究報告
第27号(2015)pp.101－111

ビジュアルな数学をめざして

中　野　明　徳

第一工業大学　共通教育センター（〒899-4395　鹿児島県霧島市国分中央 1-10-２）
E-mail：jyjtw954@ybb.ne.jp

Approaches to improving visual mathematics

Akinori　Nakano

When we teach mathematics, we sometimes use diagrams or figures to deepen the understanding of students.　Though many examples of these have been known, some objects haven't yet.　I'd like to suggest some new visual explanations for such objects.

Keywords：rational understanding,　mechanical learning,　visual understanding,　visualization of expantion formuler, differentiation, circular functions , logarithmic function

１．はじめに

本学の宇宙航空工学科では，中・高等学校の数学科教員資格を取得できることになっている。そこで，数学教育のめざすべき方向について，といっても，数学教育のテーマは広範囲に及ぶことから，実際の授業の場面で，どのような切り口で，教材を取り扱うべきかという視点から，一つの提案をしてみたい。

そもそも数学がわかるとはどういう状態なのか。納得して，ストンと頭の中に収まり，その概念や考え方が自分ものになるのは，どんな状態なのか。認知心理学の分野とは思いつつ，経験的に，次の３点から考えてみることにする。

①　論理的理解,
②　形式的理解
③　ビジュアル的理解

授業では，⑴ 定理・公式の証明，⑵ 問題練習
その後，ドリルで「形式的理解」の定着をはかるという流れで進むことが多い。限られた時間の中では,「効率性」が教師の工夫の中心になってくる。「論理性」を前面に出し，証明されたことは，生徒も納得してくれたものと考え，次のステップに進む。生徒の側に立てば，しっくりこない場面でも，とりあえず，形式的に納得させ，それらを応用した問題練習を進める中で理解が深まることをめざすことになる。

このような，①論理的理解，②形式的習熟，③ドリル，という進め方では，もやもやした感じを引きずっている生徒たちも多いように思う。

一方，数学では概念を実感的に掴む方法・理解を深める道具として，シェーマ図（スキーム図）のようなビジュアルな表現も利用する。デカルトは座標平面を導入することによって，幾何学と代数学を結びつけ，ガウスの導入した複素平面によって，複素数は市民権を得たともいえよう。ベン図は，集合を身近なものとし，数学に限らない広い分野で使われるようになった。

数学教育においても，教材の視覚化は多く取り入れられており，理解を深めるために，活用されているところである。本論では，このようなビジュアル化という視点で理解を深める試みを示し，考案したいくつかの具体例を紹介したい。授業に臨んで，「論理的理解」「形式的理解」「ビジュアル的理解」を１セットとして，提供できれば，生徒の理解が，より実感的なものになるのではないかと考える。

２．　論理的・形式的・ビジアル的理解とは

３つの理解の意味について具体例で説明する。

例　２点$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$に対し，ABを３：２に内分する点Cの位置ベクトル$\vec{c}$について，３つの視点からの説明を示す。

① 論理的理解

AC：CB＝３：２　から，

$$2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{CB}$$

$$2(\vec{c}-\vec{a})=3(\vec{b}-\vec{c})$$

$$\therefore\quad \vec{c}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$

② 形式的(機械的)理解

公式の覚え方として，比の外項の積と内項の積のイメージにからめて，形式的に導く。

$$\vec{c}=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{3+2}$$

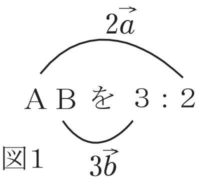


図1

③　ビジュアル的理解

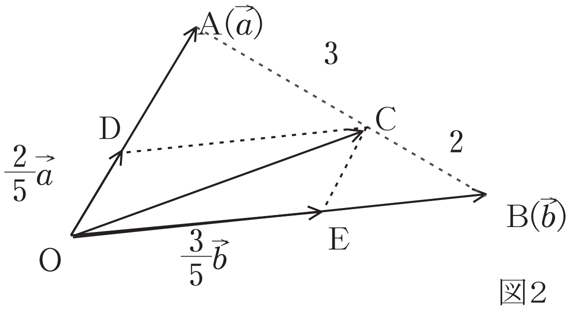


図2

OA，OB上に点D，EをCD//OB，CE//OAとなるようにとると，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{5}\vec{b},\ \overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\vec{a}$$

$$\therefore\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{a}$$

実際の授業では，①のような論理的説明をした後，②の形で公式を使う練習問題に取り組ませるが，③のような解釈に触れることは少ないように思う。③のような形で，平行四辺形OECDが見えるようになると，ベクトルに対する理解も深まり，応用力も養われるのではないかと考える。

教材のビジュアル化は，かなり工夫されてきているが，多くの分野で開発の余地があるように思う。そのような中から，これまでに考案したものをいくつか紹介してみたい。

３．　式の展開公式のビジュアル化

＜　積は面積や体積のイメージで　＞

三省堂の教科書で初めてお目にかかって，ビジュアル化へのきっかけを与えてくれたものである。①は中学校で利用されているようである。②以降は，これを発展させてみたものである。

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

教科書では，$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$として，分配法則を用いて証明することになっている。

② $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

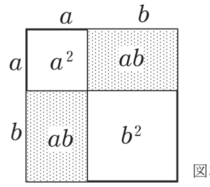


図3

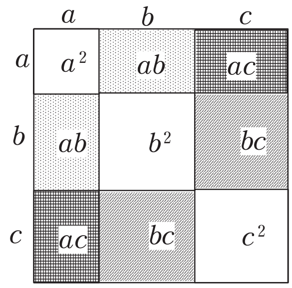


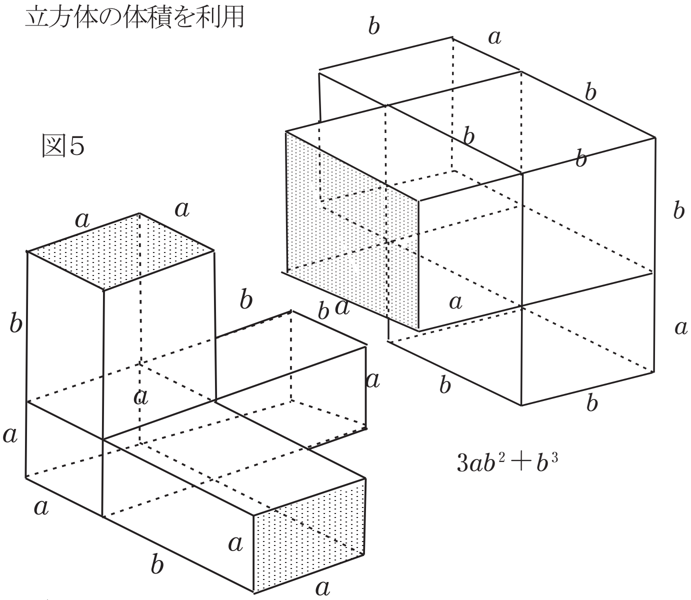
図4

$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2$　として，①を利用した展開で，少し長い計算をさせられた後，結果を公式として覚えることを求められる。図４が思い浮かぶような説明もぜひ加えたい。

③　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

立方体の体積を利用

図5



a^3+3a^2b

④　$(a+b+c)^3$については，一辺が$a+b+c$の立方体を縦横高さの３方向からa，b，cの長さで，３つに切り分けた立体図形で示すことができる。

⑤　一般的な式の展開

$(2x+3)(x^3+3x^2+2x+5)$

	x^3	$3x^2$	$2x$	5
$2x$	$2x^4$	$6x^3$	$4x^2$	$10x$
3	$3x^3$	$9x^2$	$6x$	15
$2x^4$	$9x^3$	$13x^2$	$16x$	15

＜　同類項を斜めにまとめる。　＞　図６

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

	a^2	b^2	c^2	$-ab$	$-bc$	$-ca$
a	a^3	ab^2	ac^2	$-a^2b$	$-abc$	$-a^2c$
b	a^2b	b^3	bc^2	$-ab^2$	$-b^2c$	$-abc$
c	a^2c	b^2c	c^3	$-abc$	$-bc^2$	$-ac^2$

図７　互いに相殺される項があって，

$a^3+b^3+c^3-3abc$　が得られる。

４．減法についての見方

引き算は，$b-a$ をb からa を取った残りの数・・・(イ) という見方と，a を起点にしてb を見る・・・(ロ) という見方がある。ベクトルの減法を扱う際，$\vec{b}-\vec{a}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を揃えたとき，$\vec{a}$ の終点から $\vec{b}$ の終点を見るベクトルという見方である。これは，あたかも，180−160 は身長 160ｃｍの人が身長 180ｃｍの人を見上げて，自分より 20ｃｍ高いというようなものである。

５．関数とグラフ

減法の見方（ロ)は，式の図形的な意味を座標平面で考えるときの基本である。

５．１　１次関数　$y=m(x-a)+b$ ・・・①

式①は，図８のように，BP＝m AB が見えて，点（２，３）を通る傾き３の直線は，即 $y-3=3(x-2)$ として欲しいのだが，生徒は $y=3x+k$ に点を代入して，k を定めることが多い。

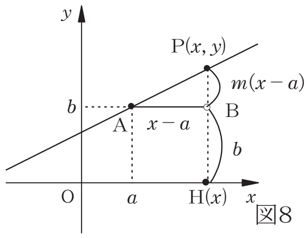


図8

平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ も，点 $(a, f(a))$ から，点$(b, f(b))$ を見た傾きと見て欲しい。

５．２　２次関数　$y=a(x-p)^2+q$

頂点が(p , q)ということは形式的に覚えているが，BP＝aAB^2 のような見方が，なかなかできない。

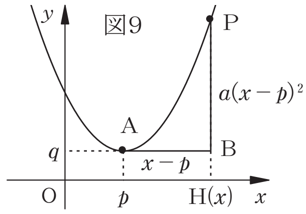


図9

５．３　２次方程式の解の公式

$ax^2+bx+c=0$ の解

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}\quad (\text{ただし，}D=b^2-4ac)$$

は，図 10 のような見方にもふれたい。

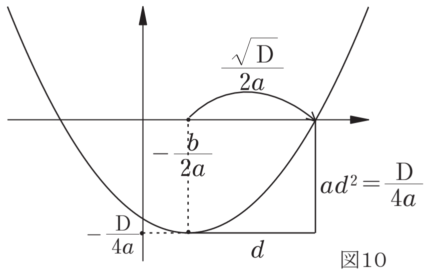


図10

５．３　グラフの 平行移動は起点を移すこと

高校では，$y-q=f(x-p)$ は，$y=f(x)$ を平行移動したものという見方を形式的に身につけるが，原点から見た $y-0=f(x-0)$ の形を(p, q) を基点にしてかいたものという見方もできるようにしたい。たとえば，図⑨は，$f(x)=ax^2$ について，$y-q=f(x-p)$ を示しており，AB＝$x-p$，BP＝$f(x-p)$ となっている。

６．微分のビジュアル化

「微分」という用語は，「導関数」「微分係数」，「微分商」，あるいは，動詞として，「導関数を求める」という意味で使われるなど，多様な使われ方をしている。

数学Ⅰしかやってない学生に，コンパクトに教えるにはどうするか。正攻法でいくとすれば、極限の話の後，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

を扱うことになるが，それなりの時間が必要となる。

そこで，この部分を省いて，説明を簡略化するために，「微小な増分」「限りなく０になっていく量」としての「微分」dy, dx を利用することを考えてみたい。Δx，Δy や $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}$ を使わずに，いきなり，dx，dy から始めるのである。

６．１　　$(x^2)' = 2x$ のビジュアル的導出

１辺が x の正方形の面積 y は $y = x^2$ であるから，x の微小な増分 dx に対する面積 y の微小な増分は

$dy = 2xdx + (dx)^2$　　（図の網掛け部分）

この両辺を dx で割って

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{となる。}$$

（　$dx \rightarrow$ ０のとき）

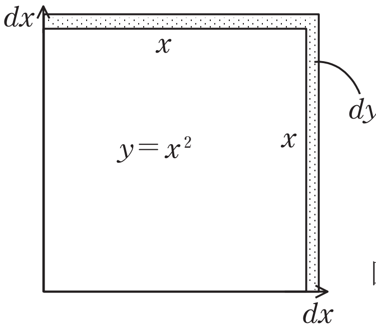


図11

辺 x が微増するとき，面積は $2x$ 増加するという感覚である。

６．２　　$(x^3)' = 3x^2$　のビジュアル的導出

$y = x^3$ を１辺が x の立方体の体積 y を表す関数と考えると，x の微小な増分 dx に対して，体積は３方向に増加するから，体積 y の微小な増分 dy は図の３つの正方形の板状の部分に角（かど）の部分を合わせて

$dy = 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$

両辺を dx で割って

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3xdx + (dx)^2$$

$dx \rightarrow$ ０のとき，後方の２項を無視して

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

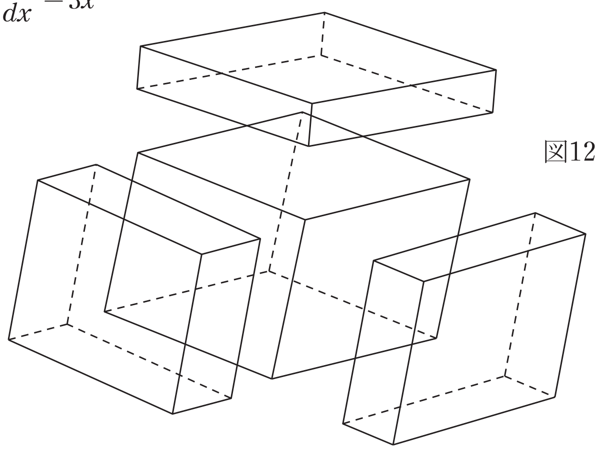


図12

端的に言えば，正方形では，x は縦・横２方向に増加するから，面積も２方向に合わせて $2x$ 増加し，立方体では，x が３方向に増加するから，体積も３方向に合わせて $3x^2$ 増加する。

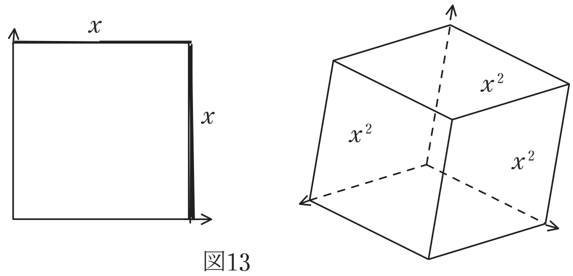


図13

６．３　円の半径と面積 $S = \pi r^2$ との関係

円の半径 r の微小な増分に対しては，円周の部分が増加すると考えて，$ds = 2\pi r\,dr$

すなわち，$\dfrac{ds}{dr} = 2\pi r$

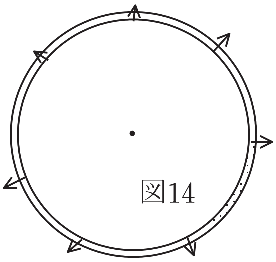


図14

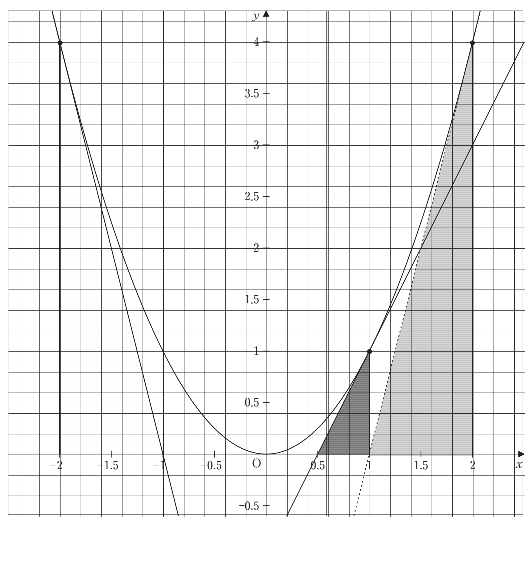
６．４　　球の半径と体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ の関係

半径の変化に対して，体積の変化は表面積の部分

$\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$（球の表面積）

６．５　　「微分＝接線の傾き」を実感させる

下図のようなグラフの目盛を利用していくつかの点における接線の傾きを，実際に，いくつか求めさせ，$(x^2)'$ の値と一致することを実感させる。



さらに，下図のように，グラフにおける図形的な意味づけをすることができる。

$y=x^2$ については，$y'=2x=\dfrac{2x^2}{x}=\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{PR}}$，

$\mathrm{PR}=x$，$\mathrm{RQ}=2x^2$，

$\mathrm{TH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}$

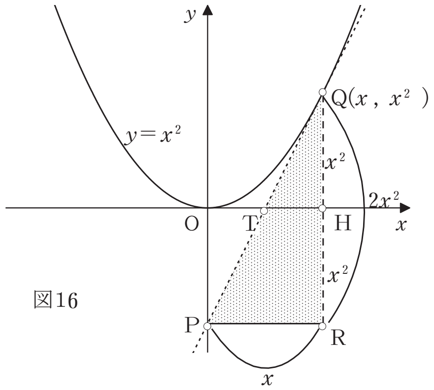


図16

$y=x^3$ については，$y'=3x^2=\dfrac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{TH}}=\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{PR}}$

$\mathrm{PR}=x$ から，$\mathrm{RQ}=3x^3$，

$\mathrm{TH}=\dfrac{1}{3}x$，

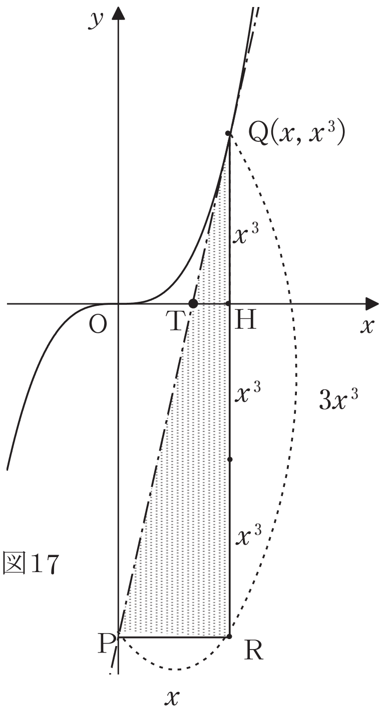


図17

一般に，$x^{\alpha-1}$ は $x^\alpha\div x$ でもあるから，

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}=\alpha\dfrac{x^\alpha}{x}$　（α ：実数）

たとえば，$(x^3\sqrt[5]{x^3})'$

$=(3+\dfrac{3}{5})\dfrac{x^3\sqrt[5]{x^3}}{x}=\dfrac{18}{5}x^2\sqrt[5]{x^3}$

例　無理関数について

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

$=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

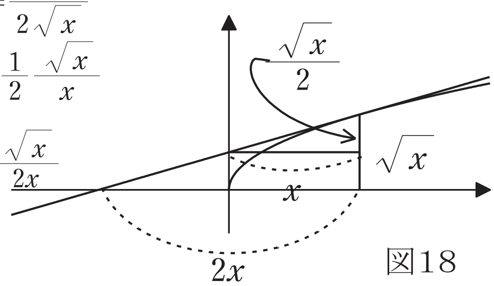


図18

結局，x の累乗の形の関数 $f(x)=x^\alpha$ については

$\alpha\dfrac{x^\alpha}{x}$	微分 $\longleftarrow$	x^α	積分 $\longrightarrow$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^\alpha\cdot x$
微分は x で割って α 倍			積分は x を掛けて $\dfrac{1}{\alpha+1}$ 倍	

６．７　積・商の微分の公式

$u=f(x)$，$v=g(x)$　のとき，

縦 u，横 v の長方形の面積を z とすると，$z=uv$ であるから，z の微分(微小な増分)を角（かど）の微小部分は無視して，網掛け部分と考えると，　$z'=u'v+uv'$

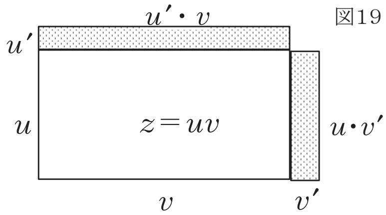


図19

（z', u', v' は dz, du, dv とし，$du=f'(x)dx$，$dv=g'(x)\,dx$ とするところを簡略化）

商の微分は，面積１の長方形の横を $v=g(x)$

とすると，縦は $u=\dfrac{1}{v}$ ………①

v が増加すると u は減少するから，二つの網掛け部分の和を０と見て，

$u'v+uv'=0$ から

$u'=-u\dfrac{v'}{v}=-\dfrac{1}{v}\dfrac{v'}{v}=-\dfrac{v'}{v^2}$　　(by ①)

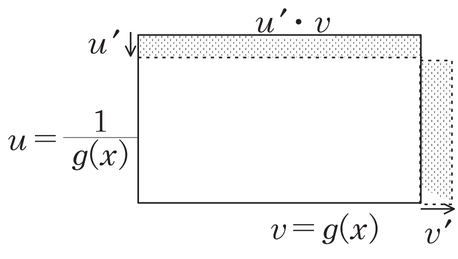


図20

6．7　合成関数の微分

$y=3u+1$ ・・・①　$u=\dfrac{2x+3}{5}$ ・・・②

の合成関数は

$y=3(\dfrac{2x+3}{5})+1=\dfrac{6}{5}x+\dfrac{14}{5}$ ・・・・③

①から，$\dfrac{dy}{du}=3$，②から$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{5}$

一方，③から$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6}{5}=3\times\dfrac{2}{5}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ に気付かせてから，

一般に，$y=f(u)$，$u=g(x)$　が微分可能のとき

$dy=f'(u)\,du$，$du=g'(x)dx$　は

下の図のようなイメージを利用して，

$dy=f'(u)\,g'(x)\,dx=f'(g(x))g'(x)\,dx$

すなわち，$\dfrac{dy}{dx}=f'(g(x))\,g'(x)$

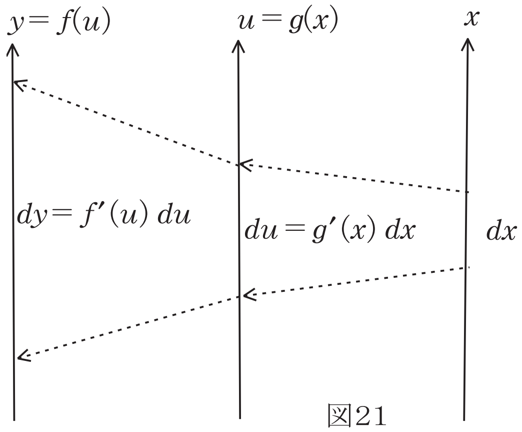


図21

２つの関数の合成関数　$y=f(g(x))$ の導関数は

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$

とまとめ，

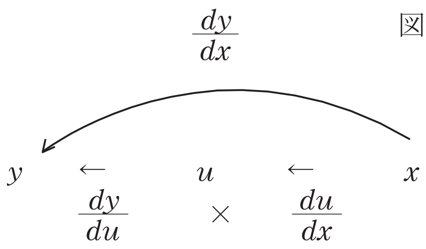


図22

このような図で，納得させる。

6．8　逆関数の微分

$y=\dfrac{2}{3}x+1$ のとき，$x=\dfrac{3}{2}(y-1)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{3}{2}$ から，$\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=1$

すなわち，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

このことをグラフで解釈すると

$y=f(x)$ 上の点（x, y）において，

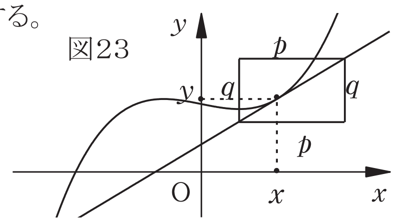
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{q}{p}$（$x$ から見た接線の傾き）

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{p}{q}$（$y$ から見た接線の傾き）

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・①

ということを意味する。

図23



例　$(\sqrt{x})'$ について

$y \quad \underset{y^2=x}{\overset{y=\sqrt{x}}{\rightleftarrows}} \quad x$

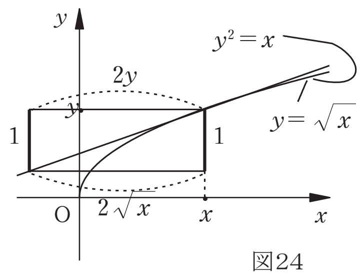


図24

$(\sqrt{x})'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{(y^2)'}=\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

逆関数については，

$f(f^{-1}(x))=x$ ・・・②

が成り立つ。(「往復キップの法則」)

この両辺を微分することにより，逆関数の微分は合成関数の微分で処理できて，①を用いなくても逆関数の微分が求められる。

例　$(\sqrt{x})'$ を求める。

$(\sqrt{x})^2=x$　の両辺を微分して

$2(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=1$

$\therefore\ (\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2(\sqrt{x})}$

7．　三角関数（円関数）

7．1　　弧度法

教科書では，半径と弧の長さの比で中心角を表すという取り扱いになり，その後，度数法と弧度法の換算公式という流れになる。ここは，単位円を用いて，度数法とは独立に導入したい。

分度器がないとき，回転量としての角の大きさを測るにはどうするかという設定で，単位円に紐を巻きつけてその紐の長さで角を測るという発想に気付かせるのである。一周したときの円周の長さ２π，半周はπ，半周を４等分すると$\frac{\pi}{4}$，６等分すると$\frac{\pi}{6}$きざみといった具合である。

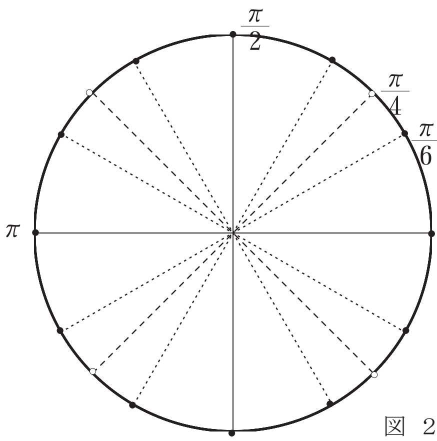


図 25

7．2　　三角関数の値

図 25 の角を表す円周上の点は下図の基本三角形を利用して，単位円と直線 $x=\pm\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{1}{2}$ $y=\pm x$ との交点になっていることがわかる。

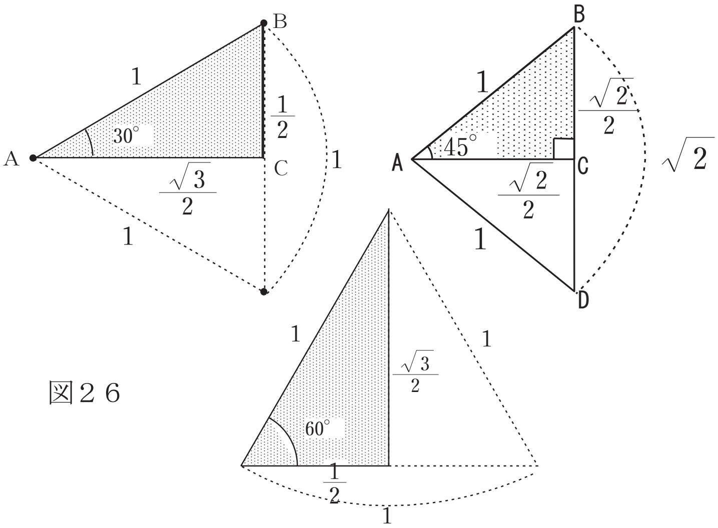


図２６

まとめると，$0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ に対する正弦の値は，$0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}=1$ と$\frac{\sqrt{k}}{2}$ のリズムになっていて，直線 $x=\pm\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{1}{2}$ ，$y=\pm x$ と単位円との交点にこれらの角があらわれる。

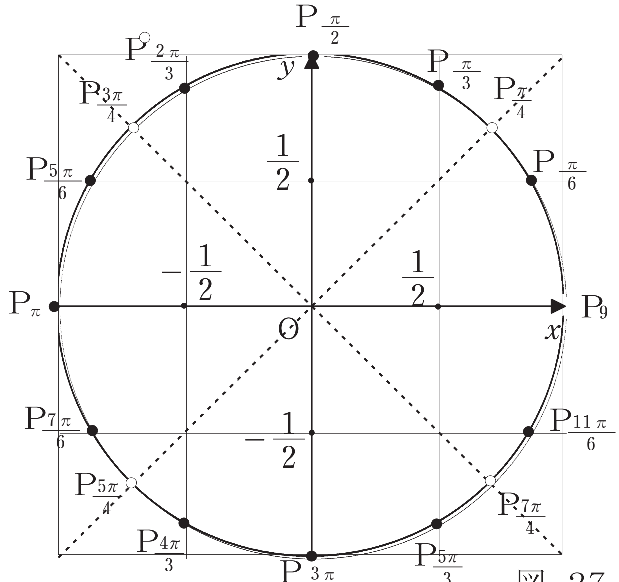


図 27

$\tan\theta$ については下図のようになる。

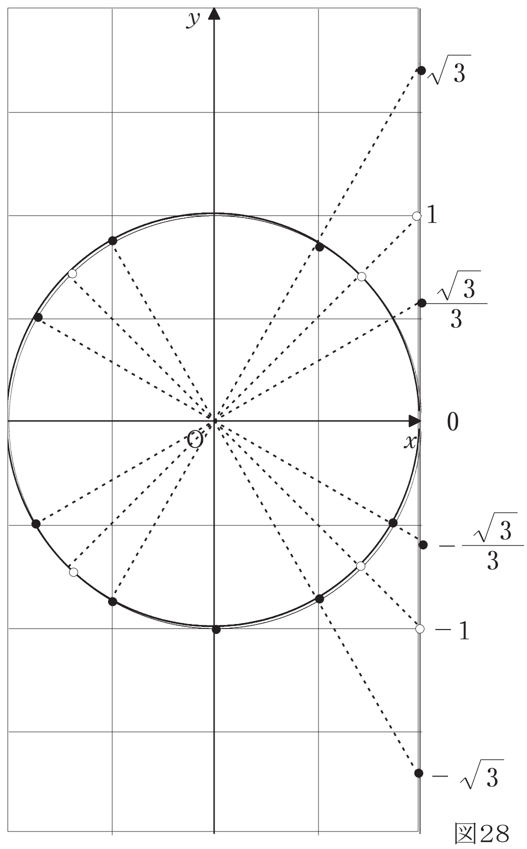


図28

三角関数が円関数とも言われる所以である。

対応表を丸暗記させる指導法もあるが，この単位円がかけるようにしておけば，よく出てくる三角関数の値は全て示すことができる。

８．三角関数の微分のビジュアル的導出

８.１　$y=\sin\theta$，$x=\cos\theta$　の微分

角 θ の微小な増分 $d\theta$ に対する y の増分を dy とする。左図の単位円で，$\sin(\theta+d\theta)=$ＱＴであるから，$dy=$ＱＴ－ＰＨ＝ＲＱ，また，中心角 $d\theta$ は弧の長さ $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ であるから，$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=d\theta$ である。

$d\theta$ が十分小さいとき，(右図)，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ が接線PQに近づき，ＰＱ⊥ＯＰとなるから∠ＰＱＴ＝θ とみなすと，

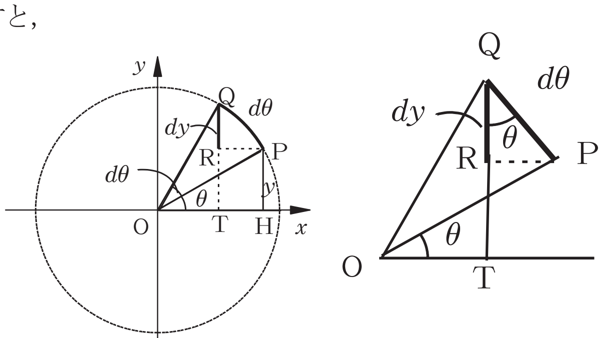


図29

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{\mathrm{QR}}{\text{弧PQ}}=\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}}=\cos\theta$$

$x=\cos\theta$　$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ について

$$dx=\cos(\theta+d\theta)-\cos\theta$$
$$=\text{ＯＴ－ＯＨ}$$
$$=\text{－ＰＲ}$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{-\mathrm{PR}}{\mathrm{QP}}=-\sin\theta$$

$\sin x$ や $\cos x$ は微分すると，グラフが x 軸方向に，$-\frac{\pi}{2}$ 平行移動し，積分は逆に右に平行移動する。

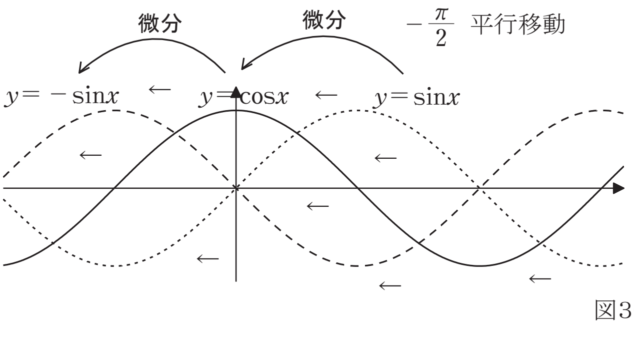


図30

８.２　$y=\tan\theta$ の微分　$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

θ が $\theta+d\theta$ まで増加するとき，図31で $d\theta$ は弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$

y の増分は，$dy=\tan(\theta+d\theta)-\tan\theta=\mathrm{RT}-\mathrm{RS}$

この部分を拡大した図で，Ｂから x 軸に下ろした垂線をＢＨとする。

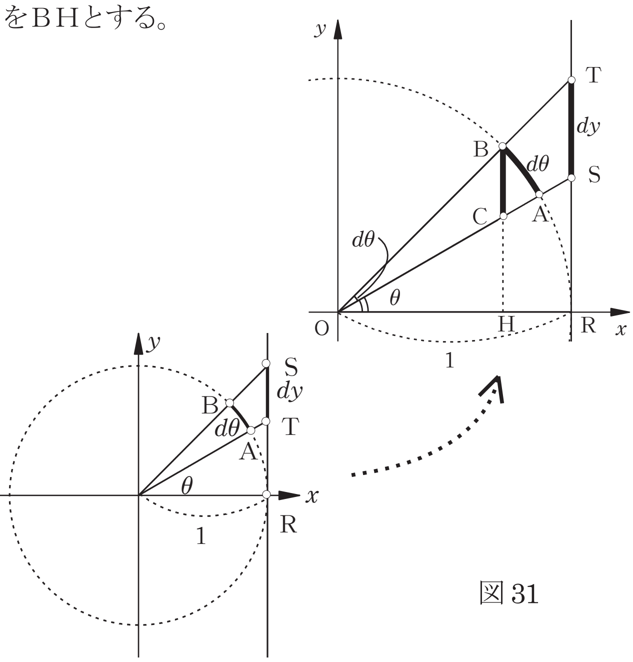


図31

$$\frac{dy}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\cos(\theta+d\theta)}\text{ から}$$

$$dy=\frac{1}{\cos(\theta+d\theta)}\mathrm{BC}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

$d\theta$ が十分０に近いとき，ＢＡ⊥ＡＣ，∠ＡＢＣ＝θ

とみなして　$\frac{d\theta}{\mathrm{BC}}=\cos\theta$ から $\mathrm{BC}=\frac{d\theta}{\cos\theta}$　・・・②

①②から $dy=\dfrac{d\theta}{\cos(\theta+d\theta)\cos\theta}$

$$\therefore\quad\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{\cos(\theta+d\theta)\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

（　$d\theta\ \to\ 0$　のとき　）

これで何とかビジュアルに説明できた。

なお，$(\tan x)'$ の論理的導出は，

$\tan x\cos x=\sin x$ の両辺を微分して

$(\tan x)'\cos x+\tan x(-\sin x)=\cos x$

両辺を $\cos x$ で割って

$(\tan x)'-\tan x\tan x=1$

$(\tan x)'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

とする方法もある。

9．逆三角関数

逆関数の一般的な話から入るのではなく，単位円を利用してビジュアルに導入する。

9．1　$\sin^{-1}x$ の定義

単位円において，$\sin\theta$ は中心角 θ に対する，垂線ＰＨの長さを表す。

このはたらきを逆にして，PH の長さ x から中心角 θ を求める関数を $\sin^{-1}x$ または $\arcsin x$ と定め，アークサインとよむ。右図で，$\sin^{-1}x=\theta$

$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

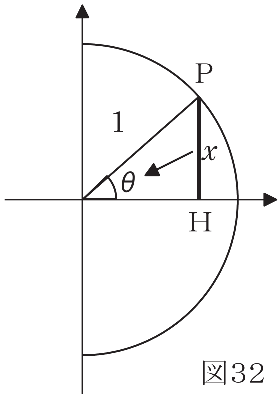


図32

9．2　$\cos^{-1}x$ の定義

$\cos\theta$ のはたらきを逆にして，ＯＰの x 軸への正射影 OH の長さ x から中心角 θ を求める関数を $\cos^{-1}x$ または $\arccos x$ と表し，アークコサインとよむ。

下図で，$\cos^{-1}x=\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

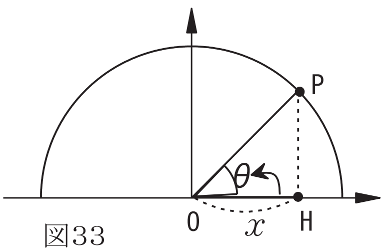


図33

9．3　$\tan^{-1}x$ の定義

$\tan\theta$ のはたらきを逆にして，扇形$\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ のＡにおける接線ＡＴの長さ x から中心角 θ を求める関数を $\tan^{-1}x$ または $\arctan x$ と表し，アークタンゼントとよむ。

$\tan^{-1}x=\theta$　$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

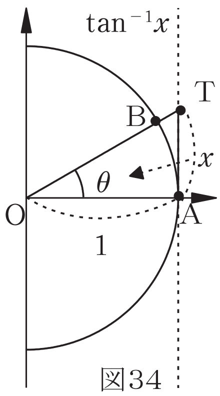


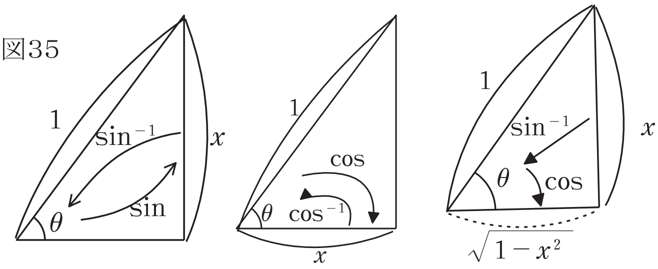
図34

弧度法の角 θ は，この扇形の弧（arc）の長さでもあるから，*arcsin* には，sin の値が x になるような扇形の弧の長さという意味もある。このようにアークの語の説明もできる。

$\sin^{-1}a$ を求める場合，$\sin^{-1}a=\theta$ から $\sin\theta=a$ を導き，この三角方程式を解くことになるが，ビジュアルな定義では，図 27，図 28 から求められる。

さらに，次のようなことについても一目瞭前である。

図35



$sin(sin^{-1}x)$　$cos(cos^{-1}x)$　$cos(sin^{-1}x)$

$=x$　$=x$　$=\sqrt{1-x^2}$

<往復キップの法則>　<乗換キップ>

図 36 の直角三角形において，

角 α について，

$x=\sin\alpha$　から $\sin^{-1}x=\alpha$

角 β について

$x=\cos\beta$　から　$\cos^{-1}x=\beta$

$\therefore\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

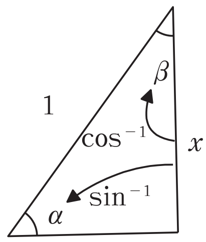


図36

9．4　逆三角関数の微分

$(\sin^{-1}x)'$ について

$\sin^{-1}x=\theta\iff x=\sin\theta$

であることから

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1}{(\sin\theta)'}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

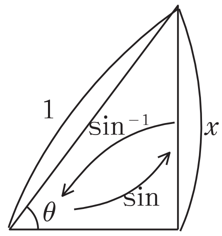
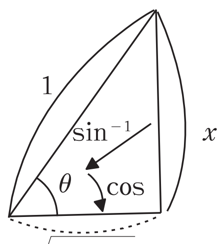


図37



あるいは，

往復キップの法則から

$\sin(\sin^{-1}x)=x$

両辺を微分すると

$\cos(\sin^{-1}x)\,(\sin^{-1}x)'=1$

$\sin^{-1}$　線で θ 駅に着いた後
cos　線に乗り換えて
着いたところが $\sqrt{1-x^2}$

$\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$

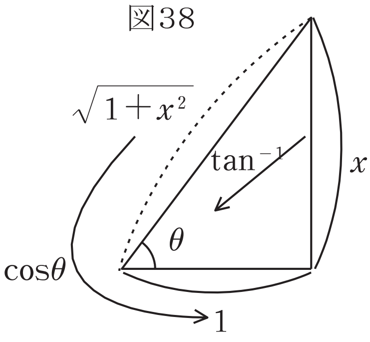
$$\therefore\ (\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(\tan^{-1}x)'$ について

$\theta=\tan^{-1}x\iff\tan\theta=x$　から

$$(\tan^{-1}x)'$$
$$=\frac{d\theta}{dx}$$
$$=\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$$
$$=\frac{1}{(\tan\theta)'}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$
$$=\cos^2\theta$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{1+x^2}$$

図38



$$\cos(\tan^{-1}x)$$
$$=\cos\theta$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

往復キップの法則では

$$\tan(\tan^{-1}x)=x$$

この両辺を微分して

$$\frac{1}{\cos^2(\tan^{-1}x)}(\tan^{-1}x)'=1$$

$$\therefore\ (\tan^{-1}x)'$$
$$=\cos^2(\tan^{-1}x)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{1+x^2}$$

逆関数の微分（裏技）
往復キップの法則
$f(f^{-1}(x))=x$
の両辺を微分する

１０．　対数関数のビジュアル表現

対数関数の導入は，指数関数の逆関数として

$a^x=\mathrm{N} \quad \Leftrightarrow \quad x=\log_a\mathrm{N}$ ・・・・①

のような形式的な理解からなされることが多い。

そして，$2^3=8$　であるから，$\log_2 8=3$

などのように，①の言い換えを定着させることが中心になる。この方法では，形式的な理解は定着しても，対数の概念への理解は進まないように思う。エヴァリスト・ガロアがエコール・ポリテクニーク受験の口頭試問で対数関数について「等比数列を等差数列に変換する関数」と答えたことを試験官は理解できなかったという伝説もある。

指数関数とは独立に，たとえば，対数$\log_2 x$を２から見て何乗にあたるかを考えさせることを試みた。すなわち，次のような図で，イメージ化しながら，$\log_a\mathrm{N}$を「Nはaの何乗か」という問いかけとして印象付ける方法である。

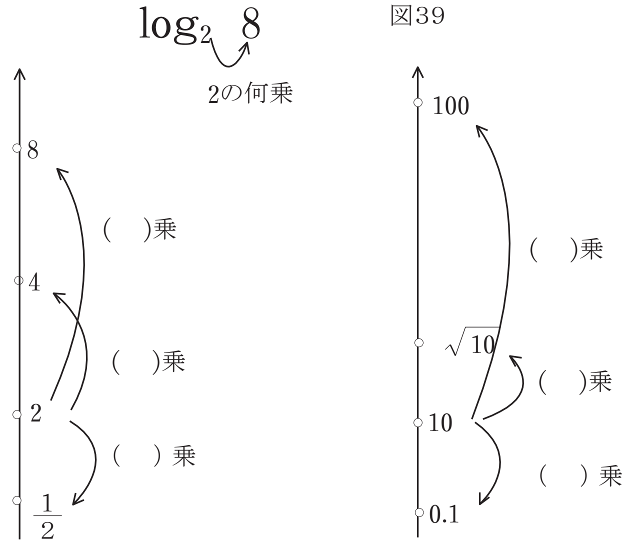


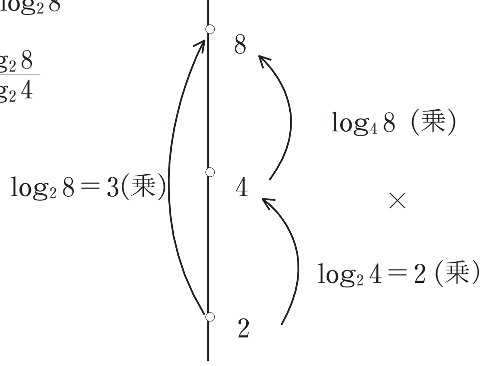
図39

底の変換公式は図 40 で

$\log_2 4\times\log_4 8=\log_2 8$

から$\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$

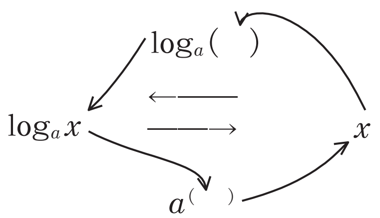
図40



あるいは，形式的なやり方で導入し，ある程度慣れてきたところで，このようなイメージ的な表現で理解を深めることもできる。

さらに，指数関数の逆関数として，$f(x)=a^x$ に対して，$f^{-1}(x)=\log_a x$ とするとき，「往復キップ」の考え方により，$f(f^{-1}(x))=x$ から　$a^{\log_a x}=x$　が自然に見えるようにしたい。これを用いると，$a=e^{\log_e a}$

図41



であるから，$a^x=(e^{\log_e a})^x=e^{x\log_e a}$　……①

と表され，指数関数の底の変換ができることになる。

指数関数の微分については，$f(x)=a^x$ とするとき，

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=\frac{a^{x+dx}-a^x}{dx}=\frac{a^x(a^{dx}-1)}{dx}$$

$$=f(x)\frac{a^{dx}-a^0}{dx} \quad\rightarrow\quad f(x)\cdot f'(0)$$

（ dxが十分0に近いとき ）

すなわち，$f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$

$f'(0)=1$ となるように底 e を定めるには

$\dfrac{a^h-1}{h}\fallingdotseq 1$　とすると，

$a^h\fallingdotseq 1+h$　から　$a\fallingdotseq(1+h)^{\frac{1}{h}}$

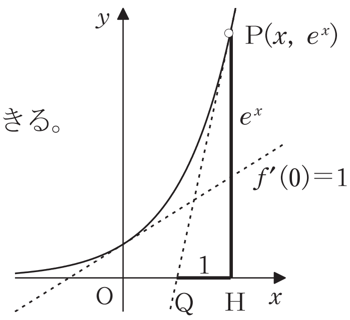
$h=0.1,\ 0.01,\cdots\cdots$ として得られる値を関数電卓などで実際に計算させてe を定めさせる。

得られた結果　$(e^x)'=e^x$ については

$f(x)=e^x$ のグラフで

$f'(x)=\dfrac{\mathrm{HP}}{\mathrm{QH}}=\dfrac{e^x}{1}$

で印象付けることができる。



さらに，対数関数

$y=\log_e x$

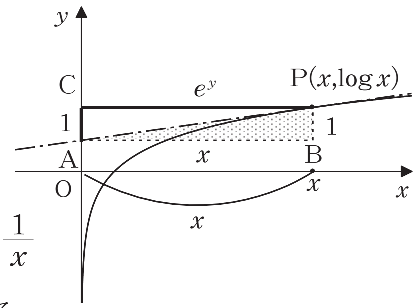
については

$e^y=x$ によって，y からx への対応としてのグラフをかかせ，

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{e^y}{1}$

から$\mathrm{AC}=1=\mathrm{BP}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{x}$



を導くことができる。

一般のa^x の微分については，前頁の底の変換公式①により，$(a^x)'=(e^{x\log_e a})'=e^{x\log_e a}\cdot(x\log_e a)'=a^x\cdot\log_e a$

また，次のような裏技も紹介している。

$\log a^x=x\log a$　この恒等式の両辺を微分して

$$\frac{(a^x)'}{a^x}=\log a \qquad \therefore\ (a^x)'=a^x\log a$$

このような，恒等式の両辺を微分するやり方は，

$x\cdot\dfrac{1}{x}=1$　から　$(x)'\cdot\dfrac{1}{x}+x\cdot(\dfrac{1}{x})'=0$

$x\cdot(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x}$　　$\therefore\ (\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}$　　や

$\sec x\cdot\cos x=1$　から

$(\sec x)'\cdot\cos x+\sec x\cdot(-\sin x)=0$

$(\sec x)'=\sec x\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$　など，

さらに，$f(x)$ の多項式展開(ﾏｸﾛｰﾘﾝ，ﾃｰﾗｰ)についても

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$　①

$f(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\cdots\cdots$　②

の両辺を次々微分して得られる恒等式に，①では$x=0$，②では$x=\alpha$ を代入して，係数が求められる。（収束云々は別にして）

１１．　結び

定理や公式の証明を提示した後，それらを使う例題や練習問題で定着をはかる，という進め方では，問題は解けるようになっても，意味はあまり理解されていないことが感じられる。さらに，イメージ的な解釈を加えることで，理解が深まり，実感としてわかったという状態に近づくのではと考える。教材を「論理的」「形式的」「ビジュアル」という３つの視点から組み立てることを意識するようにしたい。特に，工学部の数学では，論理的な厳密さや計算力よりも意味がわかることが大切であるように思う。創造性という面からも「イメージ力」「ビジュアルな表現」は有用なものと考えるところである。

１２．参考文献

岡部　進　　教育研究社
「日常性の数学にめざめて」
「算数・数学教育はこれでよいのか」
長沼伸一郎「物理数学の直観的方法」通商産業研究社
畑村洋太郎「直感でわかる数学」岩波書店
神永正博「超入門　微分積分」ブルーバックス
江見圭司「微分積分の展開」（校正の要あり）共立出版
吉田　稔・飯島　忠　編集代表　　㈱とうほう
「心を揺する楽しい授業　話題源数学」
栗田　稔　「数学教育における教材研究」明治図書
潮　秀樹　「工業数学の基礎」　　技術評論社
吉福康郎・手嶋忠行　　現代数学社
「これならわかる理工系学生の解析学」
Ira Ritou　　Dover　Pablications,　Inc.
“Capusule Calculus”
E.ﾊｲﾗｰ／G.ｳﾞｧﾝﾅｰ　蟹江幸博　訳　「解析教程」